

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ С ТРЕНИЕМ
НА ГРАНИЦЕДроботенко М. И.¹

PROBLEM OF FILTRATIONAL CONSOLIDATION WITH FRICTION ON THE BOUNDARY

Drobotenko M. I.

The correctness of the problem of filtrational consolidation with friction on the boundary is investigated.

Фильтрационной консолидацией называют процессы деформирования насыщенной пористой среды и фильтрации насыщающей ее жидкости. Для описания этих процессов используются различные математические модели [1, 3]. Модель, предложенная в [3], позволяет представить задачу фильтрационной консолидации в виде задачи Коши для операторного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором, определяемым выпуклой вариационной задачей. Это, в свою очередь, позволило получить важные для теории фильтрационной консолидации результаты о корректности математической модели и построить новые приближенные методы ее решения. Для задач с классическими граничными условиями такие результаты были получены в [4, 5], в настоящей работе исследуется корректность задачи фильтрационной консолидации с граничными условиями типа трения.

1. Случай заданного нормального
напряжения

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу фильтрационной консолидации (задачу А): в области $\Omega \subset R^m$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u \cup \Gamma_\mu = \Gamma_p \cup \Gamma_q$, $\Gamma_u \neq \emptyset$, $\Gamma_\mu \neq \emptyset$, найти функцию $u(t, x)$, которая вместе с некоторыми функциями $p(t, x)$ и $q(t, x)$ удовлетво-

ряет следующим уравнениям, граничным и начальным условиям.

Уравнение движения в безынерционном виде без учета массовых сил

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (1.1)$$

Реологическое соотношение типа Кельвина-Фойгта

$$\sigma = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}. \quad (1.2)$$

Закон фильтрации насыщающей жидкости

$$-\nabla p = f(\theta, |q|) \frac{q}{|q|}. \quad (1.3)$$

Условие неразрывности

$$\operatorname{div} q + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \quad (1.4)$$

Граничные условия для пористой среды:

$$\sigma_{ij} n_j - p n_i = \pi_i, \quad x \in \Gamma_\sigma. \quad (1.5)$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma_u; \quad (1.6)$$

$$\sigma_n = s_n, \quad x \in \Gamma_\mu; \quad (1.7)$$

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_\tau| &\leq q\mu|\sigma_n|, \quad x \in \Gamma_\mu, \\ \text{при этом, если} \\ |\sigma_\tau| &< \mu|\sigma_n|, \quad \text{то } v_\tau = 0; \\ |\sigma_\tau| &= \mu|\sigma_n|, \quad \text{то } v_\tau = -\lambda\sigma_\tau \\ &\text{для некоторого } \lambda \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Граничные условия для насыщающей жидкости:

$$p = p_0, \quad x \in \Gamma_p; \quad (1.9)$$

¹Дроботенко Михаил Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры численного анализа Кубанского государственного университета.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_q. \quad (1.10)$$

Начальное условие имеет вид

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.11)$$

Здесь $i, j = \overline{1, m}$, при этом производится суммирование по повторяющимся индексам; u — вектор макроперемещений пористой среды; $v = \partial u / \partial t$, $\theta = \operatorname{div} u$; σ, ε, e — соответственно тензоры напряжений, деформаций и скоростей деформации пористой среды; q, p — скорость фильтрации и давление жидкости; $F(\varepsilon), \varphi(\varepsilon, e)$ — упругий и диссипативный потенциалы; $f(\theta, \eta)$ задает закон фильтрации; $s_n = s_n(x)$ — заданное нормальное напряжение на Γ_μ ; $\mu = \mu(x)$ — коэффициент трения; $2\varepsilon = (\nabla u + (\nabla u)^T)$, $e = \partial \varepsilon / \partial t$; n — внешняя нормаль к границе $\partial \Omega$; $u_n = u_i n_i$, $u_\tau = u - u_n n$; $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$, $\sigma_\tau = (\sigma_{\tau i})$, $\sigma_{\tau i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i$.

Замечание. Граничные условия (1.7), (1.8) — это так называемые условия с трением по закону Кулона с заданным нормальным напряжением s_n [6].

1.2. Обозначения и вспомогательные результаты

Введем необходимые в дальнейшем обозначения

$$(x, y) = x_i y_i, \quad \langle \xi, \eta \rangle = \xi_{ij} \eta_{ij}, \quad |x|^2 = (x, x),$$

$$L = L_2(\Omega), \quad V = \left(W_2^1(\Omega) \right)^m,$$

$$Y = \left(L_2(\Gamma_\sigma) \right)^m, \quad X = L_2(\Gamma_p),$$

$$E = \left\{ e = (e_{ij})_{i,j=1}^m : e_{ij} \in L_2(\Omega), \right.$$

$$\left. \|e\|_E^2 = \int_\Omega \langle e, e \rangle dx \right\},$$

$$V_0 = \left\{ v \in V : v = 0, \quad x \in \Gamma_u \right\},$$

$$C = C([0, T], V_0), \quad C^1 = C^1([0, T], V_0),$$

$$W = \left\{ q = (q_i)_{i=1}^m : q_i, \quad \operatorname{div} q \in L, \right.$$

$$\left. \|q\|_W^2 = \int_\Omega ((q, q) + (\operatorname{div} q)^2) dx \right\}.$$

Пространство W полно и для $q \in W$ имеет смысл значение нормальной компоненты $q_n = (q, n)$ на $\partial \Omega$ [7]

$$W_0 = \left\{ q \in W : q_n = 0, \quad x \in \Gamma_q \right\},$$

$$M = \left\{ (v, q) : v \in V_0, \quad q \in W_0, \right.$$

$$\left. \operatorname{div} v + \operatorname{div} q = 0 \right\},$$

$$\partial_e \varphi = (\partial \varphi / \partial e_{ij})_{i,j=1}^m, \quad \partial_\varepsilon F = (\partial F / \partial \varepsilon_{ij})_{i,j=1}^m.$$

Будем считать, что $F(\varepsilon), \varphi(\varepsilon, e), f(\theta, \eta), \pi(t), p_0(t), s_n(x), \mu(x)$ и u_0 удовлетворяют следующим условиям:

2.1. Функция $\varphi : E \times E \rightarrow L$ конечна и дифференцируема по e для любых $\varepsilon \in E$;

2.2. Функционал $\int_\Omega \varphi(\varepsilon, e) dx$ сильно выпуклый по e для любого $\varepsilon \in E$;

2.3. Функция $F : E \rightarrow L$ конечна и дифференцируема по ε ;

2.4. Функция f такова, что $\int_0^\xi f(\theta, \eta) d\eta \in L$ для любых $\theta \in L, \xi \geq 0$;

2.5. Функционал $\int_\Omega \int_0^{|\eta|} f(\theta, \eta) d\eta dx$ сильно выпуклый по $q \in W$ для любого $\theta \in L$.

2.6. Существует такое $K > 0$, что:

Для любых $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^1, \varepsilon^2 \in E, e \in [e^1, e^2]$ почти всюду на Ω выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |\langle \partial_e \varphi(\varepsilon^2, e) - \partial_e \varphi(\varepsilon^1, e), e^2 - e^1 \rangle| &\leq \\ &\leq K |\langle \varepsilon^2 - \varepsilon^1, e^2 - e^1 \rangle|; \end{aligned}$$

2.7. Для любых $\varepsilon^1, \varepsilon^2, e \in E$ почти всюду на Ω выполняется неравенство

$$|\langle \partial_\varepsilon F(\varepsilon^2) - \partial_\varepsilon F(\varepsilon^1), e \rangle| \leq K |\langle \varepsilon^2 - \varepsilon^1, e \rangle|;$$

2.8. Для любых $\theta^1, \theta^2 \in L, \eta \geq 0$ почти всюду на Ω выполняется неравенство

$$|f(\theta^2, \eta) - f(\theta^1, \eta)| \leq K |\theta^2 - \theta^1|;$$

2.9. Функции $p_0(t) \in X, \pi(t) \in Y$ для любого $t \in [0, T]$ и непрерывны по t ;

2.10. $0 \leq s_n \in L_2(\Gamma_\mu)$;

2.11. $0 \leq \mu \in L_\infty(\Gamma_\mu), \|\mu\|_\infty > 0$;

2.12. $u_0 \in V_0$.

Напомним, что функционал g называется сильно выпуклым, если существует такое $k > 0$, что для любых u, v выполняется неравенство

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) + k\|u-v\|^2 \leq \frac{1}{2}g(u) + \frac{1}{2}g(v).$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма [8]

Лемма. Пусть J_1, J_2 — два непрерывных выпуклых функционала на выпуклом замкнутом множестве M , причем, функционал J_1 дифференцируем; тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $J_1(u) + J_2(u) = \inf_{v \in M} \{J_1(v) + J_2(v)\}$,
2. $(J'_1(u), v - u) + J_2(v) - J_2(u) \geq 0$ для любого $v \in M$.

Приведем также равенство, следующее из определения σ_τ и σ_n

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j u_i &= \\ &= (\sigma_\tau, u) + \sigma_n u_n = (\sigma_\tau, u_\tau) + \sigma_n u_n. \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.3. Определение обобщенного решения и его корректность

Функцию $u \in C^1([0, T], (C^2(\bar{\Omega}))^m)$, удовлетворяющую уравнениям (1.1)–(1.4), граничным условиям (1.5)–1.8, (1.9)–(1.10) и начальному условию (1.11) для каждого $t \in [0, T]$ вместе с некоторыми функциями q и p , будем называть классическим решением задачи А.

Дадим определение обобщенного решения задачи А.

Для этого рассмотрим систему (1.1)–(1.11) относительно поля скоростей $\partial u / \partial t(t)$, считая поле перемещений $u(t)$ известным. Предположим, значение $\partial u / \partial t(t)$ при каждом значении $t \in [0, T]$ однозначно определено значениями t и $u(t)$, и эта связь задается оператором G . Тогда систему (1.1)–(1.11) можно рассматривать как задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) = G(t, u(t)), \quad u(0) = u_0. \quad (1.13)$$

Опишем теперь способ отыскания поля скоростей $\partial u / \partial t(t)$ по заданному полю перемещений $u(t)$ и t , то есть определим оператор G .

Пусть u — классическое решение задачи А, q и p — соответствующие ему скорость и давление жидкости. Для $v = \partial u / \partial t(t)$ и произвольных $\delta v \in V_0$, $\delta q \in W_0$ справедливо

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \delta v_i dx + \\ &+ \int_{\Gamma_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - \pi_i - p n_i) \delta v_i d\Gamma + \\ &+ 2 \int_{\Omega} (\operatorname{div} v + \operatorname{div} q) (\operatorname{div} \delta v + \operatorname{div} \delta q) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \left(f(\theta, |q|) \frac{q_i}{|q|} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \delta q_i dx - \\ &- \int_{\Gamma_p} (p - p_0) \delta q_n d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Преобразуем тождество (1.14) к виду

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} dx - \int_{\Gamma_\mu} \sigma_{ij} n_j \delta v_i d\Gamma - \\ &- \int_{\Gamma_\sigma} (\pi, \delta v) d\Gamma + \int_{\Omega} f(\theta, |q|) \frac{q_i}{|q|} \delta q_i dx + \\ &+ 2 \int_{\Omega} (\operatorname{div} v + \operatorname{div} q) (\operatorname{div} \delta v + \operatorname{div} \delta q) dx - \\ &- \int_{\Omega} p (\operatorname{div} \delta v + \operatorname{div} \delta q) dx + \\ &+ \int_{\Gamma_p} p_0 \delta q_n d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь $\Psi(\varepsilon, e) = \varphi(\varepsilon, e) + \langle \partial_\varepsilon F, e \rangle$, $\varepsilon = \varepsilon(u)$, $e = \varepsilon(v)$. Перепишем (1.15) в следующем виде

$$\begin{aligned} I &= (J'_1(t, u, v, q, p), \delta v, \delta q) - \\ &- \int_{\Gamma_\mu} \sigma_{ij} n_j \delta v_i d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} J_1(t, u, v, q, p) &= \int_{\Omega} \Psi dx - \int_{\Gamma_\sigma} (\pi, v) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} \int_0^{|q|} f(\theta, \eta) d\eta dx + \int_{\Gamma_p} p_0 q_n d\Gamma - \\ &- \int_{\Omega} p (\operatorname{div} v + \operatorname{div} q) dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} v + \operatorname{div} q)^2 dx. \end{aligned}$$

Применяя равенство (1.12), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\mu} \sigma_{ij} n_j \delta v_i d\Gamma &= \\ &= \int_{\Gamma_\mu} (\sigma_\tau, \delta v_\tau) d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu} \sigma_n \delta v_n d\Gamma, \end{aligned}$$

поэтому (1.16) можно представить

$$\begin{aligned} I &= (J'_1(t, u, v, q, p), \delta v, \delta q) - \\ &- \int_{\Gamma_\mu} (\sigma_\tau, \delta v_\tau) d\Gamma - \int_{\Gamma_\mu} \sigma_n \delta v_n d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Заметим, что для любой функции $\delta v \in V_0$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} I_1 &= (\sigma_\tau, \delta v_\tau - v_\tau) + \\ &+ \mu |\sigma_n| (|\delta v_\tau| - |v_\tau|) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Действительно, пусть $|\sigma_\tau| < \mu |\sigma_n|$, тогда $v_\tau = 0$ и (1.18) выполняется. В случае $|\sigma_\tau| = \mu |\sigma_n|$ имеем $v_\tau = -\lambda \sigma_\tau$, $\lambda \geq 0$, поэтому

$$\begin{aligned} I_1 &= (\sigma_\tau, \delta v_\tau) + \lambda |\sigma_\tau|^2 + \mu |\sigma_n| |\delta v_\tau| - \\ &- \lambda \mu |\sigma_n| |\sigma_\tau| = (\sigma_\tau, \delta v_\tau) + \mu |\sigma_n| |\delta v_\tau| \geq 0. \end{aligned}$$

Итак, (1.18) доказано.

Подставим в (1.17) вместо δv разность $\delta v - v$, получим

$$(J'_1(t, u, v, q, p), \delta v - v, \delta q) - \int_{\Gamma_\mu} \sigma_n(\delta v_n - v_n) d\Gamma = \int_{\Gamma_\mu} (\sigma_\tau, \delta v_\tau - v_\tau) d\Gamma.$$

С учетом (1.18), из последнего равенства получаем

$$(J'_1(t, u, v, q, p), \delta v - v, \delta q) - \int_{\Gamma_\mu} \sigma_n(\delta v_n - v_n) d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu} \mu |\sigma_n| (|\delta v_\tau| - |v_\tau|) d\Gamma \geq 0. \quad (1.19)$$

Таким образом, для классического решения задачи А функции u и соответствующих ему функций q, p и $v = \partial u / \partial t(t)$ имеет место неравенство (1.19) для любых $\delta v \in V_0$, $\delta q \in W_0$.

Учитывая, что на Γ_μ выполняется условие $\sigma_n = s_n \geq 0$ и обозначая

$$J_2(v) = \int_{\Gamma_\mu} \mu s_n |v_\tau| d\Gamma,$$

перепишем (1.19) в следующем виде:

$$(J'_1(t, u, v, q, p), \delta v - v, \delta q) + J_2(\delta v) - J_2(v) \geq \int_{\Gamma_\mu} s_n(\delta v_n - v_n) d\Gamma. \quad (1.20)$$

Рассмотрим

задачу 1. Пусть заданы t, u, p . Найти такие $v \in V_0$, $q \in W_0$, что для любых $\delta v \in V_0$, $\delta q \in W_0$ выполняется неравенство (1.20).

Введем функционал

$$J = J_1(t, u, v, q, p) + J_2(u) - \int_{\Gamma_\mu} s_n v_n d\Gamma.$$

В силу приведенной леммы задача 1 эквивалентна

задаче 2'. Пусть заданы t, u, p . Найти такие $v \in V_0$, $q \in W_0$, что

$$J(t, u, v, q, p) = \inf_{\delta v \in V_0, \delta q \in W_0} J(t, u, \delta v, \delta q, p).$$

Рассмотрим также

задачу 2. Пусть заданы t, u . Найти такие $(v, q) \in M$, что

$$J(t, u, v, q) = \inf_{(\delta v, \delta q) \in M} J(t, u, \delta v, \delta q).$$

Здесь и в дальнейшем

$$J(t, u, v, q) = J(t, u, v, q, 0).$$

Свойства функционала $J_1(t, u, v, q, 0)$ исследованы в [4, 9]. При выполнении условий 2.1–2.5 этот функционал является сильно выпуклым по v и q . Функционал J_2 выпуклый и непрерывный по v , поэтому $J(t, u, v, q)$ является сильно выпуклым на множестве M , следовательно, задача 2 однозначно разрешима и можно определить оператор $G : [0, T] \times V_0 \rightarrow V_0$ следующим образом:

$$G(t, u(t)) = v,$$

если пара $(v, q) \in M$ является решением задачи 2.

Обобщенным решением задачи А назовем функцию $u \in C^1$, являющуюся решением задачи (1.13) с оператором G , определенным выше.

Исследование корректности задачи А сводится к исследованию свойств оператора G . Так же, как и в [4], [9], можно показать, что при выполнении условий 2.1–2.11 оператор G липшиц-непрерывен по u при $t \in [0, T]$ и непрерывен по t . Поэтому существует единственное обобщенное решение задачи А, которое при этом непрерывно зависит от параметров задачи.

1.4. Связь обобщенного и классического решений задачи А

Установим связь данного выше определения обобщенного решения задачи А с классическим решением этой задачи.

Пусть u — классическое решение, следовательно $u \in C^1$. Покажем, что u удовлетворяет (1.13), тем самым будет доказано, что u является обобщенным решением задачи А.

При построении функционала J было показано, что $v = \partial u / \partial t(t)$ и q удовлетворяют неравенству (1.20), то есть являются решением задачи 1. Поэтому в силу леммы функции v и q являются решением задачи 2'. Из равенства (1.4) следует, что $(v, q) \in M$, поэтому

$$\begin{aligned} J(t, u, v, q) &= J(t, u, v, q, p) = \\ &= \inf_{\delta v \in V_0, \delta q \in W_0} J(t, u, \delta v, \delta q, p) \leq \\ &\leq \inf_{(\delta v, \delta q) \in M} J(t, u, \delta v, \delta q, p) = \\ &= \inf_{(\delta v, \delta q) \in M} J(t, u, \delta v, \delta q). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$J(t, u, v, q) = \inf_{(\delta v, \delta q) \in M} J(t, u, \delta v, \delta q).$$

То есть (v, q) — решение задачи 2, следовательно $v = G(t, u(t))$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь u — обобщенное решение. Это означает, что функция $v = \partial u / \partial t(t) = G(t, u(t))$ вместе с некоторой функцией q , такой что $(v, q) \in M$, есть решение задачи 2.

Так же, как в [9], можно показать, что при некотором p пара (v, q) является решением задачи 2', а в силу эквивалентности задач 1 и 2' — решением задачи 1; поэтому в силу леммы эта пара вместе с некоторым p удовлетворяет неравенству (1.20) для любых $\delta v \in V_0$, $\delta q \in W_0$.

Определим пространство функций

$$V^\infty = \left\{ v \in C^\infty(\Omega), v = 0 \text{ на } \Gamma_u \cup \Gamma_\mu \right\}.$$

Рассмотрим неравенство (1.20) для $\delta v = v \pm \delta v'$, $\delta v' \in V^\infty$. Учитывая, что $\delta v' = 0$ на Γ_μ , имеем $J_2(v \pm \delta v') = J_2(v)$, поэтому

$$\begin{aligned} (J'_1(t, u, v, q, p), \delta v', \delta q) &\geq 0, \\ - (J'_1(t, u, v, q, p), \delta v', \delta q) &\geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из того, что

$$\begin{aligned} (J'_1(t, u, v, q, p), -\delta v', -\delta q) &= \\ = - (J'_1(t, u, v, q, p), \delta v', \delta q). \end{aligned}$$

Следовательно, $(J'_1(t, u, v, q, p), \delta v', \delta q) = 0$ для любых $\delta v' \in V^\infty$, $\delta q \in W_0$, то есть равенство (1.16) выполняется для любых $\delta v' \in V^\infty$, $\delta q \in W_0$.

Преобразовав (1.16) к виду (1.14), получаем, что (1.14) выполняется для любых $\delta v' \in V^\infty$, $\delta q \in W_0$, откуда следует, что обобщенное решение удовлетворяет уравнениям (1.1)–(1.4), граничным условиям (1.5) и (1.9). Граничные условия (1.6), (1.10) выполняются в силу выбора пространств V_0 и W_0 , начальное условие — в силу (1.13).

Покажем, что выполняются граничные условия (1.5³), (1.5⁴).

Как уже было показано выше, для u выполняются уравнения (1.1)–(1.4) и граничные условия (1.5), (1.9). Поэтому для любых $\delta v \in V_0$, $\delta q \in W_0$ выполняется равенство

(1.17), следовательно

$$\begin{aligned} (J'_1(t, u, v, q, p), \delta v, \delta q) &= \\ &= \int_{\Gamma_\mu} (\sigma_\tau, \delta v_\tau) d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu} \sigma_n \delta v_n d\Gamma, \end{aligned}$$

где $\sigma = \partial_\varepsilon F + \partial_\varepsilon \varphi$.

Заменим в последнем равенстве δv на $\delta v - v$ и подставим его левую часть в (1.20), которому обобщенное решение удовлетворяет вследствие эквивалентности задач 1 и 2, получим

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_\mu} (\sigma_\tau, \delta v_\tau - v_\tau) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_\mu} \sigma_n (\delta v_n - v_n) d\Gamma + J_2(\delta v) - J_2(v) \geq \\ &\geq \int_{\Gamma_\mu} s_n (\delta v_n - v_n) d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Заметим, что когда δv пробегает V_0 , δv_n пробегает подпространство H_μ функций из $H^{1/2}(\Gamma)$, принимающих значение 0 на Γ_u . Поэтому для любой функции $\delta v_n \in H_\mu$ функция $\delta v_n n + v_\tau$ принадлежит пространству следов функций из V_0 . Таким образом, в (1.21) в качестве δv_n можно взять произвольную функцию, принадлежащую H_μ , при этом (1.21) принимает вид

$$\int_{\Gamma_\mu} \sigma_n (\delta v_n - v_n) d\Gamma \geq \int_{\Gamma_\mu} s_n (\delta v_n - v_n) d\Gamma$$

для любых $\delta v_n \in H_\mu$. Выбрав теперь $\delta v_n = v_n \pm \delta v'_n$, где $\delta v'_n$ — произвольная функция, принадлежащая H_μ , получаем из последнего неравенства

$$\sigma_n = s_n \text{ на } \Gamma_\mu. \quad (1.22)$$

Покажем, что $|\sigma_\tau| \leq \mu s_n$. Для этого перепишем (1.21) в виде

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_\mu} (\sigma_\tau, \delta v_\tau - v_\tau) d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu} (\sigma_n - s_n) (\delta v_n - v_n) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_\mu} \mu s_n (|\delta v_\tau| - |v_\tau|) d\Gamma \geq 0. \end{aligned}$$

С учетом (1.22) это неравенство принимает вид

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_\mu} (\sigma_\tau, \delta v_\tau - v_\tau) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_\mu} \mu s_n (|\delta v_\tau| - |v_\tau|) d\Gamma \geq 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Положим в (1.23) $\delta v_\tau = 0$ и $\delta v_\tau = 2v_\tau$ на Γ_μ , тогда получим неравенства

$$-\int_{\Gamma_\mu} (\sigma_\tau, v_\tau) d\Gamma - \int_{\Gamma_\mu} \mu s_n |v_\tau| d\Gamma \geq 0,$$

$$\int_{\Gamma_\mu} (\sigma_\tau, v_\tau) d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu} \mu s_n |v_\tau| d\Gamma \geq 0,$$

откуда следует равенство

$$\int_{\Gamma_\mu} (\sigma_\tau, v_\tau) d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu} \mu s_n |v_\tau| d\Gamma = 0. \quad (1.24)$$

С учетом (1.24), из (1.23) следует неравенство

$$\int_{\Gamma_\mu} (\sigma_\tau, \delta v_\tau) d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu} \mu s_n |\delta v_\tau| d\Gamma \geq 0 \quad (1.25)$$

для любых $\delta v \in V_0$.

Выберем последовательность $\delta v^k \in V_0$ таким образом, чтобы $\delta v_\tau^k = -\sigma_\tau + \delta^k$ на Γ_μ , где

$$\int_{\Gamma_\mu} |\delta^k|^2 d\Gamma \rightarrow 0 \quad (1.26)$$

при $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\mu} \left((\sigma_\tau, \delta v_\tau^k) + \mu s_n |\delta v_\tau^k| \right) d\Gamma &\leq \\ &\leq \int_{\Gamma_\mu} \left(-|\sigma_\tau|^2 + (\sigma_\tau, \delta^k) + \right. \\ &\quad \left. + \mu s_n |\sigma_\tau| + \mu s_n |\delta^k| \right) d\Gamma \leq \\ &\leq \int_{\Gamma_\mu} |\sigma_\tau| (\mu s_n - |\sigma_\tau|) d\Gamma + \\ &\quad + \int_{\Gamma_\mu} |\delta^k| (|\sigma_\tau| + \mu s_n) d\Gamma = I + \Delta^k. \end{aligned}$$

Пусть $|\sigma_\tau| > \mu s_n$, тогда $I < 0$. В силу условия (1.26) можно выбрать такое k , что $I + \Delta^k < 0$, то есть

$$\int_{\Gamma_\mu} \left((\sigma_\tau, \delta v_\tau^k) + \mu s_n |\delta v_\tau^k| \right) d\Gamma < 0.$$

Это противоречит (1.25).

Предположение о том, что $|\sigma_\tau| > \mu s_n$, привело к противоречию, поэтому имеет место неравенство

$$|\sigma_\tau| \leq \mu s_n = \mu |\sigma_n| \text{ на } \Gamma_\mu.$$

Рассмотрим теперь две ситуации:

1. $|\sigma_\tau| < \mu s_n$ и

2. $|\sigma_\tau| = \mu s_n$.

В первом случае

$$(\sigma_\tau, v_\tau) \leq |\sigma_\tau| |v_\tau| < \mu s_n |v_\tau|,$$

поэтому равенство (1.24) выполняется только в случае $v_\tau = 0$ на Γ_μ .

Во втором случае

$$(\sigma_\tau, v_\tau) \leq |\sigma_\tau| |v_\tau| = \mu s_n |v_\tau|,$$

поэтому (1.24) выполняется при условии $-(\sigma_\tau, v_\tau) = |\sigma_\tau| |v_\tau|$, то есть либо в случае $v_\tau = 0$, либо $v_\tau = -\lambda \sigma_\tau$, $\lambda > 0$. Эти два случая можно объединить в один: существует такое $\lambda \geq 0$, что $v_\tau = -\lambda \sigma_\tau$.

Этим завершается доказательство того, что обобщенное решение u удовлетворяет (1.7), (1.8), тем самым являясь классическим решением задачи А.

2. Случай заданного нормального перемещения

2.1. Постановка задачи

Задачей В будем называть задачу нахождения функции $u(t, x)$, которая вместе с некоторыми функциями $p(t, x)$ и $q(t, x)$ удовлетворяет уравнениям (1.1)–(1.4), граничным условиям (1.5), (1.6), (1.8), (1.9), (1.10), начальному условию (1.11) и следующему граничному условию

$$u_n = 0, \quad x \in \Gamma_\mu. \quad (2.1)$$

Замечание. Граничные условия (2.1), (1.8) — это так называемые условия с трением по закону Кулона с заданным нормальным перемещением [6].

2.2. Вспомогательная задача

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу (задачу С): найти функцию u_g , которая вместе с некоторыми функциями p и q удовлетворяет уравнениям (1.1)–(1.4), граничным условиям (1.5), (1.6), (2.1), (1.9), (1.10) и начальному условию (1.11), а также граничному условию

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_\tau| &\leq q\mu g, \quad x \in \Gamma_\mu; \\ \text{при этом, если} \\ |\sigma_\tau| &< \mu g, \text{ то } v_\tau = 0; \\ |\sigma_\tau| &= \mu g, \text{ то } v_\tau = -\lambda \sigma_\tau \\ &\text{для некоторого } \lambda \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Здесь $g = g(t, x)$ — заданная на Γ_μ функция.

Введем пространства функций

$$V_1 = \left\{ v \in V_0 : v_n = 0, \quad x \in \Gamma_\mu \right\},$$

$$L_\mu = L_2(\Gamma_\mu), \quad C_\mu = C([0, T], L_\mu),$$

$$C_1 = C([0, T], V_1), \quad C_1^1 = C^1([0, T], V_1)$$

и множество

$$M_1 = \left\{ (v, q) : v \in V_1, q \in W_0, \operatorname{div} v + \operatorname{div} q = 0 \right\}.$$

Будем считать, что выполняются условия 2.1–2.7, 2.9, 2.11, 2.12 и условия:

6.1. Функция φ такова, что для любых $\varepsilon^2, \varepsilon^1, e^2, e^1 \in E, e \in [e^1, e^2]$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \langle \partial_e \varphi(e^2, \varepsilon^2) - \partial_e \varphi(e^1, \varepsilon^1), e \rangle &\leq \\ &\leq K |\langle e^2 - e^1, e \rangle + \langle \varepsilon^2 - \varepsilon^1, e \rangle|; \end{aligned}$$

6.2. $0 \leq g \in C_\mu$.

Определим функционалы

$$\begin{aligned} J_1(t, u, v, q, p) &= \int_\Omega \Psi dx - \int_{\Gamma_\sigma} (\pi, v) d\Gamma + \\ &+ \int_\Omega \int_0^{|q|} f(\eta) d\eta dx + \int_{\Gamma_p} p_0 q_n d\Gamma - \\ &- \int_\Omega p(\operatorname{div} v + \operatorname{div} q) dx + \int_\Omega (\operatorname{div} v + \operatorname{div} q)^2 dx, \end{aligned}$$

$$J_g(t, v) = \int_{\Gamma_\mu} \mu g(t) |v_\tau| d\Gamma,$$

$$J(t, u, v, q, p) = J_1(t, u, v, q, p) + J_g(t, v),$$

$$J(t, u, v, q) = J(t, u, v, q, 0).$$

Рассмотрим следующую

задачу 3. Пусть заданы $t \in [0, T], u \in V_1$. Найти такие $(v, q) \in M_1$, что

$$J(t, u, v, q) = \inf_{(\delta v, \delta q) \in M_1} J(t, u, \delta v, \delta q).$$

Поскольку функционал $J(t, u, v, q)$ — сильно выпуклый по v и q (это было показано при исследовании задачи А), то задача 3 имеет единственное решение, поэтому можно определить оператор $G_g : [0, T] \times V_1 \rightarrow V_1$ следующим образом:

$$G_g(t, u(t)) = v,$$

если $(v, q) \in M_1$ является решением задачи 3.

Обобщенным решением задачи С назовем такую функцию $u \in C_1^1$, которая является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) = G_g(t, u(t)), \quad u(0) = u_0.$$

Корректность задачи С доказывается аналогично тому, как это делалось для задачи А.

2.3. Исследование задачи В

Обобщенным решением задачи В назовем такое решение u_g задачи С, для которого на Γ_μ выполняется равенство

$$g = \sigma_n(u_g).$$

Обозначим зависимость обобщенного решения задачи С от функции g через U , то есть $u_g = U(g)$.

Пусть $g_0 \in L_\mu$ — некоторая функция. Определим последовательность

$$g_{k+1} = \sigma_n(u_{g_k}) = \sigma_n(U(g_k)), \quad k = 0, 1, \dots$$

Покажем, что при некоторых значениях параметра μ имеет место сходимость $g_k \rightarrow g$ при $k \rightarrow \infty$, где g — неподвижная точка отображения $\sigma_n U$, то есть

$$g = \sigma_n(U(g)).$$

Для этого покажем, что отображение $\sigma_n U$ является сжимающим при некоторых значениях параметра μ .

Докажем вначале липшиц-непрерывность отображения U , то есть покажем, что для любых $g^1, g^2 \in C_\mu$ выполняется неравенство

$$\|u^2 - u^1\|_{C_1^1} \leq c \|g^2 - g^1\|_{C_\mu},$$

где u^i — решение задачи С, зависящее от g^i , $i = 1, 2$.

Доказательство. Пусть $t \in [0, T]$. Обозначим через v^i, q^i — решение задачи 3, зависящее от u^i, g^i , $i = 1, 2$. Так как функционал J сильно выпуклый, то имеют место неравенства [9].

$$\begin{aligned} k (\|v^2 - v^1\|_V + \|q^2 - q^1\|_W)^2 &\leq \\ &\leq J_1(t, u^2, v^1, q^1) - J_1(t, u^2, v^2, q^2) + \\ &+ J_{g^2}(t, v^1) - J_{g^2}(t, v^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k (\|v^2 - v^1\|_V + \|q^2 - q^1\|_W)^2 &\leq \\ &\leq J_1(t, u^1, v^2, q^2) - J_1(t, u^1, v^1, q^1) + \\ &+ J_{g^1}(t, v^2) - J_{g^1}(t, v^1). \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\begin{aligned} 2k (\|v^2 - v^1\|_V + \|q^2 - q^1\|_W)^2 &\leq \\ &\leq J_1(t, u^2, v^1, q^1) - J_1(t, u^2, v^2, q^2) + \\ &+ J_1(t, u^1, v^2, q^2) - J_1(t, u^1, v^1, q^1) + \\ &+ J_{g^2}(t, v^1) - J_{g^2}(t, v^2) + \\ &+ J_{g^1}(t, v^2) - J_{g^1}(t, v^1). \quad (2.3) \end{aligned}$$

Оценим сверху правую часть этого неравенства. Слагаемые, содержащие J_1 , оцениваются величиной [9]

$$c_1 (\|v^2 - v^1\|_V + \|q^2 - q^1\|_W) \|u^2 - u^1\|_V,$$

а слагаемые, содержащие J_g , оцениваем сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\mu} \mu(g^2 - g^1) (|v_\tau^1| - |v_\tau^2|) d\Gamma &\leq \\ &\leq c_2 \|\mu\|_\infty \|g^2 - g^1\|_{L_\mu} \|v^2 - v^1\|_V. \end{aligned}$$

Поэтому из (2.3) получаем для любого t , что

$$\begin{aligned} \|v^2 - v^1\|_V &\leq \\ &\leq c_3 (\|u^2(t) - u^1(t)\|_V + \\ &\quad + \|\mu\|_\infty \|g^2(t) - g^1(t)\|_{L_\mu}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для обобщенного решения u_g справедливо представление [5]

$$u_g(t) = u_0 + \int_0^t G_g(s, u_g(s)) ds,$$

поэтому с учетом (2.4) получим

$$\begin{aligned} \|u^2(t) - u^1(t)\|_V &\leq \\ &\leq c_4 \left(\int_0^t \|u^2(s) - u^1(s)\|_V ds + \right. \\ &\quad \left. + \|\mu\|_\infty \int_0^t \|g^2(s) - g^1(s)\|_{L_\mu} ds \right). \end{aligned}$$

Применяя лемму Гронуолла [7], из последнего неравенства следует

$$\|u^2 - u^1\|_C \leq c_5 \|\mu\|_\infty \|g^2 - g^1\|_{C_\mu}. \quad (2.5)$$

Так как $v^i = \partial u^i / \partial t(t)$, $i = 1, 2$, то из (2.4), (2.5) получаем

$$\|u^2 - u^1\|_{C_1^1} \leq c_6 \|\mu\|_\infty \|g^2 - g^1\|_{C_\mu}, \quad (2.6)$$

что и доказывает липшиц-непрерывность отображения U .

Осталось показать, что

$$\|\sigma_n(u^2) - \sigma_n(u^1)\|_{C_\mu} \leq c_7 \|u^2 - u^1\|_{C_1^1}.$$

Действительно, для любого $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(u^2) - \sigma_n(u^1)\|_{L_\mu} &= \\ &= \|(\sigma(u^2) - \sigma(u^1))_n\|_{L_\mu} \leq \\ &\leq c_8 \|\sigma(u^2) - \sigma(u^1)\|_E. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Далее, в силу 2.7 и 6.1 получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \langle \sigma(u^2) - \sigma(u^1), e \rangle dx \right| &\leq \\ &\leq \left| \int_\Omega \langle \partial_\varepsilon F(\varepsilon^2) - \partial_\varepsilon F(\varepsilon^1), e \rangle dx \right| + \\ &+ \left| \int_\Omega \langle \partial_e \varphi(e^2, \varepsilon^2) - \partial_e \varphi(e^1, \varepsilon^1), e \rangle dx \right| \leq \\ &\leq K \|\varepsilon^2 - \varepsilon^1\|_E \|e\|_E + \\ &+ K (\|e^2 - e^1\|_E + \|\varepsilon^2 - \varepsilon^1\|_E) \|e\|_E. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \langle \sigma(u^2) - \sigma(u^1), e \rangle dx \right| \|e\|_E^{-1} &\leq \\ &\leq 2K (\|\varepsilon^2 - \varepsilon^1\|_E + \|e^2 - e^1\|_E) \leq \\ &\leq c_9 \|u^2 - u^1\|_{C_1^1}. \end{aligned}$$

Тогда, для любого t

$$\|\sigma(u^2) - \sigma(u^1)\|_E \leq c_9 \|u^2 - u^1\|_{C_1^1},$$

откуда с учетом (2.7) следует

$$\|\sigma_n(u^2) - \sigma_n(u^1)\|_{L_\mu} \leq c_{10} \|u^2 - u^1\|_{C_1^1},$$

поэтому

$$\|\sigma_n(u^2) - \sigma_n(u^1)\|_{C_\mu} \leq c_{10} \|u^2 - u^1\|_{C_1^1}.$$

Объединяя полученное неравенство с (2.6), будем иметь

$$\|(\sigma_n U)g^2 - (\sigma_n U)g^1\|_{C_\mu} \leq c_{11} \|\mu\|_\infty \|g^2 - g^1\|_{C_\mu}.$$

Выбрав $\mu_0 = 1/c_{11}$, получим для всех таких μ , что $\|\mu\|_\infty < \mu_0$ искомое неравенство

$$\|(\sigma_n U)g^2 - (\sigma_n U)g^1\|_{C_\mu} \leq \gamma \|g^2 - g^1\|_{C_\mu},$$

где $\gamma < 1$. Таким образом, при достаточно малом коэффициенте трения μ задача В имеет обобщенное решение. В силу единственности неподвижной точки g и единственности соответствующей этой функции обобщенного решения задачи С получаем, что обобщенное решение задачи В — единственно. Поскольку оно является обобщенным решением некоторой задачи С, оно непрерывно зависит от параметров.

Замечание 1. При доказательстве разрешимости задачи В фактически указан способ

ее решения, состоящий в построении последовательности $\{g_k\}$ и решении соответствующей задачи S .

Замечание 2. Аналогичный результат можно получить для сред с долговременной памятью, если реологическое соотношение Кельвина-Фойгта (1.2) заменить соотношением Максвелла [5].

Замечание 3. Задачи с граничными условиями, учитывающими трение, были впервые изучены Дюво и Лионсом применительно к теории контакта упругих тел. В [6] даны вариационные постановки задач с трением, в некоторых случаях доказана их разрешимость (в том числе, в случае заданного нормального напряжения). Разрешимость контактной задачи с трением в случае заданного нормального перемещения изучена в [10].

Литература

1. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1982. 232 с.
2. Ширинкулов Т. Ш., Зарецкий Ю. К. Ползучесть и консолидация грунтов. Ташкент: Фан, 1986. 392 с.
3. Егоров А. Г., Костерин А. В., Скворцов Э. В. Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. Казань: Изд-во КГУ, 1990. 104 с.
4. Дроботенко М. И., Костерин А. В. Обобщенное решение задачи фильтрационной консолидации // ДАН. 1996. Т. 350, № 5. С. 619–621.
5. Дроботенко М. И. Задача фильтрационной консолидации для сред с долговременной памятью // ЖВММФ. 1998. Т. 38. № 2. С. 330–336.
6. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Мир, 1980. 384 с.
7. Темам Р. Уравнение Навье-Стокса. М.: Мир, 1981. 408 с.
8. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 400 с.
9. Дроботенко М. И., Костерин А. В. Исследование фильтрационной консолидации путем сведения к задаче Коши для смещений скелета. Препринт. Казань: Изд-во КГУ, 1991. 34 с.
10. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986. 272 с.

Статья поступила 30 января 2007 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Дроботенко М. И., 2007