

УДК 532.546

**ВЕРИФИКАЦИЯ РЕЛАКСАЦИОННОЙ МОДЕЛИ РИЧАРДСА ПО
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ ПРОПИТКИ¹***Гоголашвили Б. Э.², Даутов Р. З.³, Егоров А. Г.⁴***VERIFICATION OF A RELAXATIONAL RICHARDS'S MODEL ON EXPERIMENTAL DATA FOR
ONE-DIMENSIONAL UNSATURATED FLOW***Gogolashvili B. E., Dautov R. Z., Egorov A. G.*

A possible approach to modification of water transfer model in porous medium has been described by taking into account relaxation effects. The model offered has made it possible to solve the problem about propagation of a traveling wave of unsaturated flow, construct saturation profiles and verify the model using experimental data of D. A. DiCarlo. It has been shown that the relaxational Richards's model modification enables us to describe the water transfer process in unsaturated porous media not only in qualitative, but also in quantitative terms.

Введение

Классические модели транспорта жидкости в пористой среде показали себя мало-пригодными при описании некоторых практически важных ситуаций, таких как влагоперенос в грубозернистой ненасыщенной пористой среде. Заметный рост интереса к подобным задачам не в последнюю очередь связан с возможными применениями в экологии, например при прогнозировании распространения водорастворимых загрязнений в почве.

Противоречие заключается в том, что согласно многочисленным экспериментам в указанных ситуациях однородный фронт пропитки неустойчив и распадается на систему струй (так называемых «пальцев»). В то же время анализ [1, 2] традиционно используемой в механике пористых сред модели Ричардса влагопереноса доказывает её абсолютную устойчивость [3]. Показано, что это затруднение можно обойти, видоизменив исходную модель так, чтобы привнести в неё релаксационные эффекты.

Несмотря на то, что возможные пути модификации модели Ричардса, обеспечивающие

неустойчивость фронта пропитки, известны, недостаток соответствующих экспериментальных данных не позволял до сих пор предложить законченный вид модифицированной модели, равно как и провести её количественную верификацию. Такая возможность появилась в последнее время благодаря серии экспериментальных работ D. A. DiCarlo [4, 5] по исследованию процесса пропитки лабораторных песков. Их использование позволило сформулировать замкнутую релаксационную модель влагопереноса и определить с удовлетворительной точностью параметры этой модели.

1. Модель

Классическая модель совместного течения несмешивающихся жидкостей в пористой среде в случае, когда вязкостью одной из жидкостей (воздуха) можно пренебречь, приводит к следующим двум уравнениям для определения двух неизвестных функций давления и водонасыщенности, известным как модель Ричардса:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla K(\theta)(\nabla p + e_z) = 0, \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00516).

²Гоголашвили Булат Эдуардович, научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

³Даутов Рафаил Замилович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

⁴Егоров Андрей Геннадьевич, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

$$p = P(\theta). \quad (1.2)$$

Здесь θ — водонасыщенность, p — капиллярное давление жидкости, измеряемое в сантиметрах водного столба, K — гидропроводность (см/мин), e_z — орт вертикальной координаты z , противоположной по направлению силе тяжести. Функция $P(\theta)$ определяет равновесное давление, отвечающее заданному уровню водонасыщенности. Обычно считается, что θ меняется в пределах от $\theta_r > 0$ до $\theta_a < \phi$ (θ_r , θ_a — остаточные по воде и воздуху водонасыщенности, ϕ — пористость среды), K — монотонно возрастающая, выпуклая функция, $K(\theta_r) = 0$. Зависимость (1.2) в общем случае является гистерезисной и определяется двумя кривыми $p = P_w(\theta)$ и $p = P_d(\theta)$, называемыми, соответственно, главными кривыми пропитки и дренажа.

В настоящее время очевидно, что классическая модель Ричардса не в состоянии описать многие практически важные ситуации. Они, например, возникают при моделировании течений в изначально сухих пористых средах. Это происходит, в частности, в экспериментах по инфильтрации жидкости с постоянным расходом в вертикальную колонку, заполненную песком, имеющим начальную водонасыщенность $\theta_0 < \theta_r$.

Основная причина неприменимости модели Ричардса в этом случае кроется в существенной неравновесности протекающих на фронте пропитки процессов. Следствием этой неравновесности является немонотонность профилей водонасыщенности и давления, которая не может быть воспроизведена моделью Ричардса [2].

Известные экспериментальные факты [6–8] с необходимостью свидетельствуют, что уравнения (1.1), (1.2) должны быть модифицированы с целью учета неравновесных эффектов. В первую очередь это касается уравнения (1.2), поскольку именно оно выражает гипотезу о локальном равновесии в элементарном объеме пористой среды.

В настоящей работе используется предложенная в [9] модификация модели Ричардса, заменяющая (1.2) соотношением

$$\tau \frac{\partial \theta}{\partial t} + P(\theta) = p. \quad (1.3)$$

Здесь τ — дополнительный параметр модели, связанный с временем релаксации и имеющий размерность см·мин. В ряде исследований [10–12] было показано, что при соответствующем выборе параметра τ , уравнения

(1.1), (1.3) способны качественно верно описать процесс инфильтрации жидкости в изначально сухую ненасыщенную пористую среду. Однако недостаток систематических экспериментальных исследований не позволял до сих пор провести количественную верификацию модели и определить зависимость τ от параметров состояния среды θ , p . Например, в работах [9, 10] она предполагалась зависящей только от θ , а в [2, 11, 12] — зависящей от p и θ , убывающей по p и малой при $p = 0$. Такие представления были основаны как на физических соображениях, так и на результатах численного моделирования (при этом использовались, как правило, простейшие степенные зависимости).

В настоящее время, благодаря обширным и тщательным экспериментам D. DiCarlo [4], оказалось возможным восполнить этот пробел. В [5] было установлено, что параметр релаксации не может быть постоянным или зависеть только от θ (на основании этого был сделан ошибочный вывод о непригодности модифицированной модели). В данной работе мы показываем, что зависимость τ от p является тем принципиальным моментом, который позволяет согласовать теорию с экспериментом.

2. Эксперименты D. A. DiCarlo

Охарактеризуем кратко эксперименты D. DiCarlo по гравитационной пропитке образцов лабораторных грунтов при различных условиях [4]. Часть результатов этих экспериментов была любезно предоставлена нам автором для обработки и анализа.

Типичная экспериментальная установка в этих опытах представляла собой стеклянную трубку длиной 40 см и внутренним диаметром от 0,95 см до 1,27 см, в зависимости от типа грунта, установленную вертикально и заполненную песком. В качестве заполнителя использовались лабораторные пески типов 12/20, 20/30, 30/40 (маркировка соответствует характеристикам сит, через которые просеивается песок). Эти пески широко применяются в лабораторной практике, их характеристики (химический состав, плотность, пористость, функция распределения частиц по размерам) измерены с высокой точностью [13] и отличаются постоянством от образца к образцу. Опыты проводились как с изначально сухим песком ($\theta_0 = \theta|_{t=0} = 2 \cdot 10^{-3}$), так и с песком, имеющим небольшую начальную влажность ($\theta_0 = 1 \cdot 10^{-2}, 2 \cdot 10^{-2}$), меньшую оста-

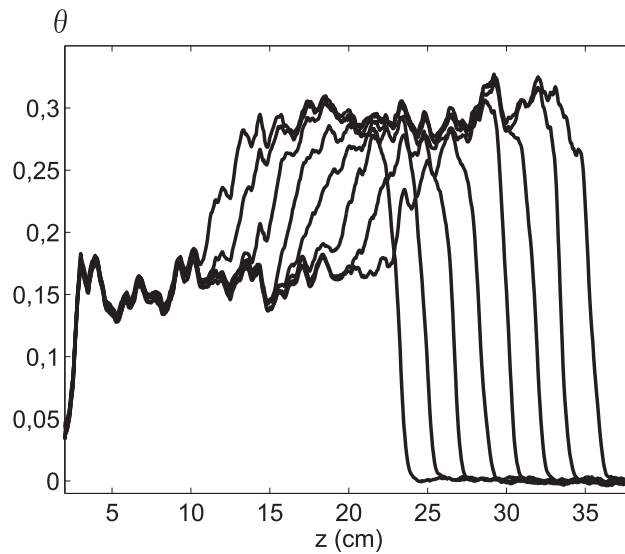


Рис. 1. Временной ряд профилей насыщенности, полученных в ходе одного эксперимента по гравитационной пропитке лабораторного песка 20/30

точной. С верхнего конца в трубку с заданным постоянным расходом q подавалась вода. В результате этого образовывался ярко выраженный фронт насыщенности, передвигающийся вниз с постоянной скоростью V .

С одной стороны трубка освещалась источником света, в то время как с другой находилась высокочувствительная фотоаппаратура. Полученный образ с заданной периодичностью оцифровывался и сохранялся. Существующее соответствие между степенью яркости каждой точки образа и влагонасыщенностью соответствующей точки трубки позволило получить профили насыщенности на различные моменты времени. Типичная совокупность таких профилей представлена на рис. 1.

Перед непосредственным использованием в расчётах из набора профилей для каждого типа среды при каждом значении расхода жидкости были отбракованы те, что соответствуют начальной и конечной фазам эксперимента. В первом случае профиль ещё не успевает сформироваться, а во втором на форму профиля начинает оказывать влияние нижняя граница трубки. В промежуточной фазе, как видно из рис. 1, стационарный профиль насыщенности переносится под действием силы тяжести с постоянной скоростью. Форма профиля существенно немонотонна: имеет место резкий скачок насыщенности на переднем фронте распространяющейся волны от θ_0 до некоторого максимального значения θ_{tip} , далее высокое значение насыщенности сохраняется в некоторой области, длина которой зависит от расхода жидкости, и в дальнейшем — сни-

жается, выходя на постоянное значение θ_{tail} . С уменьшением расхода жидкости величина скачка водонасыщенности на переднем фронте уменьшается и при малых расходах профиль становится монотонным. Как показано в [9], немонотонность профиля насыщенности приводит к неустойчивости волны пропитки и, в конечном итоге, к её распаду на систему пальцев. Подчёркнём, что это является не аномалией, а закономерностью в случае быстрой пропитки грубозернистых пористых сред.

В результате описанной предварительной обработки экспериментальных данных в нашем распоряжении для каждой из лабораторных сред оказалось несколько (от 5 до 20) установившихся профилей влажности при различных расходах q и начальных влажностях грунта θ_0 , а также зависимости θ_{tip} и θ_{tail} от q . Именно последние данные оказались наиболее полезными для количественной верификации релаксационной модели (1.1), (1.3). Часть этих результатов можно найти в работах [4, 5].

3. Определяющие уравнения

Благодаря одномерному характеру рассматриваемых течений уравнение (1.1) сводится к следующему:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} K(\theta) \left(\frac{\partial p}{\partial z} + 1 \right) = 0. \quad (3.1)$$

Конкретизируем уравнение (1.3), ограничиваясь реализуемой в экспериментах ситуа-

цией, когда элемент пористой среды в процессе эволюции проходит лишь две стадии, а именно — начальную стадию пропитки (в этом случае $\dot{\theta} = \partial\theta/\partial t > 0$) и стадию последующего дренажа (соответственно, $\dot{\theta} < 0$).

Пусть $p = P_w(\theta)$ и $p = P_d(\theta)$ — заданные первичные кривые пропитки и дренажа, а $\theta = S_w(p)$ и $\theta = S_d(p)$ — соответствующие им обратные функции. Считается, что

$$P(\theta) = \begin{cases} P_w(\theta), & \dot{\theta} > 0, \\ P_{sc}(\theta, \theta_*), & \dot{\theta} < 0. \end{cases}$$

Согласно Муалему [14], сканирующая кривая первого порядка $p = P_{sc}(\theta, \theta_*)$ определяется как обратная к функции $S_{sc}(p, \theta_*)$

$$S_{sc}(p, \theta_*) = S_w(p) + \frac{\theta_* - S_w(p)}{\phi - S_w(p)} (S_d(p) - S_w(p)).$$

Здесь $(\theta_*, P_w(\theta_*))$ — точка в фазовой плоскости (θ, p) , в которой процесс пропитки сменяется дренажем (т. е. $\dot{\theta} = 0$). В нашем случае, очевидно, $\theta_* = \theta_{tip}$.

Далее, следуя [15], будем считать, что релаксация существенна только на стадии пропитки и, учитывая медленный характер процесса дренажа, примем $\tau = 0$, если $\dot{\theta} < 0$.

Таким образом, уравнение (1.3) необходимо понимать как выполнение следующих соотношений:

$$\begin{cases} \tau \dot{\theta} = p - P_w(\theta), & \dot{\theta} > 0, \\ \theta = S_{sc}(p, \theta_*), & \dot{\theta} < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1), (3.2) дополняются естественными для рассматриваемых экспериментов начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} \theta|_{t=0} &= \theta_0, \quad \theta|_{z=0} = \theta_0, \\ K(\theta)(\partial p/\partial z + 1)|_{z=L} &= q. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для замыкания модели необходимо определить вид гидравлических функций $K(\theta)$, $P_w(\theta)$, $P_d(\theta)$, а также функции $\tau(\theta, p)$.

4. Конкретизация гидравлических функций K и P

Зависимости равновесных кривых дренажа и пропитки аппроксимировались согласно ван Генухтену [17] как

$$\begin{aligned} P_i(\theta) &= -\frac{1}{\alpha_i} ((\theta/\theta_s)^{-1/m_i} - 1)^{1/n_i}, \\ m_i &= 1 - 1/n_i, i = w, d. \end{aligned}$$

Здесь θ_s — значение полной насыщенности, $\theta_s = 0,35$ для всех трёх песков; индексы w и d отвечают пропитке и дренажу соответственно. Значения параметров для песков каждого типа представлены в таблице.

Значения α_d , n_d были взяты согласно [13]; α_w , n_w были найдены из аппроксимации результатов экспериментов D. DiCarlo по измерению кривой пропитки [4].

В отличие от $P(\theta)$, зависимость гидравлической проницаемости от насыщенности $K(\theta)$ слабо зависит от направления процесса и поэтому может быть принята одной и той же для дренажа и пропитки. Её вид можно непосредственно определить по экспериментальным данным D. DiCarlo. Действительно, из уравнения (3.1) следует, что K и θ с точностью до нормировки совпадают с потоком q влаги и влажностью θ_{tail} в хвосте пальца. При этом величина q непосредственно задаётся, а θ_{tail} — определяется в ходе эксперимента.

Хорошей аппроксимацией для $K(\theta)$ может служить следующая зависимость:

$$K(\theta) = \begin{cases} c\theta^{2.0}, & 0 < \theta < \theta_j, \\ k_s \left(\frac{\theta - \theta_*}{\theta_s - \theta_*} \right)^{a_k}, & \theta_j < \theta < \theta_s. \end{cases}$$

Здесь θ_* — остаточная (по проницаемости) насыщенность, $\theta_* = 0,047$ для всех трёх песков; $\theta_j = 1,01 \cdot \theta_*$; величина c определяется из условия непрерывности функции $K(\theta)$ в точке $\theta = \theta_j$; значения параметров k_s и a_k приведены в таблице. Продолжение $K(\theta)$ в сухую зону ($0 < \theta < \theta_j$) в виде квадратичной функции основано на решётчатом микромоделировании пористой среды [18].

5. Решение типа бегущей волны

Ранее отмечалось, что установившееся решение задачи (3.1), (3.2), (3.3) имеет вид бегущей волны пропитки. Для определения формы этой волны имеем автомодельную задачу, предполагая, что

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(\xi), \quad p = p(\xi), \quad \xi = z + Vt, \\ \theta(-\infty) &= \theta_0, \quad \theta(\infty) = \theta_{tail}. \end{aligned}$$

Уравнение (3.1) при этом примет вид

$$V \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{d}{d\xi} \left(K(\theta) \frac{dp}{d\xi} \right) - \frac{dK(\theta)}{d\xi} = 0,$$

Параметры гидравлических функций

Грунт	α_w	n_w	α_d	n_d	c_p	c_τ	k_s	a_k
12/20	0,303	4,98	0,151	7,35	2,55	-2,5	30,0	2,2
20/30	0,177	6,23	0,0995	10,57	3,6	0,2	16,51	2,2
30/40	0,174	12,0	0,0679	13,10	4,0	0,3	9,0	2,0

или, после однократного интегрирования ($p' = dp/d\xi$),

$$p' = \frac{V(\theta - \theta_0) + K(\theta_0) - K(\theta)}{K(\theta)}. \quad (5.1)$$

Скорость движения волны определяется по значениям водонасыщенности θ_0 и θ_{tail} по формуле

$$V = \frac{K(\theta_{\text{tail}}) - K(\theta_0)}{\theta_{\text{tail}} - \theta_0}.$$

Уравнения (3.2) в новых переменных преобразуются к

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{p - P_w(\theta)}{V\tau}, \quad \theta' \geq 0, \\ \theta &= S_{sc}(p, \theta_*), \quad \theta' < 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Поскольку среда в начальном состоянии находилась в равновесии, полагаем

$$p(-\infty) = P_w(\theta_0). \quad (5.3)$$

Краевая задача (5.1), (5.2) является замкнутой и позволяет определить установившийся профиль водонасыщенности и давления при заданном расходе жидкости q .

На первом этапе решаем задачу Коши

$$\begin{aligned} p' &= \frac{V(\theta - \theta_0) + K(\theta_0) - K(\theta)}{K(\theta)}, \\ \theta' &= \frac{p - P_w(\theta)}{V\tau}, \\ p(-\infty) &= P_w(\theta_0), \quad \theta(-\infty) = \theta_0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

до выполнения условия $\theta'(\xi_*) = 0$ и находим часть решения при $\xi \in (-\infty, \xi_*]$, соответствующую фазе пропитки.

На втором этапе находим другую часть решения при $\xi \in (\xi_*, \infty)$, соответствующую фазе дренажа, решая задачу

$$\begin{aligned} p' &= \frac{V(\theta - \theta_0) + K(\theta_0) - K(\theta)}{K(\theta)}, \\ \theta &= S_{sc}(p, \theta_*), \quad p(\theta_*) = P_w(\theta_*). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Таким образом, при любом выборе параметра модели τ для заданных значений θ_0 и q

решение сформулированной задачи позволяет построить профиль водонасыщенности и сравнить его с экспериментальным профилем; их согласование даёт возможность найти зависимость $\tau(\theta, p)$.

6. Определение коэффициента релаксации

В данной работе было использовано предположение о том, что коэффициент релаксации τ может быть представлен в виде произведения двух независимых функций насыщенности и давления: $\tau(\theta, p) = \tau_\theta(\theta)\tau_p(p)$; функции τ_p и τ_θ , как сказано выше, должны определяться из условия согласования результатов вычислений с результатами натурных экспериментов. Учитывая сложность решаемой обратной задачи, при выборе параметризации функций τ_p и τ_θ естественно свести к минимуму число параметров в определении этих функций.

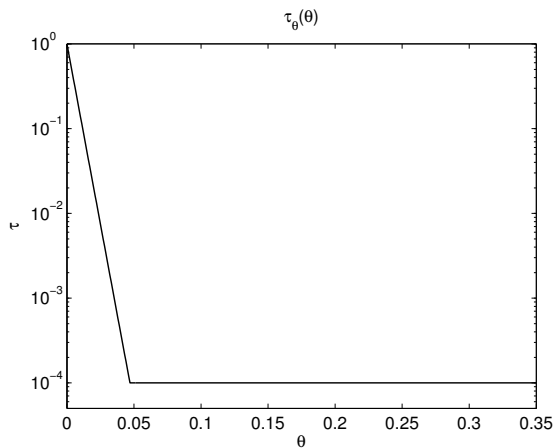
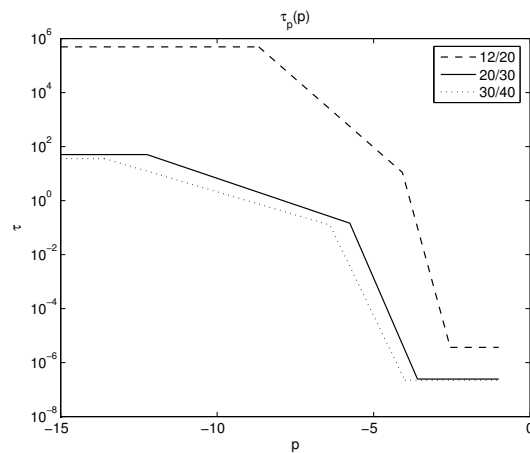
Выражение для функции $\tau_\theta(\theta)$ было зафиксировано для всех трёх типов песков в виде

$$\tau_\theta(\theta) = \begin{cases} \tau_\epsilon^{\theta/\theta_\epsilon}, & 0 < \theta < \theta_\epsilon, \\ \tau_\epsilon, & \theta_\epsilon < \theta < \theta_s. \end{cases}$$

Здесь $\tau_\epsilon = 10^{-4}$, $\theta_\epsilon = \theta_*$. График зависимости $\tau_\theta(\theta)$ представлен на рис. 2.

Выражение для функции $\tau_p(p)$ первоначально задавалось в виде кусочно-показательной функции $\tau_p(p) = a_i \exp(k_i p)$, $p \in [p_i, p_{i+1}]$, $i = 1 \dots n$, где a_i , k_i , p_i , n — параметры аппроксимации. Значения этих параметров оказалось возможным определять последовательно из условия совпадения рассчитанных значений $\theta_{\text{tip}}(q)$ с экспериментальными. Полученные зависимости параметризовались в виде $\tau_p^i(p) = \exp(c_\tau^i p) T(c_p^i p)$ (i отвечает типу песка), где $T(p)$ записывалось как

$$T(p) = \begin{cases} 1 \cdot 10^2, & p < -3,4, \\ \exp(k_1 p + b_1), & -3,4 < p < -1,6, \\ \exp(k_2 p + b_2), & -1,6 < p < -1, \\ 3 \cdot 10^{-7}, & p > -1. \end{cases}$$

Рис. 2. График функции τ_θ Рис. 3. Вид функции τ_p для различных лабораторных песков

Здесь $k_1 = -55,4$, $b_1 = -88,5$, $k_2 = -0,3$, $b_2 = -0,3$, p — безразмерное давление, значения коэффициентов c_p и c_τ (имеющих размерность см^{-1}) для различных грунтов представлены в таблице. Вид полученных в результате аппроксимации зависимостей $\tau_p(p)$ для различных песков представлен на рис. 3.

Очевидно, что найденные функции τ_p^i подобны друг другу. Используемые в экспериментах пористые среды относятся к одному семейству, имеют одинаковую пористость, химический состав, сферическую форму зерен. Они различаются только средним размером зерна, который монотонно возрастает в последовательности $30/40 \rightarrow 20/30 \rightarrow 12/20$, то есть также являются подобными. Такая согласованность рассматривается как дополнительный аргумент в пользу предложенной аппроксимации коэффициента релаксации.

7. Результаты расчётов

Для экспериментальных значений расхода q из уравнений (5.4), (5.5) с использованием описанных выше аппроксимаций гидравлических функций и параметра релаксации были найдены установившиеся профили функций насыщенности. Типичное качество согласования расчётов с экспериментальными данными иллюстрирует рис. 4. На рис. 5 представлены экспериментальные и рассчитанные зависимости $\theta_{\text{tip}}(q)$ и $\theta_{\text{tail}}(q)$.

Сплошные линии на графике соответствуют численным решениям для различных значений начальной насыщенности, маркеры — экспериментальным данным. Приведён-

ные кривые демонстрируют хорошее согласование рассчитанных и экспериментальных зависимостей во всём диапазоне изменения потоков. Подобное совпадение было получено также и для двух других рассмотренных сред.

Отметим некоторые качественные особенности полученного решения. Как видно из рис. 5, по мере стремления θ_0 к нулю, зависимость $\theta_{\text{tip}}(q)$ стремится к некоторому пределу. С другой стороны, с ростом θ_0 кривая $\theta_{\text{tip}}(q)$ смещается в область больших q , разница между $\theta_{\text{tip}}(q)$ и $\theta_{\text{tail}}(q)$ уменьшается, и окончательно исчезает при $\theta_0 \approx 0,02$. Подобное поведение было выявлено и в экспериментах.

При значении начальной насыщенности $\theta_0 = 0,01$ расчётная кривая демонстрирует удовлетворительное согласование с экспериментом; незначительное расхождение графиков может быть объяснено различием метода подготовки исходной экспериментальной среды.

Заключение

Рассмотренная в настоящей работе релаксационная модификация модели Ричардса демонстрирует потенциальную возможность генерировать немонотонные профили насыщенности в процессе гравитационной пропитки и, как следствие, описывать неустойчивость фронтов пропитки. Собственно этот результат сам по себе не является неожиданным. Более важным является параметрическое наполнение релаксационной модели и её полная верификация по данным лабораторных экспериментов. Результат данной работы поз-

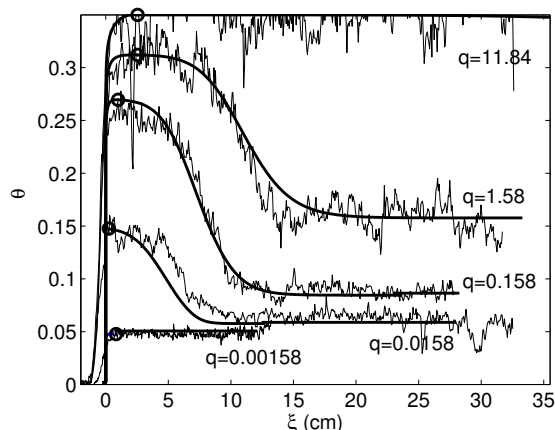


Рис. 4. Сравнение расчётных профилей насыщенности с экспериментальными данными для песка 20/30 для различных значений расхода при $\theta_0 = 0,002$. Маркеры соответствуют значениям θ_{tip}

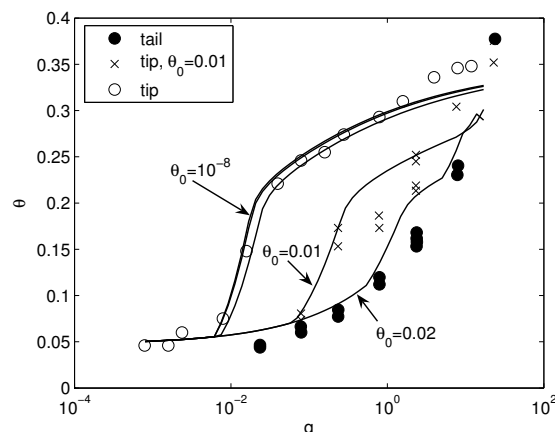


Рис. 5. Сравнение расчётной зависимости насыщенности в хвосте и голове пальца от потока влаги с экспериментальными данными для песка 20/30

воляет перейти от теоретических построений к практическому использованию релаксационных моделей.

Тем не менее, нельзя не признать, что верификация модели только на основании информации о распределении влагонасыщенности в пористой среде является не полной. Для полноты картины необходимо также иметь данные о распределении давления. Однако процедура его измерения в процессе быстрой пропитки сталкивается с известными затруднениями, связанными с инерционностью лабораторных датчиков. Тем более не решённой остаётся и задача прямого измерения коэффициента релаксации τ . Таким образом, вопрос окончательного принятия релаксационной модификации модели Ричардса требует дополнительной работы, главным образом экспериментального характера.

Литература

1. Otto F. L^1 -contraction and uniqueness for unstationary saturated-unsaturated water flow in porous media // Adv. Math. Sci. Appl. 1997. Vol. 7. P. 537–553.
2. Egorov A., Dautov R., Nieber J., Sheshukov A. Stability analysis of gravity-driven infiltrating flow // Water Resour. Res. 2003. Vol. 36. No 6. P. 1266–1278.
3. Alt W., Luckhaus S., Visintin A. On nonstationary flow through porous media // Ann. Math. Pura Appl. 1984. Vol. 136. P. 303–316.
4. DiCarlo D. A. Experimental measurements of saturation overshoot on infiltration // Water Resour. Res. 2004. Vol. 40. No. 4. P. W042151–W042159.
5. DiCarlo D. A. Modeling observed saturation overshoot with continuum additions to standard unsaturated theory // Advances in Water Resources. 2005. Vol. 28. P. 1021–1027.
6. Glass R. J., Steenhuis T. S., Parlange J.-Y. Mechanism for finger persistence in homogenous unsaturated, porous media: Theory and verification // Soil Sci. 1989. Vol. 148, P. 60–70.
7. Selker J. S., Parlange J.-Y., Steenhuis T. S. Fingered flow in two dimensions: 2. Predicting finger moisture profile // Water Resour. Res. 1992. Vol. 28. P. 2523–2528.
8. Liu Y., Steenhuis T. S., Parlange J.-Y. Formation and persistence of fingered flow fields in coarse grained soils under different moisture contents // J. Hydrol. 1994. Vol. 159, P. 187–195.
9. Hassanizadeh S. M., Celia M. A., Dahle H. K. Dynamic effect in the capillary pressure-saturation relationship and its impacts on unsaturated flow // Vadose Zone J. 2002. No. 1. P. 28–57.
10. Cuesta C., van Duijn C. J., Hulshof J. Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: travelling waves // Euro. Jnl of Appl. Math. 2000. Vol. 11. P. 381–397.
11. Dautov R., Egorov A., Nieber J., Sheshukov A. Simulation of two-dimensional gravity-driven unstable flow // Proc. 14th Int. Conf. on Comp. Meth. in Wat. Resour. (Delft, The Netherlands). 2002. Vol. 1. P. 9–16.
12. Nieber J., Dautov R., Egorov A., Sheshukov A. Dynamic Capillary Pressure Mechanism for

- Instability in Gravity-Driven Flows; Review and Extension to Very Dry Conditions // *Transport in Porous Media*. 2005. Vol. 58. P. 147–172.
13. *Schroth M. H., Ahearn S. J., Selker J. S., Istok J. D.* Characterization of Miller-similar silica sands for laboratory hydraulic studies // *Soil Sci. Soc. Am. J.* 1996. Vol. 60. P. 1331–1339.
14. *Mualem Y.* A conceptual model of hysteresis // *Water Resour. Res.* 1974. Vol. 10. P. 514–520.
15. *Beliaev A. Y., Hassanizadeh S. M.* A theoretical model of hysteresis and dynamic effects in the capillary relation for two-phase flow in porous media // *Transp. Porous Med.* 2001. Vol. 43. P. 487–510.
16. *Bauters T. W. J., DiCarlo D. A., Steenhuis T. S., Parlange J.-Y.* Soil water content dependent wetting front characteristics in sands // *Journal of Hydrology*. 2000. Vol. 231–232. P. 244–254.
17. *van Genuchten M. T.* A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // *Soil Sci. Soc. Am. J.* 1980. Vol. 44. P. 892–898.
18. *Егоров А. Г., Гоголашвили Б. Э.* Вычисление гидравлических функций на решётчатой модели пористой среды в приближении среднего поля // *Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2005. Т. 147. Кн. 3. С. 57–74.

Статья поступила 18 июля 2007 г.

Казанский государственный университет, г. Казань

© Гоголашвили Б. Э., Даутов Р. З., Егоров А. Г., 2007