УДК 539.374

КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ[1]

А. Г. Горшков[2], ***Э. И. Старовойтов***[3], ***Д. В. Леоненко***[4]

VIBRATIONS OF THREE-LAYERED BEAMS UNDER THE ACTION OF LOCAL LOADS OF VARIOUS SHAPES

Gorshkov A. G., Starovoytov E. I., Leonenko D. V.

The work considers forced vibrations of an elastic three-layered beam under the action of local loads of rectangular and parabolic shapes. The hypothesis of a broken normal has been assumed to describe the kinematics of a package with asymmetrical thickness. The filler is hard and compressible. The analytical solutions of the problems under the impulse and resonance action have been found. The numerical analysis has been conducted. The results have been compared with the case of a local shallow load of the rectangular shape.

1. Постановка и решение задачи

Трехслойные элементы конструкций находят все большее применение в современных отраслях промышленности, поэтому постоянно возникает необходимость в разработке методов их расчета в новых условиях эксплуатации. В [1–3] исследованы поперечные колебания трехслойных пластин и цилиндрических оболочек под действием нагрузок различного рода. Статические воздействия на трехслойные элементы конструкций изучены в [4, 5]. В настоящей работе рассматриваются малые колебания несимметричного по толщине упругого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем под действием локальных резонансных и импульсных нагрузок.

Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Кирхгофа, в жёстком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается его обжатие. Деформации предполагаются малыми. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1).

Распределенная поверхностная нагрузка $q(x)$ приложена перпендикулярно к внешней плоскости первого слоя. Искомыми считаются прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв $w_k(x,t)$ и $u_k(x,t)$ $(k = 1, 2)$.

Уравнения движения получены вариационным методом. Учтена инерция движения вдоль координатных осей и инерция вращения нормали в несущих слоях. В результате имеем следующую систему уравнений в частных производных:

$$a_1u_1 - a_1u_2 - a_4u_{1,xx} - a_5u_{2,xx} + a_2w_{1,x} + a_3w_{2,x} - 2a_6w_{1,xxx} + a_7w_{2,xxx} + m_1\ddot{u}_1 = p;$$

$$-a_1u_1 + a_1u_2 - a_5u_{1,xx} - a_9u_{2,xx} - a_3w_{1,x} - a_2w_{2,x} - a_6w_{1,xxx} + 2a_7w_{2,xxx} + m_2\ddot{u}_2 = 0;$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ р2003юг (03-01-96658).

[2]Горшков Анатолий Герасимович, д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной механики Московского государственного технического университета (МАИ).

[3]Старовойтов Эдуард Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор Белорусского государственного университета транспорта.

[4]Леоненко Денис Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент Белорусского государственного университета транспорта.

$$a_{10}u_{1,x} - a_{17}u_{2,x} + 2a_6u_{1,xxx} + \\ + a_6u_{2,xxx} + a_{11}w_{1,xx} - a_{12}w_{2,xx} + \\ + a_{15}w_{1,xxxx} - a_{16}w_{2,xxxx} + a_8w_1 - \\ - a_8w_2 + m_1\ddot{w}_1 - m_3\ddot{w}_{1,xx} = \\ = q + \tfrac{1}{2}p_{,x}\,h_1; \quad (1.1)$$

$$- a_{18}u_{1,x} + a_{19}u_{2,x} - a_7u_{1,xxx} - \\ - 2a_7u_{2,xxx} - a_{12}w_{1,xx} + a_{14}w_{2,xx} - \\ - a_{16}w_{1,xxxx} + a_{13}w_{2,xxxx} - a_8w_1 + \\ + a_8w_2 + m_2\ddot{w}_2 - m_4\ddot{w}_{2,xx} = 0.$$

Здесь запятая в нижнем индексе указывает на операцию дифференцирования по следующей за ней координате. Две точки над искомыми функциями обозначают вторую производную по времени. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к его длине l. Коэффициенты выражаются через механические (K_k, G_k — объемный модуль и модель сдвига, ρ_k — плотность материалов k-го слоя, $k = 1, 2, 3$) и геометрические параметры (h_k — толщина слоя, $h_3 = 2c$) стержня:

$$a_1 = \frac{2G_3}{c}, \quad a_2 = 2G_3\beta_1 - \frac{K_3^-}{2},$$

$$a_3 = 2G_3\beta_2 + \frac{K_3^-}{2}, \quad a_4 = K_1^+h_1 + \frac{2K_3^+c}{3},$$

$$a_5 = \frac{K_3^+c}{3}, \quad a_6 = \frac{K_3^+ch_1}{6}, \quad a_7 = \frac{K_3^+ch_2}{6},$$

$$a_8 = \frac{K_3^+}{3c}, \quad a_9 = K_2^+h_2 + \frac{2K_3^+c}{3},$$

$$a_{10} = \frac{G_3}{2}\beta_1 + \frac{K_3^-}{2},$$

$$a_{11} = \frac{K_3^-h_1}{2} - \frac{G_3c}{2}\left(\beta_1^2 + \frac{1}{3}\right),$$

$$a_{12} = \frac{K_3^-(h_1+h_2)}{4} + \frac{G_3c}{2}\left(\beta_1\beta_2 - \frac{1}{3}\right),$$

$$a_{13} = \frac{K_2^+h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ch_2^2}{6},$$

$$a_{14} = \frac{K_3^-h_2}{2} - \frac{G^{(1.3)}c}{2}\left(\beta_2^2 + \frac{1}{3}\right),$$

$$a_{15} = \frac{K_1^+h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ch_1^2}{6}, \quad a_{16} = \frac{K_3^+ch_2h_1}{12},$$

$$a_{17} = \frac{G^{(3)}}{2}\beta_1 - \frac{K_3^-}{2},$$

$$a_{18} = \frac{G^{(3)}}{2}\beta_2 + \frac{K_3^-}{2},$$

$$a_{19} = \frac{G^{(3)}}{2}\beta_2 - \frac{K_3^-}{2},$$

$$m_1 = \rho_1h_1 + \frac{2}{3}\rho_3c, \quad m_2 = \rho_2h_2 + \frac{2}{3}\rho_3c,$$

$$m_3 = \frac{\rho_1h_1^3}{12} + \frac{\rho_3ch_1^2}{6}, \quad m_4 = \frac{\rho_2h_2^3}{12} + \frac{\rho_3ch_2^2}{6},$$

$$m_5 = \frac{\rho_3ch_1}{6}, \quad m_6 = \frac{\rho_3ch_1h_2}{12},$$

$$m_7 = \frac{\rho_3ch_2}{6}, \quad m_8 = \frac{\rho_3c}{3},$$

$$\beta_k = \left(1 + \frac{h_k}{c}\right),$$

$$K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Граничные условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры ($x = 0; 1$) в перемещениях имеют вид

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0, k = 1, 2. \quad (1.2)$$

Начальные условия движения при $t = 0$

$$\begin{aligned} u_k(x,0) &= u_{k0}(x); \\ \dot{u}_k(x,0) &= \dot{u}_{k0}(x); \\ w_k(x,0) &= w_{k0}(x); \\ \dot{w}_k(x,0) &= \dot{w}_{k0}(x), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $u_{k0}(x)$, $\dot{u}_{k0}(x)$, $w_{k0}(x)$, $\dot{w}_{k0}(x)$ — заданные начальные перемещения и скорости точек срединных поверхностей несущих слоев.

Решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) проводится методом Бубнова–Галеркина при $p = 0$. Для этого искомые перемещения $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ и нагрузка $q(x,t)$ представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям (1.2):

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos\Theta_m x T_{mk}(t), \quad k = 1, 2, \\ w_k &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin\Theta_m x T_{m\,k+2}(t), \quad k = 1, 2, \\ q(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin\Theta_m x q_m(t), \\ q_m(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l q(x,t)\sin\Theta_m x\,dx, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $T_{mi}(t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ — неизвестные функции времени; $q_m(t)$ — коэффициенты разложения нагрузки в ряд; $\Theta_m = \dfrac{\pi m}{l}$.

Подстановка выражений (1.4) в (1.1) приводит к системе уравнений для определения функций времени $T_{mi}(t)$:

$$\sum_{j=1}^{4} B_{mkj} T_{mj} + M_{mkk} \ddot{T}_{mk} = Q_{mk}, \qquad k = 1, \ldots, 4. \quad (1.5)$$

Здесь B_{mij} — элементы матрицы $\mathbf{B}$, состоящей из коэффициентов b_p, которые зависят от параметров a_p и m; M_{mkk} — коэффициенты диагональной матрицы $\mathbf{M}$, состоящей из инерционных компонент m_j; Q_{mk} — элементы вектора $\mathbf{Q}$ разложения нагрузки в ряд:

$$b_1 = a_1 + a_4(\Theta_m)^2, \quad b_2 = -a_1 + a_5(\Theta_m)^2,$$

$$b_3 = a_2\Theta_m + 2a_6(\Theta_m)^3, \quad b_4 = a_3\Theta_m - a_7(\Theta_m)^3,$$

$$b_5 = a_1 + a_9(\Theta_m)^2, \quad b_6 = -a_3\Theta_m + a_6(\Theta_m)^3,$$

$$b_7 = a_2\Theta_m + 2a_7(\Theta_m)^3,$$

$$b_8 = -a_{10}\Theta_m + 2a_6(\Theta_m)^3,$$

$$b_9 = a_{17}\Theta_m + a_6(\Theta_m)^3,$$

$$b_{10} = -a_{11}(\Theta_m)^2 + a_{15}(\Theta_m)^4 + a_8,$$

$$b_{11} = a_{12}(\Theta_m)^2 - a_{16}(\Theta_m)^4 - a_8,$$

$$b_{12} = a_{18}\Theta_m - a_7(\Theta_m)^3,$$

$$b_{13} = a_{19}\Theta_m + 2a_7(\Theta_m)^3,$$

$$b_{14} = -a_{14}(\Theta_m)^2 + a_{13}(\Theta_m)^4 + a_8,$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ b_8 & b_9 & b_{10} & b_{11} \\ b_{12} & -b_{13} & b_{11} & b_{14} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_m \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 + m_3\Theta_m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 + m_4\Theta_m^2 \end{pmatrix}.$$

Для замыкания задачи к системе (1.5) необходимо добавить начальные условия (1.3).

2. Свободные колебания

При свободных колебаниях предполагается, что внешняя нагрузка в (1.5) отсутствует: $Q_{mk}(x, t) = 0$. Решение имеет вид

$$T_{mk}(t) = A_{mk} \sin(\omega_m t + \alpha_{mk}), \quad (2.1)$$

где A_{mk} — амплитуда; ω_m — частота колебаний; α_{mk} — начальная фаза.

Подстановка выражения (2.1) в однородную систему, соответствующую (1.5), приводит к обобщенной задаче на собственные значения. Получаемая система алгебраических уравнений однородна относительно амплитуд A_{mk}. Нулевое решение в рассматриваемом случае означает отсутствие колебаний. Для нахождения нетривиального решения необходимо потребовать равенства нулю ее определителя. Это приводит к алгебраическому уравнению 4-го порядка относительно ω_k^2. Решив его, получим четыре вещественных неотрицательных корня. Таким образом, колебательный процесс для каждого значения параметра m оказывается четырёхчастотным. Следовательно, решение (2.1) принимает вид

$$T_{mk}(t) = \sum_{i=1}^{4} A_{mki} \sin(\omega_{mi} t + \alpha_{mi}).$$

Численное исследование частот свободных колебаний проводилось для трехслойного стержня, набранного из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т [6]. В таблице приведены значения всех четырех частот ω_{mi} для каждого параметра $m = 0, \ldots, 4$ при толщине слоев $h_1 = 0,01$, $h_2 = 0,05$, $h_3 = 0,18$.

3. Вынужденные колебания

В случае вынужденных колебаний функции $T_{mk}(t)$ представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^{4} \delta_{mki} \zeta_{mi} \left(\sum_{i=1}^{4} \delta_{mik}^2 = 1 \right), \quad (3.1)$$

где δ_{mki} — амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Функции $\zeta_{mi}(t)$ определяются из системы уравнений

$$\ddot{\zeta}_{mi} + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi} = \tilde{q}_{mi}(t),$$
$$\tilde{q}_{mi} = \sum_{k=1}^{4} Q_{mk} \delta_{mki} \Big/ \sum_{k=1}^{4} M_{mkk} \delta_{mki}^2, \quad (3.2)$$

Частоты собственных колебаний трехслойного стержня

m	0	1	2	3	4
ω_{m1}	0	444	2 176	4 994	7 971
ω_{m2}	4 516	8 284	10 466	10 433	11 280
ω_{m3}	13 493	13 540	20 531	29 431	38 701
ω_{m4}	0	16 239	30 442	45 395	60 415

где $\tilde{q}_{mi}$ — компоненты приведенной силовой нагрузки.

Общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi}\cos(\omega_{mi}t) + B_{mi}\sin(\omega_{mi}t) + \frac{1}{\omega_{mi}}\int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau))\tilde{q}_{mi}(\tau)d\tau. \quad (3.3)$$

В случае резонанса частота внешней гармонической нагрузки $q(x)\sin(\omega_{nk}t)$ совпадает с одной из собственных частот колебаний стержня. Дифференциальное уравнение (3.2) для определения неизвестной функции $\zeta_{mi}(t)$ принимает вид

$$\ddot{\zeta}_{mi}(t) + \omega_{mi}^2\zeta_{mi}(t) = \tilde{E}_m\sin(\omega_{nk}t), \qquad \tilde{E}_m = E_m\delta_{m3i}\Big/\sum_{k=1}^{4} M_{mkk}\delta_{mki}^2. \quad (3.4)$$

Решением (3.3) в этом случае является

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi}\cos(\omega_{mi}t) + B_{mi}\sin(\omega_{mi}t) + y_{mi}(t),$$

$$y_{mi}(t) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{E}_m}{(\omega_{mi}^2 - \omega_{nk}^2)}\sin(\omega_{nk}t), \\ \qquad m \neq n \text{ или } i \neq k, \\ -\dfrac{\tilde{E}_m}{2\omega_{mi}}t\cos(\omega_{mi}t), \\ \qquad m = n, i = k. \end{cases}$$

$$q_m = \frac{2}{l}\int_0^l q\sin(\omega_{nk}t)\sin\Theta_m x\,dx = E_m\sin(\omega_{nk}t). \quad (3.5)$$

Константы интегрирования A_{mi}, B_{mi} в соответствии с решением (3.5) и при нулевых начальных условиях будут определяться соотношениями

$$A_{mi} = 0, \qquad B_{mi} = -\frac{1}{\omega_{mi}}\alpha, \quad (3.6)$$

где $\alpha = \begin{cases} \dfrac{\omega_{nk}\tilde{E}_m}{(\omega_{mi}^2 - \omega_{nk}^2)} \text{ при } m \neq n \text{ или } i \neq k, \\ -\dfrac{\tilde{E}_m}{2\omega_{mi}} \text{ при } m = n, i = k. \end{cases}$

4. Результаты

Рассмотрим поперечные колебания упругих трехслойных стержней под действием конкретных локальных импульсных и резонансных нагрузок внутри участка $0 \leqslant x \leqslant b \leqslant l$. Для их аналитической записи воспользуемся единичной функцией Хевисайда $H_0(x)$ и дельта-функцией Дирака $\delta(t)$ [7]. Численный счет проводим для трехслойного стержня единичной длины, слои которого набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Относительные толщины слоев — $h_1 = 0,01$, $h_2 = 0,05$, $c = 0,09$.

1. Пусть в начальный момент времени на поверхность стержня воздействует мгновенный равномерно распределенный прямоугольный силовой импульс ($q_{\text{и}} = \text{const}$) (кривая 1 на рис. 1).

$$q(x,t) = q_{\text{и}}\delta(t)H_0(b-x). \quad (4.7)$$

Коэффициентами разложения (4.7) в ряд по базисным функциям будут

$$q_m = \frac{2}{l}\int_0^l q_{\text{и}}\delta(t)H_0(b-x)\sin\Theta_m x\,dx = \frac{2q_{\text{и}}\delta(t)}{\pi m}\left(1-\cos\Theta_m b\right).$$

Функция времени, соответствующая (3.2), имеет вид

$$\zeta_{mi}(t) = \frac{2q_{\text{и}}\delta_{m3i}\sin(\omega_{mi}t)}{\pi m\omega_{mi}\sum\limits_{k=1}^{4} M_{mkk}\delta_{mki}^2}\left(1-\cos\Theta_m b\right).$$

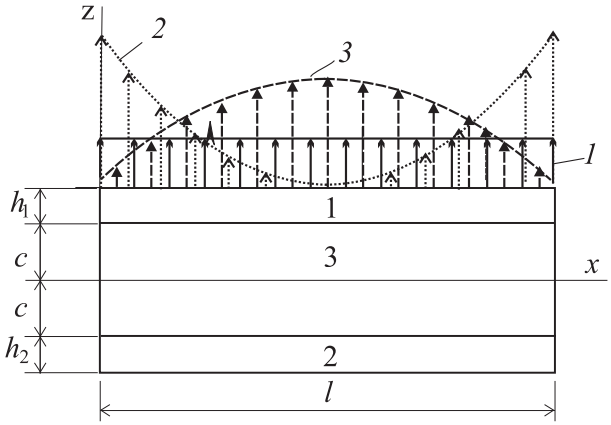


Рис. 1

2. Пусть на стержень действует резонансная равномерно распределенная поверхностная нагрузка

$$q(x,t) = q_0 H_0(b-x)\sin(\omega_{\text{тк}} t). \tag{4.8}$$

Подставляя (4.8) в формулу (3.5), получаем

$$E_m = \frac{2q_0}{\pi m}\left(1-\cos\Theta_m b\right), \qquad m = 1,2,3,\ldots. \tag{4.9}$$

Функция времени определяется выражением (3.1), где константы интегрирования A_{mi}, B_{mi} вычисляются по формулам (3.6) с учетом (4.9).

Если коэффициент $E_m = 0$, то мы имеем явление, называемое ложным резонансом, — частота возмущающей силы совпадает с одной из собственных частот колебаний трехслойного стержня, однако нарастания амплитуды колебаний не происходит. Ложный резонанс имеет место, если в (4.9)

$$\begin{gathered}\cos\Theta_m b = 1, \text{ или} \\ b = \frac{2pl}{m} \leqslant l \quad (p = 1,2,3,\ldots).\end{gathered} \tag{4.10}$$

Таким образом, если длина участка b, на который действует равномерно распределенная нагрузка (4.8), удовлетворяет условию (4.10), то резонансная составляющая решения (3.5) будет нулевой.

3. Если локальная вогнутая параболическая нагрузка (кривая 2 на рис. 1) приложена импульсно внутри участка, то

$$q(x,t) = 4q_{\text{и}}\delta(t)\left(\frac{x}{b}-\frac{1}{2}\right)^2 H_0(b-x). \tag{4.11}$$

Параметрами разложения нагрузки (4.11) в ряд являются

$$q_m = q'_m q_{\text{и}}\delta(t), \quad m = 1,2,3,\ldots,$$

$$q' = \frac{8q_0(t)}{\pi m}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos\Theta_m b + \right.$$
$$+ \frac{2l}{\pi m b^2}\left(\frac{b}{2}\sin\Theta_m b + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{l}{\pi m}\left(\cos\Theta_m b - 1\right)\right)\right]. \tag{4.12}$$

Используя (4.12), функцию времени можно записать в виде

$$\zeta_{mi}(t) = \frac{q'_m q_{\text{и}}\delta_{m3i}\sin(\omega_{mi}t)}{\omega_{mi}\sum\limits_{k=1}^{4} M_{mkk}\delta^2_{mki}}.$$

Рис. 2 иллюстрирует изменение перемещений $w_1(a)$, $u_1(b)$ вдоль оси стержня в момент времени $t = 2$ с при воздействии вогнутого параболического импульса q': $b = l/2$ (кривая 1); $b = l$ (кривая 2). Интенсивность нагрузки составляет $q'_{\text{и}} = 3q_{\text{и}}$, $q_{\text{и}} = 10^4$ Па·с. С увеличением области действия нагрузки растут и перемещения.

4. В случае локального воздействия на поверхность стержня вогнутой параболической резонансной нагрузки вида

$$q(x,t) = 4q_0 H_0(b-x)\times$$
$$\times\left(\frac{x}{b}-\frac{1}{2}\right)^2\sin(\omega_{nk}t) \tag{4.13}$$

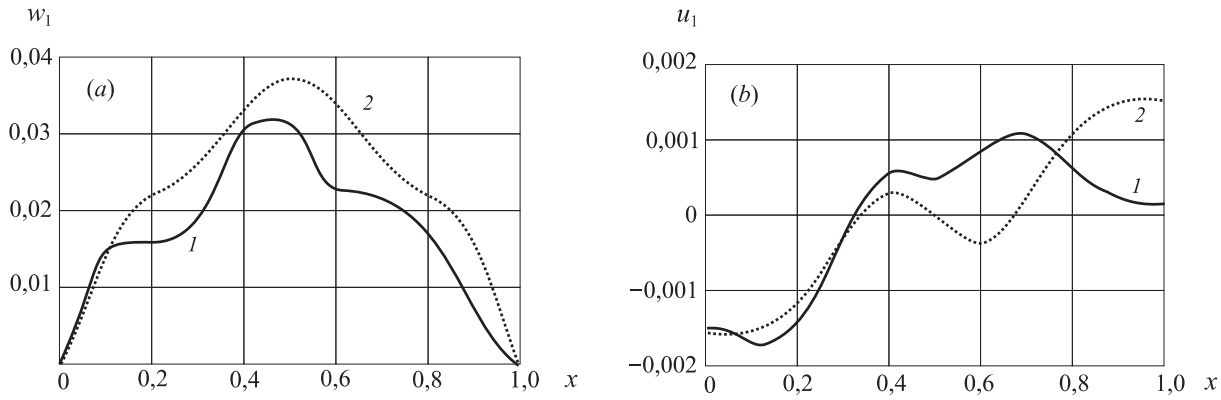


Рис. 2

(где q_0, n, k — заданные параметры) коэффициентами разложения нагрузки в ряд будут

$$q_m = E_m \sin(\omega_{nk} t), \quad E_m = q'_m q_0, \qquad (4.14)$$

где коэффициенты q'_m определяются соотношениями (4.12).

В этом случае дифференциальное уравнение (3.4), его решения (3.5), (3.6) сохраняют свой вид, но параметры E_m нужно вычислять по формулам (4.14).

На рис. 3 показаны прогиб $w_1(x = l/2)$ и перемещение u_1 $(x = l)$ трехслойного стержня в зависимости от длины области локальной нагрузки в момент времени $t = 2$ с при резонансе по частоте $\omega_{11} = 444\, c^{-1}$. Рассматриваемая вогнутая параболическая нагрузка с амплитудой $q'_0 = 3\, q_0$ статически эквивалентна прямоугольной нагрузке q_0. Кривые 1, 3 соответствуют воздействию параболической нагрузки с амплитудами q'_0 и $q_0 = 1,5 \cdot 10^3$ Па соответственно, 2 — прямоугольной q_0. Перемещения от прямоугольной нагрузки превалируют.

5. Если локальная выпуклая параболическая нагрузка (кривая 3 на рис. 1) приложена импульсно внутри указанного участка, то

$$q(x,t) = \frac{4x q_{\text{и}} \delta(t)}{b}\Big(1 - \frac{x}{b}\Big) H_0(b - x), \qquad q_{\text{и}} = \text{const}. \qquad (4.15)$$

Параметрами разложения нагрузки (4.15) в ряд будут

$$q_m = \frac{8 l q_1 \delta(t)}{b(\pi m)^2}\left[\frac{2l}{b\pi m}(1 - \cos\Theta_m b) - \sin\Theta_m b\right]. \qquad (4.16)$$

В этом случае функцию времени получим в виде

$$\zeta_{mi}(t) = \frac{8 l q_{\text{и}} \delta_{m3i} \sin(\omega_{mi} t)}{b(\pi m)^2 \omega_{mi} \sum\limits_{k=1}^{4} M_{mkk} \delta^2_{mki}} \times \left[\frac{2l}{b\pi m}(1 - \cos\Theta_m b) - \sin\Theta_m b\right].$$

На рис. 4 показано изменение во времени прогиба (a) и продольного перемещения (b) внешнего слоя, взятых в центре и на правом конце трехслойного стержня соответственно, при воздействии выпуклых параболических $q'_{\text{и}} = 1,5\, q_{\text{и}}$ (кривая 1), $q_{\text{и}} = 10^4$ Па·с (кривая 3) и прямоугольной $q_{\text{и}}$ (кривая 2) импульсных нагрузок, распределенных на участке $x \leqslant l/2$. Здесь параболический $q'_{\text{и}}$ и прямоугольный $q_{\text{и}}$ импульсы статически эквивалентны. При одинаковой амплитуде импульсов максимальный прогиб от выпуклого параболического импульса меньше, чем от прямоугольного. Если импульсы статически эквивалентны, то прогиб 1, вызванный параболическим импульсом, несколько больше. Примерно такая же картина наблюдается и для продольных перемещений.

6. В случае локального воздействия на поверхность стержня выпуклой параболической резонансной нагрузки, ее можно записать в виде

$$q(x,t) = \frac{4 q_0 x H_0(b - x)}{b}\Big(1 - \frac{x}{b}\Big)\sin(\omega_{nk} t), \qquad (4.17)$$

где q_0, n, k — заданные параметры нагрузки.

Коэффициентами разложения нагрузки в ряд являются

$$q_m = E_m \sin(\omega_{nk} t);$$

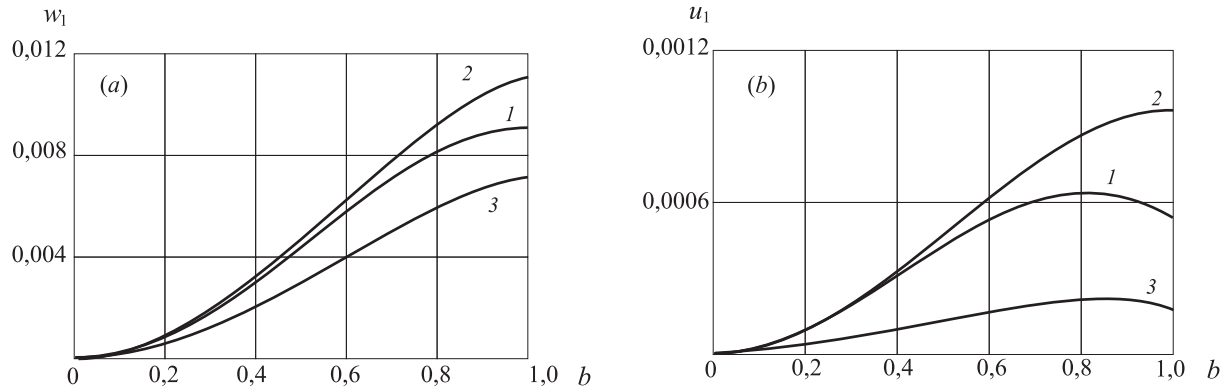


Рис. 3

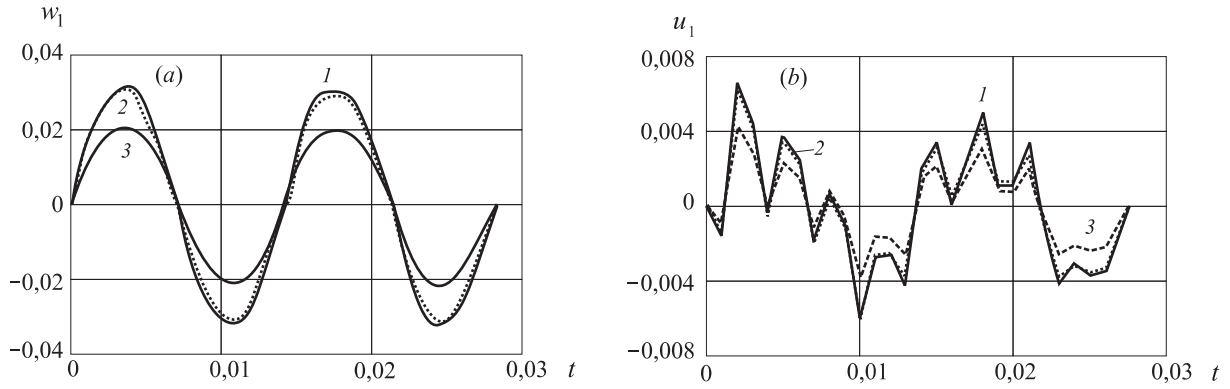


Рис. 4

$$\tilde{E}_{mi} = E_m \delta_{m3i} \Big/ \sum_{k=1}^{4} M_{mkk} \delta_{mki}^2, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$E_m = \frac{8lq_0}{b(\pi m)^2} \frac{2l}{b\pi m}(1 - \cos \Theta_m b) - \\ - \sin \Theta_m b = 0. \quad (4.18)$$

Ложный резонанс здесь также может иметь место, если в (4.17) длина локального участка b удовлетворяет уравнению

$$\frac{2l}{b\pi m}(1 - \cos \Theta_m b) - \sin \Theta_m b = 0.$$

Отсюда имеем две серии решений:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi m b}{2l}\right) = \frac{\pi m b}{2l}, \qquad b = \frac{2pl}{m} \leqslant l \quad (p = 1, 2, 3, \ldots). \quad (4.19)$$

Таким образом, если длина участка b, на который действует параболическая нагрузка (4.16), удовлетворяет условиям (4.19), то резонансная составляющая решения (3.5) будет нулевой, так как соответствующий коэффициент $E_m = 0$. Нарастания амплитуды колебаний не произойдет.

На рис. 5 показаны прогиб w_1 $(x = l/2)$ и перемещение u_1 $(x = l)$ трехслойного стержня в зависимости от длины области воздействия локальной резонансной нагрузки в момент времени $t = 2$ с при резонансе по частоте $\omega_{11} = 444\, c^{-1}$. Кривые 1, 3 соответствуют выпуклой параболической нагрузке с амплитудами $q_0' = 1,5q_0$ и $q_0 = 1,5 \cdot 10^3$ Па соответственно, 2 — прямоугольной q_0. При одинаковой амплитуде нагрузок прогиб от параболической меньше на 18%. Если параболическая нагрузка статически эквивалентна прямоугольной, то прогиб от нее больше на 20%.

Следовательно, при одинаковом статическом эквиваленте динамическая поверхностная выпуклая параболическая нагрузка является с точки зрения прочности элементов конструкций более опасной, чем равномерно распределенная, так как вызывает большие про-

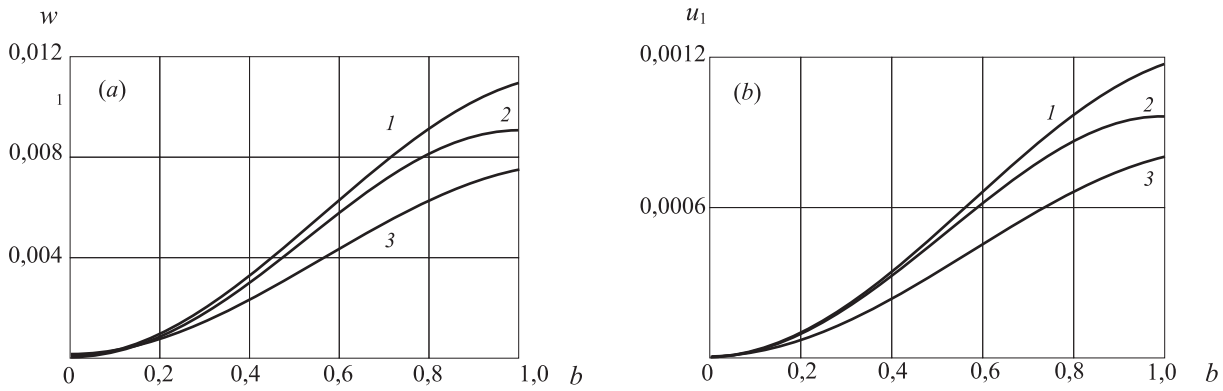


Рис. 5

гибы. В свою очередь вогнутая параболическая нагрузка вызывает меньшие прогибы по сравнению со статически эквивалентной прямоугольной нагрузкой, поскольку основная ее часть рассредоточена к опорам стержня.

Литература

1. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В.* Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 6. С. 91–98.
2. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В.* Колебания круглой линейно-вязкоупругой трехслойной пластинки // Проблемы прочности. 2001. № 3. С. 100–107.
3. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В.* Локальные динамические воздействия на круговые трехслойные пластины // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы VIII Междунар. симпозиума. М., 2002. С. 181–192.
4. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В.* Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 1. С. 79–85.
5. *Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В.* Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2001. № 4. С. 37–40.
6. *Старовойтов Э. И.* Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. Гомель: БелГУТ, 2002. 343 с.
7. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В.* Теория упругости и пластичности. М: Физматлит, 2002. 416 с.

Статья поступила 14 июня 2003 г.
Московский государственный технический университет (МАИ)
Белорусский государственный университет транспорта
© Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., 2004