

М Е Х А Н И К А

УДК 539.3

ДВИЖЕНИЕ БАНДАЖА И ВКЛАДЫША С ОСТРЫМИ И ГЛАДКИМИ
КРАЯМИ ПО ГРАНИЦАМ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРА
И ПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ¹*Александров В. М.², Марк А. В.³*MOTION OF A BANDAGE AND AN INLAY WITH ACUTE AND SMOOTH EDGES
ON THE BOUNDARY BETWEEN VISCOELASTIC CYLINDER AND DOMAIN WITH
A CYLINDRICAL CAVITY*Aleksandrov V. M., Mark A. V.*

We consider a contact problem about the interaction of the rigid bandage and inlay and boundaries of the viscoelastic cylinder and domain with a cylindrical cavity. It is assumed that the bandage and inlay move over the boundaries at a constant velocity. Friction in the zone of contact is neglected. At the first stage we determine displacement of the boundaries of the viscoelastic cylinder and the domain with a cylindrical cavity as a function of applied normal load. At the second stage the integral equation of the contact problem for the contact pressure is derived. At the thirist stage integral equation is solved approximately using the Multopp – Kalandia method for the bandage and inlay with acute edges, and in the case when the bandage and inlay have smooth edges we use one of the modifications of the method of orthogonal polynomials.

Рассмотрена контактная задача о взаимодействии жестких бандаж и вкладыша с границами вязкоупругих цилиндра, свойства которого описываются моделью Кельвина [1], и пространства с цилиндрической полостью. Предполагается, что бандаж и вкладыш движутся с постоянной скоростью по указанным границам. Трением в области контакта пренебрегаем. На первом этапе определяется перемещение границ цилиндра и пространства с цилиндрической полостью от приложенных нормальных нагрузок. Затем на втором этапе выводится интегральное уравнение собственно контактной задачи для определения контактного давления. На третьем этапе строится приближенное решение указанного интегрального уравнения модифицированным методом Мультиппа-Каландии для бандаж и вкладыша с острыми краями, а для бандаж и вкла-

дыша с гладкими краями — одной из модификаций метода ортогональных многочленов.

1. Решение вспомогательной задачи

Рассмотрим вначале задачу о движении жесткого бандаж с постоянной скоростью по границе бесконечного вязкоупругого цилиндра радиуса R . Выведем зависимость между перемещением и давлением на границе цилиндра (рис. 1а).

Рассмотрим вначале упругую задачу. Будем использовать цилиндрическую систему координат, связанную с декартовой следующим образом:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-01-00003, 06-01-00022, 06-08-01595, 07-08-00730).

²Александров Виктор Михайлович, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института проблем механики РАН.

³Марк Александр Викторович, аспирант лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики РАН.

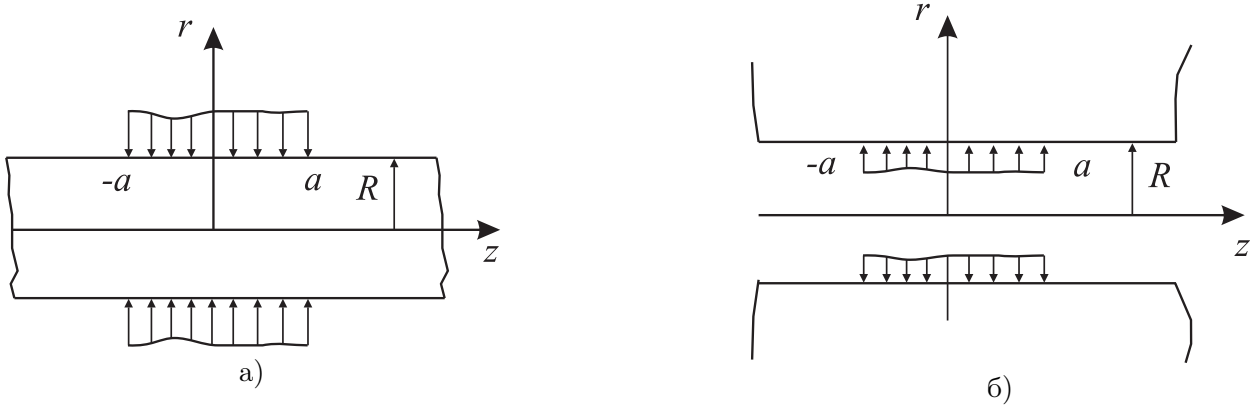


Рис. 1

Запишем геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

физические соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G\varepsilon_{rr} + \varkappa\vartheta, & \sigma_{\varphi\varphi} &= 2G\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varkappa\vartheta, \\ \sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_{zz} + \varkappa\vartheta, & \sigma_{r\varphi} &= G\varepsilon_{r\varphi}, \\ \sigma_{rz} &= G\varepsilon_{rz}, & \sigma_{\varphi z} &= G\varepsilon_{\varphi z}, \\ \varkappa &= 2G\nu/(1-2\nu), \end{aligned} \quad (1.3)$$

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь введены следующие обозначения: u, v, w — компоненты перемещения по направлениям r, φ, z ; $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{rz}$ — компоненты напряжений; $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{r\varphi}, \varepsilon_{\varphi z}, \varepsilon_{rz}$ — компоненты деформации; G и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона.

Подставляя геометрические соотношения в физические, а затем в уравнения равновесия, получим уравнения Ламе

$$2(1-\nu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (1-2\nu) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad (1.5)$$

где вектор $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(R, \varphi, z) &= 0, & \sigma_{r\varphi}(R, \varphi, z) &= 0, \\ \sigma_{rr}(R, \varphi, z) &= -q(z, \varphi) \quad (|z| \leq a), \\ \sigma_{rr}(R, \varphi, z) &= 0 \quad (|z| > a). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Решение уравнений Ламе ищем в форме интеграла Фурье по z и в виде ряда по φ

$$\mathbf{u} = e^{-i\beta\varphi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\alpha, r) e^{-i\alpha z} d\alpha. \quad (1.7)$$

При этом

$$q(z, \varphi) = e^{-i\beta\varphi} q_{\beta}(z),$$

$$q_{\beta}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha, \quad (1.8)$$

$$Q(\alpha) = \int_{-a}^a q_{\beta}(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi.$$

Решая систему (1.5) с граничными условиями (1.6), учитывая (1.8), а также тот факт, что напряжения при $r = 0$ ограничены и при $z \rightarrow \infty$ отсутствуют, получим следующее выражение для радиальных перемещений:

$$\begin{aligned} u(R, \varphi, z) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi\theta} e^{-i\beta\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha) \frac{k_{\beta}(s)}{\alpha l_{\beta}(s)} e^{-i\alpha z} d\alpha, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$s = \alpha R, \quad \theta = \frac{G}{1-\nu},$$

где функции $k_{\beta}(s), l_{\beta}(s)$ имеют вид, приведенный в [2].

Подставив функцию $Q(\alpha)$ из (1.8) в (1.9) с учетом свойств функций $k_\beta(s)$, $l_\beta(s)$, при целых значениях β получим зависимость между перемещением и давлением на границе цилиндра

$$u(R, \varphi, z) = -\frac{1}{\pi\theta} e^{-i\beta\varphi} \int_{-a}^a q_\beta(\zeta) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{k_\beta(s)}{s l_\beta(s)} \cos \frac{s}{R} (\zeta - z) ds d\zeta, \quad (1.10)$$

$$z \leq a.$$

Рассмотрим теперь задачу о движении жесткого вкладыша с постоянной скоростью по границе вязкоупругого пространства с цилиндрической полостью радиуса R , которое также описывается моделью Кельвина [1]. Выведем зависимость между перемещением и давлением на границе пространства с цилиндрической полостью (рис. 1б) для упругой задачи.

Уравнения, описывающие деформацию, и граничные условия имеют вид (1.6) и (1.5), но с той разницей, что напряжения при $\sqrt{z^2 + r^2} \rightarrow \infty$ исчезают. Решая (1.6) и (1.5) с учетом (1.7), будем иметь зависимость между перемещением и давлением на границе пространства с цилиндрической полостью

$$u(R, \varphi, z) = \frac{1}{\pi\theta} e^{-i\beta\varphi} \int_{-a}^a q_\beta(\zeta) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{m_\beta(s)}{s n_\beta(s)} \cos \frac{s}{R} (\zeta - z) ds d\zeta, \quad (1.11)$$

$$z \leq a,$$

где функции $m_\beta(s)$, $n_\beta(s)$ имеют вид, приведенный в [2].

При $\beta = 0$ (осесимметричная задача), зависимости (1.10), (1.11) упрощаются ($q_\beta(z) = q(z)$):

$$u(R, z) = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a}^a q(\zeta) K\left(\frac{\zeta - z}{R}\right) d\zeta, \quad (1.12) \\ K\left(\frac{\zeta - z}{R}\right) = \int_0^\infty \frac{L_i(s)}{s} \cos \frac{s}{R} (\zeta - z) ds.$$

Для первой задачи (цилиндра)

$$L_1(s) = s[s^2(\omega_0^2 - 1) - 2(1 - \nu)]^{-1}. \quad (1.13)$$

Для второй задачи (пространства с цилиндрической полостью)

$$L_2(s) = -s[2(1 - \nu) - s^2(\Omega_0^2 - 1)]^{-1}, \quad (1.14)$$

$$\omega_0 = I_0(s)[I_0'(s)]^{-1}, \quad (1.15) \\ \Omega_0 = K_0(s)[K_0'(s)]^{-1}.$$

При упругой постановке задачи выражение для радиальных перемещений имеет вид (1.12). Если цилиндр и пространство с цилиндрической полостью вязкоупругие и нагрузка движется в отрицательном направлении оси Z , то выражение (1.12) приобретает вид [1]

$$u(R, z) = -\frac{1}{\pi\Theta_f} \int_{-a}^a q(\zeta) \left[K\left(\frac{\zeta - z}{R}\right) + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^0 l(-\tau) K\left(\frac{\zeta - z - V\tau}{R}\right) d\tau \right] d\zeta, \quad (1.16)$$

где

$$l(t) = k \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right), \quad k = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{\lambda}\right), \quad (1.17) \\ \Theta_f = \frac{\lambda}{\gamma} \Theta.$$

Здесь V — скорость движения нагрузки (движение рассматривается в цилиндрической системе координат, которая движется вместе с бандажем или вкладышем вдоль оси Z), λ , γ — вязкие постоянные, Θ_f — мгновенная контактная жесткость.

2. Вывод интегрального уравнения

Перейдем теперь к контактной задаче. В ней $u(R, z)$ известно и равно $\mp\delta(z)$. Функция $\delta(z)$ определяется следующим образом:

$$\delta(z) = \pm(R - p(z)),$$

где $p(z)$ — уравнение поверхности бандажа или вкладыша. Знак «−» выбирается в случае задачи о цилиндре, а знак «+» — для задачи о пространстве с цилиндрической полостью.

Введем безразмерные величины и обозначения

$$\begin{aligned}\varphi(z') &= \frac{q(z)}{\Theta_f}, \quad \varepsilon = \frac{R}{a}, \\ \mu &= \frac{\lambda V}{a}, \quad g(z') = \frac{\delta(z)}{a}, \\ z' &= \frac{z}{a}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{a}, \\ \tau' &= \frac{\tau}{\lambda}, \quad w' = \zeta' - z'.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Уравнение (1.7) перепишем в виде (штрихи опущены)

$$\int_{-1}^1 \varphi(\zeta) \left[K_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) + k\lambda K_2\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) \right] d\zeta = \pm \pi g(z), \quad (2.2)$$

$$K_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = \int_0^\infty \frac{L_i(u)}{u} \cos \frac{uw}{\varepsilon} du, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}K_2\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) &= \\ &= \int_{-\infty}^0 e^\tau \int_0^\infty \frac{L_i(u)}{u} \cos u \frac{w - \mu\tau}{\varepsilon} du d\tau.\end{aligned}\quad (2.4)$$

В уравнении (2.2) и далее знак «+» отвечает задаче вдавливания бандажа в границу цилиндра, в противном случае выбирается знак «-».

Выделим в (2.3) логорифмическую часть, пользуясь представлением

$$\ln |t| = \int_0^\infty \frac{e^{-u} - \cos ut}{u} du,$$

получим

$$\begin{aligned}K_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) &= -\ln \left| \frac{w}{\varepsilon} \right| - \\ &- \int_0^\infty \frac{[1 - L_i(u)] \cos \frac{uw}{\varepsilon} - e^{-u}}{u} du.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Преобразуем (2.5)

$$\begin{aligned}K_2\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) &= \int_0^\infty \frac{L_i(u)}{u} \int_{-\infty}^0 e^\tau \times \\ &\times \cos \left(u \frac{w - \mu\tau}{\varepsilon} \right) d\tau du = \\ &= \int_0^\infty \frac{L_i(u)}{u} \frac{\varepsilon^2 \cos \frac{uw}{\varepsilon} - \varepsilon\mu u \sin \frac{uw}{\varepsilon}}{\varepsilon^2 + \mu^2 u^2} du = \\ &= J_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) + J_2\left(\frac{w}{\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

Здесь

$$J_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^2 \int_0^\infty \frac{L_i(u)}{u} \frac{\cos \frac{uw}{\varepsilon}}{\varepsilon^2 + \mu^2 u^2} du, \quad (2.6)$$

$$J_2\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = -\varepsilon\mu \int_0^\infty \frac{L_i(u) \sin \frac{uw}{\varepsilon}}{\varepsilon^2 + \mu^2 u^2} du. \quad (2.7)$$

После преобразований для улучшения сходимости интегралов в (2.7) ядро интегрального уравнения (2.2) представим в виде

$$K(w) = -\ln \left| \frac{w}{\varepsilon} \right| + F(w),$$

$$\begin{aligned}F(w) &= F_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) + \\ &+ k\lambda \left[\sum_{i=2}^3 F_i\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) + F_4(w) \right],\end{aligned}\quad (2.8)$$

где

$$F_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = -\int_0^\infty \frac{[1 - L_i(u)] \cos \frac{uw}{\varepsilon} - e^{-u}}{u} du,$$

$$F_2\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = J_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right),$$

$$F_3\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = \varepsilon\mu \int_0^\infty \frac{[1 - L_i(u)] \sin \left(\frac{uw}{\varepsilon} \right)}{\varepsilon^2 + \mu^2 u^2} du,$$

$$\begin{aligned}F_4(w) &= -\frac{1}{2} \left[\exp \left(-\frac{w}{\mu} \right) \text{Ei} \left(\frac{w}{\mu} \right) - \right. \\ &\left. - \exp \left(\frac{w}{\mu} \right) \text{Ei} \left(-\frac{w}{\mu} \right) \right].\end{aligned}\quad (2.9)$$

Здесь $Ei(x)$ — интегральная показательная функция, представленная в [3].

Итак, имеем уравнение

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) K(w) d\xi = \pm \pi g(x) \quad (2.10)$$

с ядром (2.8).

3. Решение контактной задачи для бандажа и вкладыша с острыми краями

В случае бандажа и вкладыша с острыми краями решение интегрального уравнения (2.10) с ядром (2.8) представимо в виде [3]

$$\varphi(z) = \Phi(z) (1 - z^2)^{-1/2}, \quad (3.1)$$

где $\Phi(z) \in C_n(-1, 1)$ (см. теорему 2.1 из [4]). Для данной задачи

$$g(z) \equiv g.$$

Уравнение (2.10) с ядром (2.8) будем решать модифицированным методом Мультотша–Каландии [4].

Построим для $\Phi(z)$ интерполяционный полином Лагранжа по узлам

$$z_n = \cos \theta_n; \quad \theta_n = \pi(2n - 1)/2N \quad (3.2) \\ (n = 1, 2, \dots, N),$$

являющимися нулями полинома Чебышева $T_N(z)$. Такой многочлен имеет вид

$$\tilde{\Phi}(\vartheta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(\theta_n) \times \\ \times \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \cos m\theta_n \cos m\vartheta \right), \quad (3.3) \\ \tilde{\Phi}(\vartheta) \equiv \Phi(\cos(\vartheta)).$$

Перейдя к новым переменным по формулам $z = \cos \vartheta$, $\zeta = \cos \psi$, запишем уравнение (2.8), (2.10) в форме

$$\int_0^\pi \tilde{\Phi}(\psi) \ln \left| \frac{\cos \psi - \cos \vartheta}{\varepsilon} \right| d\psi = \\ = \pm \pi g - \int_0^\pi \tilde{\Phi}(\psi) F(\cos \psi - \cos \vartheta) d\psi, \quad (3.4)$$

$$\vartheta \in [0, \pi].$$

Подставим (3.3) в последнее уравнение и воспользовавшись соотношением

$$- \int_0^\pi \cos s\psi \ln \left| \frac{\cos \psi - \cos \vartheta}{\varepsilon} \right| d\psi = \\ = \begin{cases} \pi \ln(2\varepsilon), & \text{при } s = 0, \\ \pi s^{-1} \cos s\vartheta, & \text{при } s \neq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

и квадратурной формулой Гаусса

$$\int_0^\pi \chi(\psi) d\psi = \frac{\pi}{N} \sum_{n=1}^N \chi(\vartheta_n), \quad (3.6)$$

перепишем уравнение (3.4) в виде

$$\sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(\theta_n) \left[\ln(2\varepsilon) + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos m\theta_n \cos m\vartheta}{m} \right] = \\ = \pm N g - \sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(\vartheta_n) F(\cos \theta_n - \cos \vartheta).$$

Применим метод коллокации, т.е. приняв $\vartheta = \theta_k$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения $\tilde{\Phi}(\theta_n)$

$$\sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(\theta_n) \left[\ln(2\varepsilon) + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos m\theta_n \cos m\theta_k}{m} + \right. \\ \left. + F(\cos \theta_n - \cos \theta_k) \right] = \pm N g, \quad (3.7) \\ k = 1, 2, \dots, N.$$

4. Решение контактной задачи для бандажа и вкладыша с гладкими краями

Перепишем уравнение (2.8), (2.10) в виде

$$\int_{-1}^1 \varphi(\zeta) [-\ln |\zeta - z| + d] d\zeta = \pi f(z), \quad d = \ln(\varepsilon),$$

$$f(z) = \pm g(z) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\zeta) F(\zeta - z) d\zeta. \quad (4.1)$$

Функция $g(z)$ имеет вид

$$g(z) = g - r(z - c), \quad r(t) = \frac{t^2}{2\rho}. \quad (4.2)$$

Здесь g — разность радиусов бандажа и цилиндра (вкладыша и пространства с цилиндрической полостью), $r(x)$ — функция, описывающая форму основания бандажа или вкладыша, c — величина, отвечающая за смещение области контакта. Так как края у бандажа или вкладыша гладкие, то давление на границе области контакта равно нулю.

Обратим сингулярный оператор в (4.1) при условиях

$$\varphi(\pm 1) = 0. \quad (4.3)$$

Будем иметь уравнение [4]

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{1-z^2} \int_{-1}^1 \frac{f'(\zeta)}{(\zeta-z)\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta, \\ f'(\zeta) &= \pm g'(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) F'(\tau-\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь

$$\frac{dF(\tau-\zeta)}{d\zeta} = -\frac{dF(w)}{dw} = -\frac{k\lambda}{\mu} \ln \left| \frac{w}{\mu} \right| + G(w),$$

$$\begin{aligned} G(w) &= G_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) + \\ &+ k\lambda \left\{ \sum_{i=2}^3 G_i\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) + E\left(\frac{w}{\mu}\right) \right\}, \end{aligned}$$

$$G_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty [1 - L_i(u)] \sin \frac{uw}{\varepsilon} du,$$

$$G_2\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \int_0^\infty \frac{L_i(u)}{\varepsilon^2 + \mu^2 u^2} \sin \left(\frac{uw}{\varepsilon} \right) du,$$

$$G_3\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = -\mu \int_0^\infty \frac{[1 - L_i(u)] u}{\varepsilon^2 + \mu^2 u^2} \cos \left(\frac{uw}{\varepsilon} \right) du,$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{w}{\mu}\right) &= -\frac{1}{2\mu} \left[\exp\left(-\frac{w}{\mu}\right) \operatorname{Ei}\left(\frac{w}{\mu}\right) + \right. \\ &\left. + \exp\left(\frac{w}{\mu}\right) \operatorname{Ei}\left(-\frac{w}{\mu}\right) - 2 \ln \left| \frac{w}{\mu} \right| \right], \end{aligned}$$

где $G(w) \in C(-2, 2)$. Уравнение (4.4) эквивалентно (4.1) при двух дополнительных условиях, записанных в безразмерном виде, заменяющих (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{P}{\Theta_f a} + \int_{-1}^1 \frac{f'(\zeta) \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta, \\ \int_{-1}^1 \frac{f'(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь величина P связана с контактным давлением $q(z)$ соотношением

$$P = \int_{-a}^a q(\zeta) d\zeta. \quad (4.6)$$

К данным условиям нужно добавить связь между величиной P и осадкой g

$$\frac{P}{\Theta_f a} = \frac{1}{\ln 2 + d} \int_{-1}^1 \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta. \quad (4.7)$$

Известно, что $\varphi(z)$ имеет структуру

$$\varphi(z) = \omega(z) \sqrt{1-z^2}, \quad (4.8)$$

где $\omega(z) \in C_n(-1, 1)$ (см. теорему 2.5 из [4]).

Решать уравнение будем в рядах Фурье, что по существу является модификацией метода ортогональных многочленов [4]. Перейдем к новым переменным

$$z = \cos \vartheta, \quad \zeta = \cos \psi, \quad \tau = \cos \theta,$$

тогда (4.4) примет вид

$$\varphi(\cos \vartheta) = -\frac{1}{\pi} \sin \vartheta \int_0^\pi \frac{f'(\cos \psi)}{\cos \psi - \cos \vartheta} d\psi,$$

$$\begin{aligned} f'(\cos \psi) &= \pm g'(\cos \psi) - \frac{1}{\pi} \left[-\frac{k\lambda}{\mu} \times \right. \\ &\times \int_0^\pi \varphi(\cos \theta) \ln \left| \frac{\cos \theta - \cos \psi}{\mu} \right| \sin \theta d\theta + \\ &\left. + \int_0^\pi \varphi(\cos \theta) G(\cos \theta - \cos \psi) \sin \theta d\theta \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Обозначим

$$G(\cos \theta - \cos \psi) \sin \theta = \tilde{G}(\theta, \psi). \quad (4.10)$$

Введем следующие ортонормированные получим системы функций:

$$\begin{aligned} u_k(\vartheta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(k\vartheta), \\ v_0(\vartheta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad v_k(\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k\vartheta), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $k = 1, 2, \dots$, и разложим в ряды $\varphi(\cos \vartheta)$, $g'(\cos \vartheta)$, $\tilde{G}(\theta, \psi)$

$$\begin{aligned} \varphi(\cos \vartheta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(\vartheta), \\ g'(\cos \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n v_n(\vartheta), \\ \tilde{G}(\theta, \psi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} v_m(\psi) u_n(\theta). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Подставим (4.12) во вторую формулу (4.9) и, пользуясь соотношением (3.5) для второго слагаемого и свойством ортогональности функций (4.11), будем иметь

$$\begin{aligned} f'(\cos \psi) &= \pm \sum_{m=0}^{\infty} g_m v_m(\vartheta) - \frac{k\lambda}{\mu} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \left(\lambda_{m-1} v_{m-1}(\psi) - \lambda_{m+1} v_{m+1}(\psi) \right) - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n G_{mn} \right) v_m(\psi), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\lambda_0 = (\sqrt{2}/2) \ln(2\mu)$, $\lambda_n = (2n)^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$

Преобразуем третье слагаемое и окончательно получим выражение для $f'(\cos \psi)$

$$\begin{aligned} f'(\cos \psi) &= \pm \sum_{m=0}^{\infty} g_m v_m(\vartheta) - \frac{k\lambda}{\mu} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n a_{mn} \right) v_m(\psi) - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n G_{mn} \right) v_m(\psi). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Подставим выражение (4.13), а также разложение для $\varphi(\cos \vartheta)$ в первую формулу (4.9), пользуясь соотношением

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos s\psi}{\cos \psi - \cos \vartheta} d\psi = \pi \frac{\sin s\vartheta}{\sin \vartheta}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} \left[\varphi_m - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k\lambda}{\mu} a_{mn} + \frac{1}{\pi} G_{mn} \right) \varphi_n \right] \times \\ &\times u_m(\vartheta) = \pm \sum_{m=1}^{\infty} g_m u_m(\vartheta). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения φ_n .

Определив φ_n из системы линейных алгебраических уравнений, по формуле (4.12) найдем искомое решение контактной задачи. Затем по формуле (4.13) определим вид функции $f'(\cos \psi)$, потом по формулам (4.5) найдем приближенное значение для полудлины линии контакта a , величины, отвечающей за смещение области контакта s .

Для нахождения связи между величиной P и осадкой g необходимо подставить $\varphi(\vartheta)$ во вторую формулу (4.1), предварительно осуществив замену переменных и разложив $F(\zeta - z)$ по функциям (4.11)

$$F(\theta, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} v_m(\psi) u_n(\theta),$$

а затем подставить в (4.7).

5. Примеры

Применим полученные соотношения к одному из видов резин, для которой $\lambda/\beta = 1001$.

На рис. 2, 3 приведены распределения контактных давлений для бандажа и вкладыша с острыми краями соответственно при значении относительной толщины слоя $\varepsilon = 2$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям 10 000, 15 000, 20 000 безразмерного параметра μ .

На рис. 4, 5 приведены распределения контактных давлений для бандажа и вкладыша с гладкими краями соответственно при значении относительной толщины слоя $\varepsilon = 2$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям 600, 800, 1 000 безразмерного параметра μ . В табл. 1 и 2 представлены значения расчетных величин для случая бандажа и вкладыша с гладкими краями.

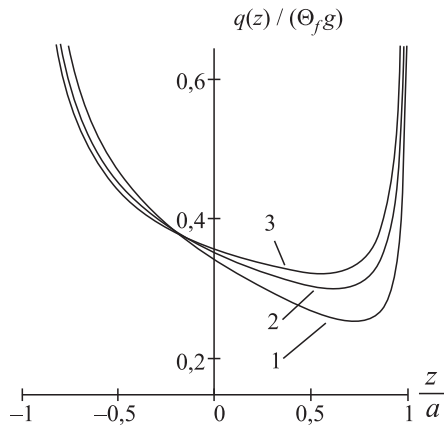


Рис. 2

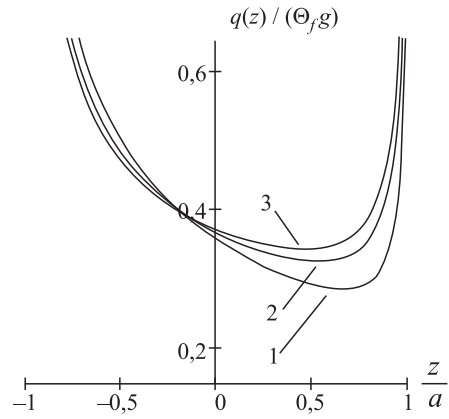


Рис. 3

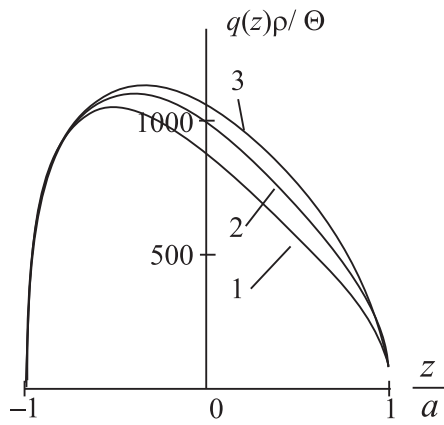


Рис. 4

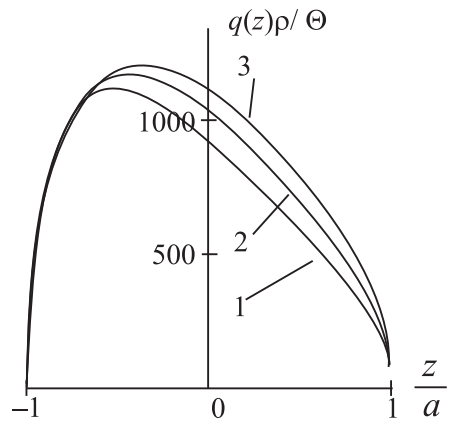


Рис. 5

Таблица 1

Параметр	μ		
	600	800	1 000
$a\sqrt{\frac{\theta}{PR}}$	0,02971	0,02725	0,02671
$\gamma\sqrt{\frac{\theta R}{P}}$	0,178	0,138	0,113
$g\sqrt{\frac{\theta R}{P}}$	0,011	0,015	0,017

Таблица 2

Параметр	μ		
	600	800	1 000
$a\sqrt{\frac{\theta}{PR}}$	0,02953	0,02726	0,02688
$\gamma\sqrt{\frac{\theta R}{P}}$	0,186	0,145	0,118
$g\sqrt{\frac{\theta R}{P}}$	0,0052	0,012	0,016

В таблицах обозначено $\gamma = \frac{\varepsilon}{\rho}$. В всех случаях параметр $\nu = 0,3$, а параметр $k\lambda = 1001$.

Литература

1. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
2. *Александров В. М., Ромалис Б. Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 173 с.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1962. 1100 с.
4. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 335 с.

Статья поступила 9 ноября 2007 г.
Институт проблем механики РАН, г. Москва
© Александров В. М., Марк А. В., 2007