УДК 539.3

РАСЧЕТ ТЕПЛООБРАЗОВАНИЯ В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННОМ РЕЗИНОВОМ КУБЕ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

***Фролов Н. Н.*[1], *Старостенко И. Н.*[2]**

CALCULATION OF HEAT BUILD-UP IN A PRELIMINARY DEFORMED RUBBER CUBE DURING HARMONIC LOADING

Frolov N. N., Starostenko I. N.

The work has been efficient in solving the problem on harmonic loading of a preliminary compressed rubber cube on the basis of defining relations of nonlinear theory of thermoviscoelasticity of structurally heterogeneous weakly compressed elastomers. The method of finite elements on time — step-by-step procedure — is used for discretization on spatial variables. The fields of stress and temperature distribution timing have been determined.

Анализ напряженно-деформированного состояния твердых тел, подверженных предварительным статическим деформациям и гармоническому догружению, представляет актуальную и сложную задачу механики деформируемого твердого тела. Именно в таких условиях работают большинство промышленных амортизаторов, служащих для снижения колебаний в машинах и приборах.

В настоящей статье на основании определяющих соотношений, полученных в работе [1], решена задача о гармоническом нагружении предварительно сжатого резинового куба. Для дискретизации по пространственным координатам использован метод конечных элементов, по параметру воздействия (время) — шаговая процедура.

1. Постановка задачи

Постановка задачи включает:
вариационные уравнения движения

$$\int\limits_{V_0} [t^{ij}\delta u_{j,i} + (\rho_0 \ddot{u}_j - F^j)\delta u_j] dV_0 - \int\limits_{\overset{0}{\sum}_{\sigma}} \bar{k}(\mathbf{u}) P^j \delta u_j d\overset{0}{\sum_{\sigma}} = 0; \quad (1.1)$$

связь между компонентами ковариантного метрического тензора и градиентами деформации

$$g_{ij} = x^m_{,i} x^m_{,j}, \quad \mathbf{X} \in V_0; \quad (1.2)$$

«закон сжимаемости»

$$I_{g3} - F^2 = \beta_0(1 - \sigma_*), \quad \beta_0 = -\chi_2/\chi_3, \quad \sigma_* = \left[1 - \frac{2(\sigma - \chi_{1)}}{\beta_0 \chi_2}\right]^{0,5}, \quad (1.3)$$

определяющие выражения для напряжений

$$S^{ij} = I_{g3}^{-0,5} G_0 kT \Bigg\{ \delta^{ij} + \frac{1}{2}\alpha_0(T) \times \left[g_{ij} - \frac{1}{3} I_{g1}\delta^{ij} - \int\limits_0^t R(t,\tau)(g_{ij}(\tau) - \frac{1}{3} I_{g1}(\tau)) d\tau \right] + \frac{1}{3}\alpha_1(T) \left[\frac{I_{g1} - 3}{2} - 3\gamma^{[1]}(T) \right] \delta^{ij} + \sigma I_{g3} g^{ij} \Bigg\}, \quad (1.4)$$

где

$$\alpha_k(T) = \frac{c^2 f(T)}{[f(T) + a_0 T]}, \quad k = 0, 1;$$

[1]Фролов Николай Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры строительной механики и сопротивления материалов Кубанского государственного технологического университета.

[2]Старостенко Игорь Николаевич, старший преподаватель кафедры информатики и математики Краснодарского университета МВД России.

энтропию

$$S = S_0 + C_э \ln \frac{T}{T_0} - 0,5 G_0 k (L + T \frac{\partial L}{\partial T}), \quad (1.5)$$

где

$$L(t,T) = I_{g1} + \frac{1}{4}\alpha_0(T)\left[\tilde{g}_{ij}^2(t) - \frac{1}{3}I_{g1}^2(t)\right] + \\ + \frac{1}{3}\alpha_1(T)\left[\frac{1}{2}(I_{g1} - 3) - 3\beta_{[1]}\Theta\right]^2 + \\ + \sigma(I_{g3} - F^2) - \frac{1}{2}\chi_2\beta_0^2(1-\sigma_*)^2 - \\ - \frac{1}{3}\chi_3\beta_0^3(1-\sigma_*)^3,$$

$$\tilde{g}_{ij}(t) = g_{ij}(t) - \int_0^t R(t,\tau) g_{ij}(\tau) d\tau,$$

$$\tilde{I}_{g1}(t) = I_{g1}(t) - \int_0^t R(t,\tau) I_{g1}(\tau) d\tau;$$

диссипативную функцию

$$w^* = G_0 k T \frac{1}{4}\alpha_0(T) \times \\ \times \left\{ g_{ij}\frac{\partial}{\partial t}(g_{ij}(t) - \tilde{g}_{ij}(t)) - \frac{\partial}{\partial t}(g_{ij}(t) - \right. \\ - \tilde{g}_{ij}(t))^2 - \frac{1}{3} I_{g1}\frac{\partial}{\partial t}(I_{g1}(t) - \tilde{I}_{g1}(t)) + \\ \left. + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}(I_{g1}(t) - \tilde{I}_{g1}(t))^2 \right\}; \quad (1.6)$$

вариационное уравнение притока тепла

$$\int_{V_0} \left[(T\dot{S} - w^*)\delta\Theta + \sqrt{I_{g3}}\Lambda g^{mn} T_{,n}\delta\Theta_{,m} \right] dV_0 + \\ + \int_{\overset{0}{\Sigma}} \bar{k}(\mathbf{u}) k_T (T - T_ф)\delta\Theta d\overset{0}{\Sigma} = 0; \quad (1.7)$$

условия закрепления

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \sum_u^0; \quad (1.8)$$

начальные условия по перемещениям

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{v}_1(\mathbf{X}); \quad (1.9)$$

скоростям

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{v}_2(\mathbf{X}); \quad (1.10)$$

температуре

$$T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}); \quad (1.11)$$

– условие теплообмена на внешней поверхности $\overset{0}{\Sigma}$

$$\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} = k_T(T - T_ф). \quad (1.12)$$

В формулах (1.1)–(1.12) V_0 — область, занимаемая телом в недеформированном состоянии; $\overset{0}{\Sigma} = \sum_\sigma^0 \cup \sum_u^0$ — ее поверхность, состоящая из двух частей, на одном из которых заданы распределенные нагрузки $\mathbf{P}$, на другом — перемещения $\mathbf{u}_0$; $\mathbf{X}$ — координаты Лагранжа; $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ — координаты Эйлера; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения; ρ_0 — плотность материала в исходном состоянии; $\mathbf{F}$ — вектор объемной силы; $\bar{k}(\mathbf{u})$ — кратность изменения элементарной площадки; δ — символ вариации функции; t^{ij} — компоненты тензора условных напряжений; g_{ij} — компоненты метрического тензора с инвариантами I_{gi}; δ^{ij} — символ Кронекера; G_0 — общее число активных молекулярных цепей в единице объема; k — постоянная Больцмана; c^2, a_0, a_1, β_0, χ_1, χ_2, χ_3 — структурно-механические параметры резины; $\beta_{[1]}$, $C_э$ — теплофизические параметры резины; $F(T)$, $f(T)$, $\gamma^{[1]}(T)$ — известные функции температуры; σ — функция типа гидростатического давления; $R(t,\tau)$ — функция релаксации; $\Theta = T - T_0$ — приращение температуры; Λ — коэффициент теплопроводности; k_T — коэффициент теплоотдачи; $\mathbf{v}_1(\mathbf{X})$, $\mathbf{v}_2(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$ — известные вектор-функции координат; $T_ф$ — температура внешнего тела.

Система (1.1)–(1.12) замкнута [2]. Задача заключается в нахождении вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ и скалярных функций $\sigma(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$, удовлетворяющих системе (1.1)–(1.12).

2. Уточнение внешних воздействий

Граничные условия имеют вид

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_{(0)}(\mathbf{X}, t), t \leqslant t_N; \\ \mathbf{u}_{(0)}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{u}_{*0}(\mathbf{X}, t_1) + \\ + \mathbf{u}_{c0}(\mathbf{X}, t_1)\cos\omega t_1 - \\ - \mathbf{u}_{s0}(\mathbf{X}, t_1)\sin\omega t_1, t_1 \geqslant 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} \mathbf{P}_{(0)}(\mathbf{X}, t), t \leqslant t_N, \\ \mathbf{P}_{(0)}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{P}_{*0}(\mathbf{X}, t_1) + \\ + \mathbf{P}_{c0}(\mathbf{X}, t_1)\cos\omega t_1 - \\ - \mathbf{P}_{s0}(\mathbf{X}, t_1)\sin\omega t_1, t_1 \geqslant 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\mathbf{u}_{(0)}$, $\mathbf{P}_{(0)}$ — медленные функции времени, задающие процесс предварительного нагружения; $\mathbf{u}_{*0}$, $\mathbf{u}_{c0}$, $\mathbf{u}_{s0}$, $\mathbf{P}_{*0}$, $\mathbf{P}_{c0}$, $\mathbf{P}_{s0}$ — амплитуды догружающих воздействий, $t_1 = t - t_N$, t_N — длительность предварительного нагружения. Условия (2.1), (2.2) позволяют линеаризовать задачу в окрестности промежуточного состояния и рассматривать малые моногармонические колебания предварительно деформированного вязкоупругого тела.

3. Построение приближенного решения

Приближенное решение задачи (1.1)–(1.12) ищем в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{X},t) = \begin{cases} \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{X},t), \quad t \leqslant t_N, \\ \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{X},t) + \mathbf{u}_*(\mathbf{X},t_1) + \\ + \mathbf{u}_c(\mathbf{X},t_1)\cos\omega t_1 - \\ - \mathbf{u}_s(\mathbf{X},t_1)\sin\omega t_1, t_1 \geqslant 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\sigma(\mathbf{X},t) = \begin{cases} \overset{(0)}{\sigma}(\mathbf{X},t), \quad t \leqslant t_N, \\ \overset{(0)}{\sigma}(\mathbf{X},t) + \sigma_*(\mathbf{X},t_1) + \\ + \sigma_c(\mathbf{X},t_1)\cos\omega t_1 - \\ - \sigma_s(\mathbf{X},t_1)\sin\omega t_1, t_1 \geqslant 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\Theta = \Theta(\mathbf{X},t). \tag{3.3}$$

где $\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{X},t)$, $\overset{(0)}{\sigma}(\mathbf{X},t)$ — части решения, отвечающие предварительному нагружению; $\mathbf{u}_*(\mathbf{X},t_1)$, $\mathbf{u}_c(\mathbf{X},t_1)$, $\mathbf{u}_s(\mathbf{X},t_1)$, $\Theta(\mathbf{X},t)$ — медленные функции времени, характерное время изменения которых велико по сравнению с периодом колебаний.

Для перехода к задаче относительно амплитудных переменных используем метод усреднения [3]. Линеаризованную задачу разделим на две подзадачи: первую подзадачу описывает система квазилинейных дифференциальных уравнений движения относительно амплитуд $\mathbf{u}_c(\mathbf{X},t)$, $\mathbf{u}_s(\mathbf{X},t)$, $\sigma_c(\mathbf{X},t)$, $\sigma_s(\mathbf{X},t)$ с соответствующими начальными условиями, а также краевая задача статики относительно функций $\mathbf{u}_*(\mathbf{X},t)$, $\sigma_*(\mathbf{X},t)$; вторую подзадачу определяет уравнение энергии (1.7). Особенностью изучаемой задачи в целом является присутствие в ней термомеханического сопряжения, а также зависимости от параметров предварительного нагружения.

В конечноэлементной формулировке задача имеет вид

$$\begin{cases} A^{ij}_{MN} u^N_{*i} + D^j_M \sigma_* = P^M_{*j}, \\ D^i_N u^N_{*i} - \alpha^{(0)}\sigma_* = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \overset{(c)}{A^{ij}_{MN}} u^N_{ci} + D^j_M \sigma_c + \overset{(c)}{B^{ij}_{MN}} u^N_{si} + \\ + \overset{(c)}{C^{ij}_{MN}} \dot{u}^N_{si} = P^M_{cj}, \\ D^i_N u^N_{ci} - \alpha^{(0)}\sigma_c = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \overset{(s)}{A^{ij}_{MN}} u^N_{si} + D^j_M \sigma_s + \overset{(s)}{B^{ij}_{MN}} u^N_{ci} + \\ + \overset{(s)}{C^{ij}_{MN}} \dot{u}^N_{ci} = P^M_{sj}, \\ D^i_N u^N_{si} - \alpha^{(0)}\sigma_s = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\|C\| \frac{d\mathbf{\Theta}^{(e)}}{dt} + \|D\|\mathbf{\Theta}^{(e)} + \|E\|\mathbf{\Theta}^{(e)} = \\ = \mathbf{B}^{(e)} - \mathbf{A}^{(e)}, \tag{3.7}$$

где $\|C\|$, $\|D\|$, $\|E\|$ — соответственно матрицы теплоемкости, теплопроводности и теплоотдачи, $\mathbf{B}^{(e)}$ — вектор обобщенной диссипации, $\mathbf{A}^{(e)}$ — вектор, обусловленные различием начальных температур тела и окружающей среды, $\mathbf{\Theta}^{(e)}$ — вектор узловых значений температуры. Коэффициенты матричных уравнений (3.4)–(3.7) зависят от уровня предварительной деформации и текущего значения температуры.

Дискретизация по времени выполнена в виде простейшей шаговой процедуры. Применительно к шагу с номером $(r+1)$ алгоритм имеет вид:

1) По известному распределению температуры $T(\mathbf{X},t_r)$ в момент времени $t = t_r$ решаем задачу механики, определяем поля амплитуд перемещений $\mathbf{u}_*(\mathbf{X},t_r)$, $\mathbf{u}_c(\mathbf{X},t_r)$, $\mathbf{u}_s(\mathbf{X},t_r)$ и амплитудные значения функции типа гидростатического давления $\sigma_*(\mathbf{X},t_r)$, $\sigma_c(\mathbf{X},t_r)$, $\sigma_s(\mathbf{X},t_r)$;

2) Формируем и решаем систему уравнений притока тепла, в результате находим распределение температуры $T(\mathbf{X},t_{r+1})$ на $(r+1)$-ом временном слое;

3) С учетом модифицированного температурного поля вновь переходим к пункту 1) алгоритма и процесс замыкается.

4. Саморазогрев предварительно сжатого резинового куба

Рассмотрим куб из резины ИРП-2090 с ребром $a = 0,06$ м, на двух противоположных гранях которого, контактирующих с металлом, заданы встречные перемещения с одинаковыми амплитудами. Остальные грани, окруженные воздухом, свободны от поверхност-

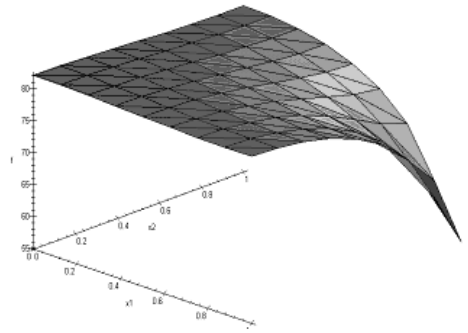

Рис. 1. Распределение приращения температуры по сечению $X^3 = 0$ (задача 1)

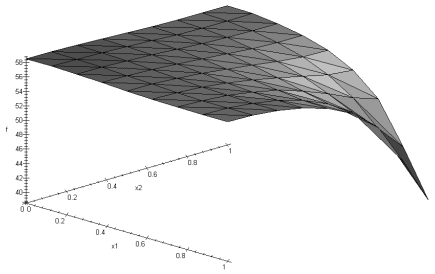

Рис. 2. Распределение приращения температуры по сечению $X^3 = 0$ (задача 2)

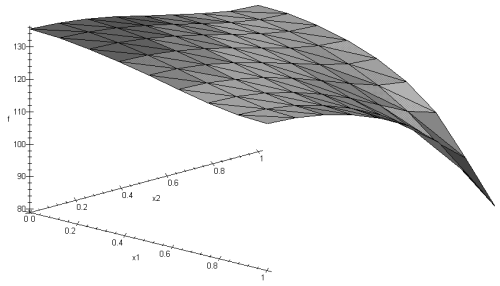

Рис. 3. Распределение приращения температуры по сечению $X^3 = 0$ (задача 3)

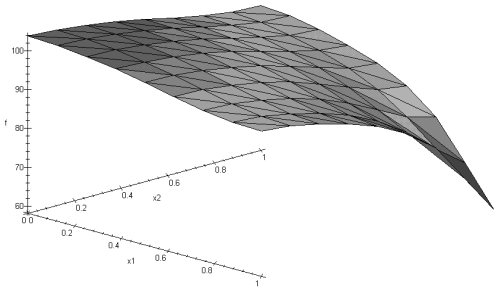

Рис. 4. Распределение приращения температуры по сечению $X^3 = 0$ (задача 4)

ных нагрузок. Учитывая естественную симметрию задачи, систему координат связываем с главными центральными осями куба: для определенности координатную плоскость x^1Ox^2 считаем горизонтальной, ось x^3 направляем вертикально вверх. Амплитуды гармонических воздействий принимаем равными 3 мм. В формулах (1.9), (1.10) полагаем $\mathbf{v}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. Считаем, что в начальный момент времени температурное поле является однородным. Дискретизацию выполняем с применением призматических конечных элементов с билинейной аппроксимацией перемещений, температуры и кусочно-постоянной аппроксимацией функции типа гидростатического давления. Параметры конечноэлементной сетки таковы: число узлов в 1/8 части исходной области — 729, количество призматических элементов — 1024, число неизвестных по одному типу амплитуд в задаче механики — 2187, в задаче теплопроводности — 729. В начальный момент времени температурное поле однородно. Расчеты выполнены при следующих исходных данных: $T_0(\mathbf{X}) = T_{\text{ф}} = \text{Т}_{\text{э}} = 295$ К, $\omega = 40$ Гц, $\alpha_{\text{э}} = 1,5 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$, $\beta_{[1]} = 1,0 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$, $\Lambda = 0,22$ Вт/(м·К), $k_T^{(\text{м})} = 1153$ Вт/(м^{2}К), $k_T^{(\text{в})} = 8,8$ Вт/(м^{2}К), $C_{\text{э}} = 2000$ КДж/(м^{3}К), $\rho_0 = 1200$ кг/м^3. Здесь $k_T^{(\text{м})}$ — коэффициент теплоотдачи на границе контакта резины и металла, $k_T^{(\text{в})}$ — соответственно резины и воздуха.

Для изучения влияния предварительного нагружения и граничных условий на процессы теплообразования в резине решены четыре задачи:

1) Поджатия нет, резина и металл контактируют без трения;

2) Куб сжимаем на 20 %, контакт между резиной и металлом идеальный;

3) Поджатия нет, резина привулканизована к металлу;

4) Начальное поджатие 20 %, резина привулканизована к металлу.

В практических расчетах реализовано 40 циклов по задаче механики, в каждом из которых выполнено 10 циклов по интегрированию уравнения энергии. Проанализирована история процесса на интервале $t_1 \in [0, 20000]$ с. На рис. 1–4 приведены поверхности распределения избыточной температуры по сечению куба плоскостью $X^3 = 0$, построенные на лагран-

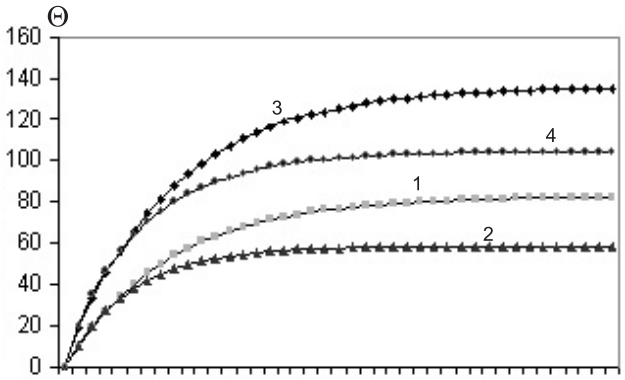

Рис. 5. Увеличение температуры во времени в центре тела (задачи 1–4)

жевой сетке в нормированных координатах в момент времени $t_1 = 20000$ с.

Максимальный разогрев наблюдаем в центре области. Изображенные функции симметричны относительно биссекторной плоскости и имеют в диагональном направлении характерную впадину, завершающуюся минимумом.

На рис. 5 приведены графики повышения температуры во времени (для средней точки). Во всех случаях наблюдаем зависимости с выходом на участок стабилизации, т. е. задачи переходят в стационарные. Решение стационарной задачи в предположении независимости механических параметров от температуры приводит к заниженным значениям температуры саморазогрева. Наибольшая скорость разогрева зарегистрирована в задаче 4, что обусловлено предварительным нагружением и неоднородным напряженно-деформированным состоянием. Однако итоговая температура в данной задаче ниже, чем в задаче 3. Это объясняется уменьшением длины тела в направлении оси X^3. В задачах 1 и 2 с идеальным контактом наблюдаем аналогичные закономерности, однако интенсивность теплообразования здесь снижена. Заметим, что задачи 1 и 2 в начальный момент времени механически однородны, в процессе формирования неоднородного поля температуры в теле появляются сдвиговые деформации и дополнительные температурные напряжения. Кривые 1–4 отвечают задачам 1–4.

Таким образом, температура играет определяющую роль при разрушении, что доказывает актуальность полученных решений.

Литература

1. *Фролов Н. Н., Дунаев И. М.* Нелинейная теория термовязкоупругости структурно-неоднородных слабосжимаемых эластомеров // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 1999. Вып. 1. С. 57–61.
2. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
3. *Филатов А. Н.* Метод усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент: ФАН, 1971. 277 с.

Статья поступила 23 июня 2007 г.
Кубанский государственный технологический университет, г. Краснодар
Краснодарский университет МВД России, г. Краснодар
© Фролов Н. Н., Старостенко И. Н., 2007