УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ С ГРАДИЕНТНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ[1]

Белянкова Т. И.[2]***, Богомолов А. С.***[3]***, Калинчук В. В.***[4]

FEATURES OF INHOMOGENEOUS MEDIUM DYNAMICS WITH GRADIENT DENSITY

Belyankova T. I., Bogomolov A. S., Kalinchuk V. V.

In the framework of a model for the medium with varying properties, the dynamics of inhomogeneous media, whose density smoothly vary with depth, is investigated. The essential effect of the density gradient on the medium dynamic properties is revealed. It is determined that in the case of "rigid" as well as in the case of "soft" interlayer, the density gradient amplification leads to the oscillation increase for the amplitude-frequency response of dynamic rigidity. The homogeneous acoustic medium possesses similar properties.

Динамика неоднородных тел, упругие свойства которых монотонно изменяются по глубине (модули упругости монотонно возрастают или убывают) исследовалась неоднократно [1–5]. В большинстве работ использовался подход, основанный на сведении краевой задачи в системе задач Коши относительно компонент вектора перемещений и их производных. В [6, 7] был предложен и реализован иной подход, позволивший существенно расширить класс функций, описывающих градиентность неоднородной среды, и, в частности, исследовать особенности ее динамики при наличии высокоскоростного или низкоскоростного включения. И в первом, и во втором случае плотность материала среды полагалась постоянной. В настоящей работе изучается иная возможность, когда в неоднородной среде существует высокоградиентное включение, плотность которого также изменяется по глубине. Исследование выявило существенное влияние градиентности плотности на динамические свойства неоднородной среды.

1. Функционально градиентные среды

Рассматриваются гармонические колебания неоднородной функционально градиентной среды под действием распределенной в области Ω на ее поверхности нагрузки $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}e^{-i\omega t}$. Среда представляет собой слой $|x_1|, |x_2| \leqslant \infty$, $0 \leqslant x_3 \leqslant h$ жестко сцепленный с полупространством $|x_1|, |x_2| \leqslant \infty$, $x_3 \leqslant 0$. Упругие модули $\lambda^{(1)}(x_3)$, $\mu^{(1)}(x_3)$ и плотность $\rho^{(1)}(x_3)$ слоя полагаются произвольными функциями x_3, модули $\lambda^{(2)}$, $\mu^{(2)}$ и плотность $\rho^{(2)}$ полупространства полагаются постоянными. В силу установившегося характера колебаний, все параметры задачи представляются в виде $f(x_1, x_2, x_3, t) = f(x_1, x_2, x_3)e^{-i\omega t}$. Далее временной множитель опускается.

Краевая задача для неоднородной среды описывается уравнениями движения

$$\frac{\partial\theta_{11}^{(n)}}{\partial x_1} + \frac{\partial\theta_{12}^{(n)}}{\partial_2 x_2} + \frac{\partial\theta_{13}^{(n)}}{\partial x_3} = \rho^{(n)}\frac{\partial^2 u_1^{(n)}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\theta_{21}^{(n)}}{\partial x_1} + \frac{\partial\theta_{22}^{(n)}}{\partial x_2} + \frac{\partial\theta_{23}^{(n)}}{\partial x_3} = \rho^{(n)}\frac{\partial^2 u_2^{(n)}}{\partial t^2}, \qquad (1.1)$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (05-08-65499, 06-01-00726), РФФИ_р_юг (06-08-96635).

[2]Белянкова Татьяна Ивановна, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Южного научного центра РАН.

[3]Богомолов Александр Сергеевич, младший научный сотрудник НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ.

[4]Калинчук Валерий Владимирович, д-р физ.-мат. наук, заведующий лабораторией Южного научного центра РАН.

$$\frac{\partial\theta_{31}^{(n)}}{\partial x_1}+\frac{\partial\theta_{32}^{(n)}}{\partial x_2}+\frac{\partial\theta_{33}^{(n)}}{\partial x_3}=\rho^{(n)}\frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial t^2},$$

граничными условиями на поверхности $x_3=h$

$$\theta_{3k}^{(1)}=\begin{cases}q_k(x_1,x_2,t), & x_1,x_2\in\Omega,\\ 0, & x_1,x_2\notin\Omega,\end{cases}\qquad(1.2)$$

$$k=1,2,3$$

и условиями полного сцепления слоя и полупространства

$$x_3=0:\quad u_k^{(1)}=u_k^{(2)},\quad \theta_{3k}^{(1)}=\theta_{3k}^{(2)},\qquad(1.3)$$

$$k=1,2,3.$$

$\mathbf{u}^{(n)}=\{u_1^{(n)},u_2^{(n)},u_3^{(n)}\}$ — вектор перемещения произвольной точки среды, $\mathbf{\Theta}^{(n)}$ — тензор напряжений слоя ($n=1$) или полупространства ($n=2$), компоненты которого имеют вид

$$\theta_{ij}^{(n)}=\lambda^{(n)}\delta_{ij}\left(\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial x_3}\right)+$$
$$+\mu^{(n)}\left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i}\right),\qquad(1.4)$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Завершают постановку задачи условия излучения. Далее используются безразмерные параметры: упругие параметры задачи отнесены к модулю сдвига полупространства $\mu^{(2)}$, линейные параметры — к толщине слоя h. В качестве безразмерной частоты используется параметр $\kappa_2=\omega h\sqrt{\rho^{(2)}/\mu^{(2)}}$.

Особенность краевой задачи (1.1), (1.2) состоит в том, что коэффициенты в уравнении движения (1.1) являются функциями x_3. После применения двумерного преобразования Фурье уравнение (1.1) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решение которых в замкнутой форме возможно лишь в специальных случаях. Например, когда упругие модули и плотность среды изменяются по одному и тому же закону (экспоненциальному, тригонометрическому и т. п.). В общем случае для решения системы необходимо привлекать численные методы.

2. Решение краевой задачи

Решение краевой задачи (1.1), (1.2) для слоя при фиксированном значении параметра κ_2 представляется в виде [6, 7]

$$\mathbf{u}^{(1)}=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\Omega}\mathbf{k}^{(1)}(x_1-\xi,x_2-\eta,x_3)\times$$
$$\times\,\mathbf{q}(\xi,\eta)d\xi d\eta,\qquad(2.1)$$

$$\mathbf{k}^{(1)}(s,t,x_3)=\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\mathbf{K}^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2,x_3)\times$$
$$\times\,e^{-i(\alpha_1 s+\alpha_2 t)}d\alpha_1 d\alpha_2,\qquad(2.2)$$

$$\mathbf{K}^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2,x_3)=\left\|K_{mn}^{(1)}\right\|_{m,n=1}^{3},\qquad(2.3)$$

$$K_{mn}^{(1)}=\Delta^{-1}\sum_{s=1}^{6}\Delta_{ns}y_{ms}(\alpha_1,\alpha_2,x_3),\qquad(2.4)$$

где $y_{ms}(\alpha_1,\alpha_2,x_3)$ — набор линейно независимых решений системы уравнений

$$\mathbf{Y}^{(n)\prime}=\mathbf{M}^{(n)}(\alpha_1,\alpha_2,x_3)\mathbf{Y}^{(n)}\qquad(2.5)$$

с начальными условиями

$$y_{ms}(\alpha_1,\alpha_2,0)=\delta_{ms},\qquad(2.6)$$
$$m,s=1,2,\ldots,6.$$

Матрица в уравнении (2.5) определяется выражениями

$$\mathbf{M}^{(n)}=$$
$$=\begin{pmatrix}0&0&\alpha_1^2&m_{14}^{(n)}&0&0\\ 0&0&\alpha_2^2&0&m_{14}^{(n)}&0\\ m_{31}^{(n)}&m_{31}^{(n)}&0&0&0&m_{36}^{(n)}\\ m_{41}^{(n)}&m_{42}^{(n)}&0&0&0&m_{46}^{(n)}\\ m_{51}^{(n)}&m_{52}^{(n)}&0&0&0&m_{56}^{(n)}\\ \kappa_2^2&0&0&-1&-1&0\end{pmatrix},\qquad(2.7)$$

$$m_{14}^{(n)}=-\frac{1}{\mu^{(n)}},\quad m_{31}^{(n)}=-\frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(n)}+2\mu^{(n)}},$$
$$m_{36}^{(n)}=\frac{1}{\lambda^{(n)}+2\mu^{(n)}},$$
$$m_{41}^{(n)}=\alpha_1^2a_{11}^{(n)}+\alpha_2^2\mu^{(n)}-\kappa_2^2,$$
$$m_{42}^{(n)}=\alpha_1^2(a_{12}^{(n)}+\mu^{(n)}),$$
$$m_{46}^{(n)}=\alpha_1^2a_{13}^{(n)},\qquad(2.8)$$
$$m_{51}^{(n)}=\alpha_2^2(a_{12}^{(n)}+\mu^{(n)}),$$
$$m_{52}^{(n)}=\alpha_1^2\mu^{(n)}+\alpha_2^2a_{11}^{(n)}-\kappa_2^2,$$

$$m_{56}^{(n)} = \alpha_2^2 a_{13}^{(n)},$$

$$a_{11}^{(n)} = \frac{4\mu^{(n)}(\lambda^{(n)} + \mu^{(n)})}{\lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)}},$$

$$a_{12}^{(n)} = \frac{2\lambda^{(n)}\mu^{(n)}}{\lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)}},$$

$$a_{13}^{(n)} = \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)}},$$

$$\Delta = \det \mathbf{r}. \tag{2.9}$$

$\mathbf{r} = \|r_{l\,k}\|_{l,k=1}^{9}$ — матрица с элементами

$$r_{lk} = y_{l+3,k}(\alpha_1, \alpha_2, h), \qquad l = 1,2,3, k = 1,2,\ldots,6,$$

$$r_{lk} = 0, \quad (l = 1,2,3,\ k = 7,8,9),$$

$$r_{lk} = \delta_{l-3,k} y_{l-3,k}, \qquad (l = 5,6,\ldots,9,\ k = 1,2,\ldots,6), \tag{2.10}$$

$$r_{lk} = -f_{l-3,k-6}, \quad (l = 5,6,\ldots,9,\ k = 7,8,9).$$

Участвующий в представлении (2.4) множитель Δ_{ns} — алгебраическое дополнение элемента r_{ns}. $f_{3k} = 1$ $(k = 1,2)$, $f_{33} = 0$. Остальные f_{mk} определяются формулами

$$f_{m1} = -\frac{\alpha_m^2}{\sigma_1^{(2)}}, \quad f_{m2} = -\frac{\alpha_m^2}{u^2}\sigma_2^{(2)}, \quad m = 1,2,$$

$$f_{13} = i\alpha_1\alpha_2, \quad f_{23} = -i\alpha_1\alpha_2,$$

$$f_{m1} = -2i\alpha_{m-3}^2, \tag{2.11}$$

$$f_{m2} = -2i\alpha_{m-3}^2\Theta^{(2)}u^{-2}, \quad m = 4,5,$$

$$f_{43} = i\alpha_1\alpha_2\sigma_2^{(2)}, \quad f_{53} = -i\alpha_1\alpha_2\sigma_2^{(2)},$$

$$f_{61} = 2\Theta^{(2)}{\sigma_1^{(2)}}^{-1}, \quad f_{62} = 2\sigma_2^{(2)}, \quad f_{63} = 0,$$

где

$$\sigma_1^{(2)} = (u^2 - \kappa_1^2)^{1/2}, \quad \sigma_2^{(2)} = (u^2 - \kappa_2^2)^{1/2},$$

$$\Theta^{(2)} = u^2 - \frac{\kappa_2^2}{2}, \quad \kappa_1 = \kappa_2\sqrt{\frac{\mu^{(2)}}{\left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}\right)}}.$$

3. Динамика поверхности неоднородной среды

Далее будем рассматривать неоднородную среду, которая представляет собой неоднородный слой на поверхности однородного полупространства. Слой и полупространство жестко сцеплены. Как уже отмечалось, динамика неоднородной среды, свойства которой монотонно изменяются по глубине (жесткость монотонно увеличивается или уменьшается), рассматривалась в [1–5]. Динамика неоднородной среды, содержащей «высокоскоростное» или «низкоскоростное» включение при постоянной плотности, рассматривалась в [6, 7]. В настоящей работе изучается случай, когда включение представляет собой «жесткий» или «податливый» слой, плотность которого также изменяется по глубине. Будем полагать, что упругие модули и плотность определяются формулами

$$\mu^{(1)}(x_3) = \mu_0 f(x_3),$$

$$\lambda^{(1)}(x_3) = \lambda_0 f(x_3), \tag{3.1}$$

$$\rho^{(1)}(x_3) = \rho_0 f_1(x_3),$$

λ_0, μ_0, ρ_0 — упругие параметры и плотность полупространства (константы), функции $f(x_3)$ и $f_1(x_3)$ имеют представление

$$f(x_3) = 1 + d\sin^{16}\left(\pi\frac{x_3}{h}\right), \qquad f_1(x_3) = 1 + \gamma\sin^{16}\left(\pi\frac{x_3}{h}\right), \tag{3.2}$$

$$f(x_3) = 1 - d\sin^{16}\left(\pi\frac{x_3}{h}\right), \qquad f_1(x_3) = 1 - \gamma\sin^{16}\left(\pi\frac{x_3}{h}\right). \tag{3.3}$$

Формулы (3.2) соответствуют жесткому слою или слою с высокой плотностью ($d, \gamma \geqslant 1$. В графическом виде представляются кривыми, отмеченными цифрами 1–7 на рис. 1а.

Формулы (3.3) соответствуют податливому слою или слою с низкой плотностью ($d, \gamma \leqslant 1$. В графическом виде представляются кривыми, отмеченными цифрами 0,1–0,8 на рис. 1б). Цифры при кривых в обоих случаях соответствуют значению параметра d или γ.

Влияние градиентности изменения плотности неоднородной среды с жестким включением (d=5 в формуле (3.2) для упругих модулей) на фазовые скорости поверхностных

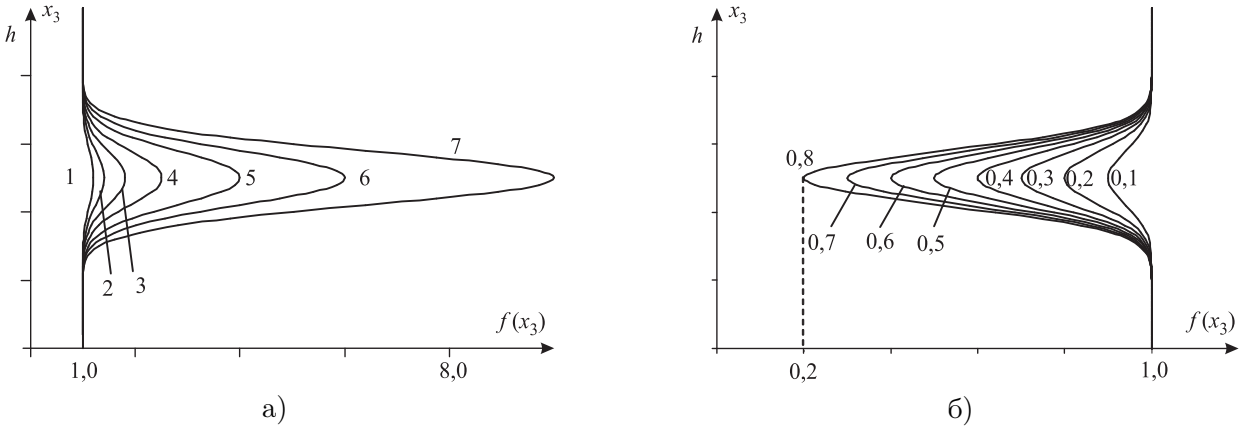


Рис. 1. Законы изменения упругих параметров или плотности среды. а) жесткое включение (жесткий слой или слой с высокой плотностью), б) податливое включение (податливый слой или слой с низкой плотностью). Цифры при кривых соответствуют значениям d или γ в формулах (3.2) или (3.3)

волн иллюстрируют графики на рис. 2а (первые моды) и 2б (вторые моды). Цифры 0–7 на рис. 2а и 4–7 на рис. 2б соответствуют значениям параметра γ, определяющим степень изменения плотности. Как следует из графиков, при постоянной плотности ($\gamma = 0$, включение является высокоскоростным), среда обладает характерным для сред, имеющих жесткое включение, свойством: поверхностная волна при возникновении имеет скорость релеевской волны. С увеличением частоты ее скорость возрастает, достигает значения скорости сдвиговой волны и становится комплексной. При последующем увеличении частоты волна возникает в вещественной области вновь, ее скорость уменьшается от скорости сдвиговой волны до скорости релеевской волны. Увеличение градиентности плотности включения сразу приводит к качественному изменению структуры поверхностного волнового поля. При $\gamma = 1$ скорость волны с момента возникновения резко уменьшается, что характерно для сред с низкоскоростным включением. Однако далее с ростом частоты скорость возрастает, достигает скорости сдвиговой волны и становится комплексной. Далее волна вновь возникает в вещественной области, ее скорость также уменьшается от скорости сдвиговой волны до скорости релеевской волны. При $\gamma = 1, 2, 3$ диапазон частот, в котором поверхностной волны не существует, сохраняется, но его размер уменьшается. Начиная с $\gamma = 3, 3$, структура поверхностного волнового поля претерпевает качественное изменение: поверхностная волна существует во всем диапазоне частот. Появляется вторая мода, которая существует в узком диапазоне частот. С увеличением γ область существования второй моды расширяется. Начиная с $\gamma = 6$, область существования 2-ой моды становится неограниченной. Необходимо отметить, что при $\gamma = 5$ среда является акустически однородной, поскольку функции f и f_1 совпадают — скорость горизонтально и вертикально поляризованных поперечных волн от координаты x_3 не зависит. Как будет показано ниже, при $\gamma > 5$ характер изменения фазовой скорости соответствует волне на поверхности среды с низкоскоростным включением.

Влияние градиентности изменения плотности неоднородной среды с податливым слоем (d=0,8 в формуле (3.3) для упругих модулей) на фазовую скорость поверхностных волн иллюстрируют графики на рис. 3а (первые моды), 3б (вторые моды) и 3в (третьи моды). Цифры при кривых на рис. 3а, б и в соответствуют значениям параметра γ, определяющим степень изменения плотности. Как следует из графиков, при постоянной плотности ($\gamma = 0$, включение является низкоскоростным) среда обладает характерным для сред, имеющих мягкое включение, свойством: существует конечное множество мод поверхностных волн, количество которых увеличивается с увеличением частоты. Градиентность плотности включения приводит к изменению структуры поверхностного волнового поля. При значениях $\gamma = 1, 0$–$4,0$ первая мода обладает ярко выраженной дисперсией. Ее фазовая скорость в области низких частот сначала уменьшается, принимает некоторое минимальное значение, затем увеличивается, до-

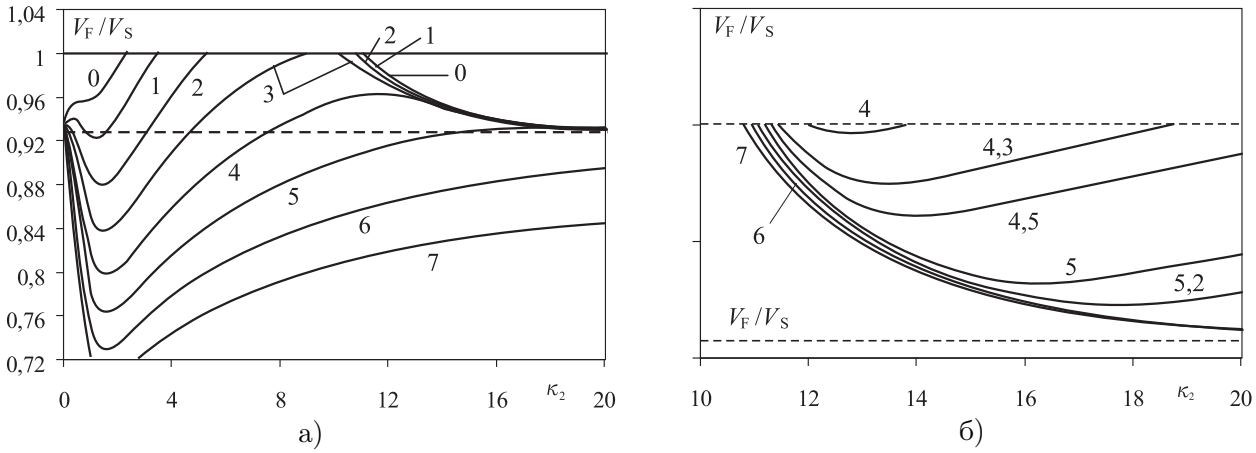


Рис. 2. Относительные фазовые скорости поверхностных волн (а — 1-ые моды, б — 2-ые моды) для среды с жестким включением ($d = 5$ в формуле (3.2) при различной плотности. Цифры при кривых соответствуют значениям в формуле (3.2))

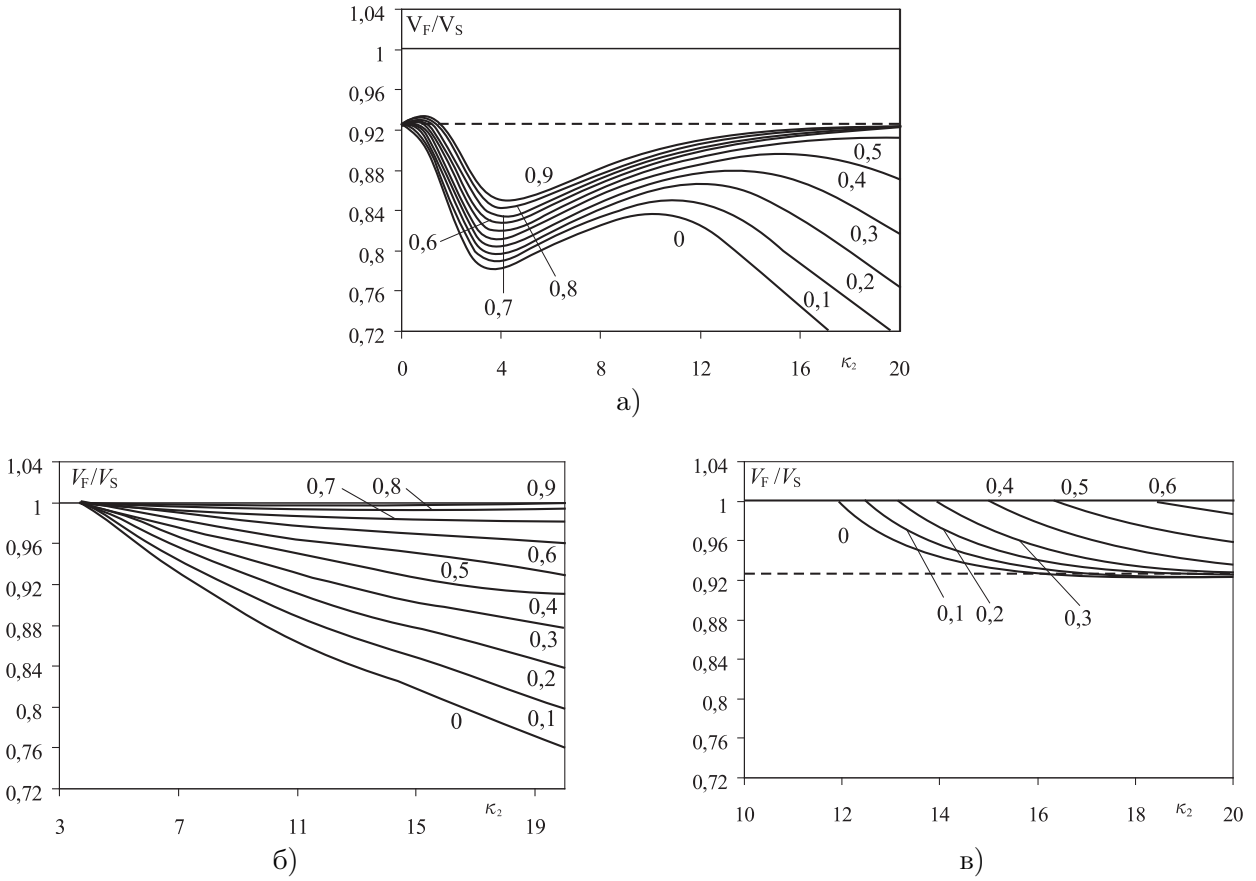


Рис. 3. Относительные фазовые скорости поверхностных волн (а — 1-е моды, б — 2-е, в — 3-и моды) для среды с мягким включением ($d = 0,8$ в формуле (3.3)) при различной плотности. Цифры при кривых соответствуют значениям в формуле (3.3)

стигает максимального значения, после которого монотонно убывает. Положение минимума от плотности не зависит, в то время как положение максимума по мере увеличения плотности сдвигается вверх по частоте. Начиная с значения $\gamma = 5$ фазовая скорость первой моды также имеет минимум. Однако далее характер ее изменения становится монотонно возрастающим, но ограниченным сверху значением скорости релеевской волны. Вторая и третья моды имеют свои особенности. Критическая частота возникновения второй моды не зависит от значения параметра γ, в то время как критическая частота возникновения третьей напрямую зависит от градиентности плотности. Характерно, что для значений γ =0–0,6 фазовые скорости второй и третьей мод монотонно убывают. Начиная с $\gamma = 0,7$ дисперсия второй моды уменьшается и полностью исчезает при $\gamma = 0,9$. Для третьей моды характерно то, что критическая частота ее возникновения увеличивается с ростом значения параметра γ. В момент возникновения мода обладает сильной дисперсией, которая впоследствии ослабевает и исчезает по мере роста частоты.

4. Динамическая жесткость неоднородной среды

Формулы (2.1)–(2.4) описывают перемещение произвольной точки слоя под действием распределенной в области Ω нагрузки. Для изучения динамической жесткости неоднородной среды в выражениях (2.1)–(2.4) необходимо положить $x_3 = h$. При таком преобразовании формулы (2.1) и (2.2) представляются в виде

$$\iint\limits_{\Omega} \mathbf{k}^{(1)}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, h)\mathbf{q}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 4\pi^2 \mathbf{f}(x_1, x_2), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{k}^{(1)}(s, t, h) = \int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} \mathbf{K}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, h) \times e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (4.2)$$

Выражение (4.1) представляет собой интегральное уравнение относительно функции распределения контактных напряжений $\mathbf{q}$. В этом случае функция $\mathbf{f}(x_1, x_2)$, определяющая амплитуду смещения штампа является известной. Особенность рассматриваемого интегрального уравнения состоит в том, что символ ядра интегрального оператора $\mathbf{K}^{(1)}$ обладает конечным, зависящим от частоты, множеством вещественных или комплексных с малой мнимой частью нулей и полюсов. Для решения подобных уравнений развиты эффективные аналитические и полуаналитические методы [5, 8–10], которые основаны на выделении из $\mathbf{k}^{(1)}$ осциллирующих составляющих и использовании формулы

$$\mathbf{K}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{S}(\alpha_1, \alpha_2, \kappa_2)\mathbf{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2, \kappa_2), \quad (4.3)$$

где функция $\mathbf{S}$ не имеет нулей и полюсов в некоторой полосе, содержащей вещественную ось. Рациональная функция $\mathbf{\Pi}$ включает все нули и полюса функции $\mathbf{K}^{(1)}$, сохраняющие динамические свойства среды. Представление (4.3) позволяет свести интегральное уравнение с осциллирующим ядром к интегральному уравнению

$$\mathbf{u}_M(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}(x_1 - \xi, x_2 - \eta) \times \mathbf{t}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \quad (4.4)$$

с экспоненциально убывающим ядром

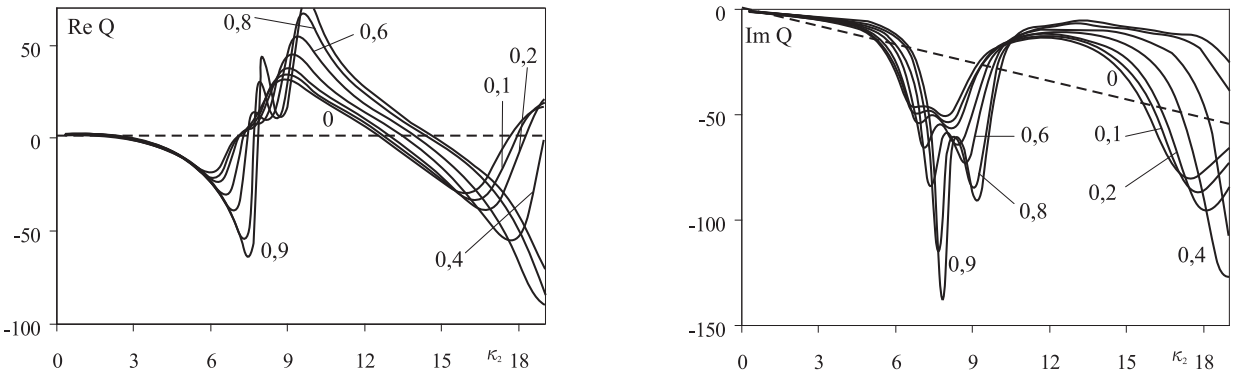
$$\mathbf{s}(s, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\alpha_1, \alpha_2, \omega) \times e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (4.5)$$

относительно неизвестной функции $\mathbf{t}$, связанной с функцией $\mathbf{q}$ формулой

$$\mathbf{T}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (4.6)$$

где $\mathbf{T}$ и $\mathbf{Q}$ являются трансформантами Фурье функций $\mathbf{t}$ и $\mathbf{q}$ соответственно. Функция $\mathbf{u}_M(x_1, x_2)$ определяет количество нулей и полюсов $\mathbf{K}^{(1)}$. Для решения уравнения (3.1) и построения функции $\mathbf{t}$ используются численные методы [6,7]. Восстанавливается функция $\mathbf{q}$ за счет использования формулы (4.6).

На рис. 4. и 5 представлены графики функций $\operatorname{Re} Q(0, \kappa_2)$ (рис. 4а, 5а) и $\operatorname{Im} Q(0, \kappa_2)$ (рис. 4б, 5б) ($Q(0, \kappa_2)$ — динамическая жесткость — реакция среды на единичное поступательное смещение штампа), иллюстрирующие влияние градиентности плотности неоднородной среды на ее динамические свойства.



а) б)

Рис. 4. Динамическая жесткость (а — действительная, б — мнимая составляющие) функционально градиентной среды с податливым включением ($d = 0,8$ в формуле (3.2)) при различной плотности. Цифры при кривых соответствуют значениям γ в формуле (3.2)

Кривые на рис. 4а и 4б рассчитаны для среды с податливым включением, модули упругости которой изменяются по первой формуле (3.3) для $d = 0,8$. Цифры при кривых соответствуют значениям γ во второй формуле (3.3).

Из графиков следует, что динамическая жесткость среды с податливым включением имеет осциллирующий характер. При постоянной плотности ($\gamma = 0$ — кривая 0) имеем низкоскоростной внутренний слой. Увеличение градиентности плотности приводит к определенному усилению осцилляции $\mathrm{Re}\, Q$ и $\mathrm{Im}\, Q$ и сдвигу кривых в область высоких частот. Начиная с $\gamma = 0,6$ качественный характер поведения кривых меняется, осцилляция резко возрастает.

Кривые на рис. 5а и 5б рассчитаны для среды с жестким включением, модули упругости которой изменяются по первой формуле (3.2) при $d = 5$. Они иллюстрируют изменение характера влияния плотности среды на ее динамическую жесткость. Цифры при кривых соответствуют значениям γ во второй формуле (3.2), кривая 0 соответствует среде с постоянной плотностью.

Из графиков следует, что динамическая жесткость среды с жестким внутренним слоем также имеет осциллирующий характер. При постоянной плотности ($\gamma = 0$ — кривая 0) включение представляет собой высокоскоростной внутренний слой. Увеличение градиентности плотности до $\gamma = 4$ приводит к усилению осцилляции как вещественной, так и мнимой составляющей жесткости. При дальнейшем увеличении градиентности плотности, осцилляция жесткости только усиливается.

Заключение

В рамках модели среды с переменными свойствами исследована динамика неоднородных сред с плавно изменяющейся по глубине плотностью. Выявлено существенное влияние градиентности плотности на динамические свойства неоднородной среды. Установлено, что усиление градиентности плотности как в случае жесткого, так и в случае податливого включения приводит к увеличению осцилляции амплитудно-частотной характеристики динамической жесткости. Аналогичными свойствами обладает акустически однородная среда.

Литература

1. *Ананьев И. В., Бабешко В. А.* Колебания штампа на слое с переменными по глубине характеристиками // МТТ. 1978. № 1. С. 64–69.
2. *Ананьев И. В., Калинчук В. В., Полякова И. Б.* О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 483–489.
3. *Калинчук В. В., Лысенко И. В., Полякова И. Б.* Об особенностях взаимодействия колеблющегося штампа с неоднородным тяжелым основанием // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 301–308.
4. *Kalinchuk V. V., Belyankova T. I.* An effective approach to the investigation of soil/structure interaction problems. Proceedings of the 4th International Conference on Structural Dynamics. Munich, Germany. 2002. Balkema. Vol. 2. P. 1273–1278.

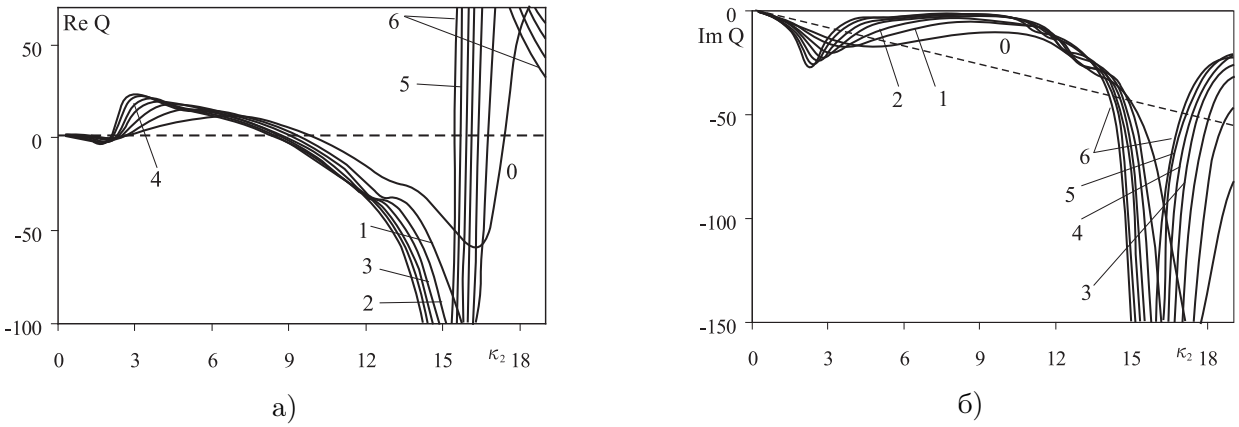


Рис. 5. Динамическая жесткость (а — действительная, б — мнимая составляющие) функционально градиентной среды с жестким включением ($d = 5$ в формуле (3.3)) при различной плотности. Приведенные на фигурах цифры представляют собой значения параметра γ)

5. *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит. 2002. 240 с.
6. *Kalinchuk V. V., Belyankova T. I., Tosecky A.* The effective approach to the inhomogeneous media dynamics modeling. Proceedings of the sixth International Conference on Structural Dynamics. Paris. France. Vol. 2. P. 1309–1314.
7. *Калинчук В. В., Белянкова Т. И., Богомолов А. С.* К проблеме моделирования неоднородных материалов с заданными свойствами // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 2. С. 26–32.
8. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М: Наука. 1984. 256 с.
9. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир. 1999. 246 с.
10. *Бабешко В. А., Белянкова Т. И., Калинчук В. В.* Метод фиктивного поглощения в задачах теории упругости для неоднородного полупространства // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 276–284.

Статья поступила 20 ноября 2007 г.
Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону
НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича Южного федерального университета, г. Ростов-на-Дону
© Белянкова Т. И., Богомолов А. С., Калинчук В. В., 2007