УДК 532.546

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЕРКИНСА – КЕРНА

***Гордеев Ю. Н.*[1], *Сандаков А. Е.*[2]**

A GENERALIZED MODEL OF PERKINS–KERN HYDRAULIC FRACTURING

Gordeev Yu. N., Sandakov A. E.

The generalized model of Perkins–Kern hydraulic fracturing is considered. The model takes into account conjugation of fields of elasticity and fluid pressure in the fracture.

The problem is solved with the application of an asymptotic method. The fracture opening displacement obtained takes into account corrections to the classical solution of Perkins-Kern fracture opening displacement of a fluid pressure field in the fracture and an elastic field.

Введение

В классической задаче о раскрытии трещины Перкинса – Керна [1] поле упругости и поле давления течения жидкости не влияют на взаимодействие раскрытий трещины в ее различных вертикальных сечениях. Различные обобщения данной задачи рассматривались в работах [2–5].

В данной работе, благодаря применению асимптотического метода, было получено обобщение трещины гидроразрыва Перкинса – Керна с учетом взаимодействия этих полей в предположении, что длина трещины много больше высоты пласта.

1. Постановка задачи

Рассматривается симметричная относительно скважины вертикальная трещина постоянной высоты $2H$ и большой протяженности в горизонтальном направлении $2L \gg 2H$, где $2L$ — характерная длина. Трещина занимает в плоскости $y = 0$ область $G(|x| < L, H^- < z < H^+)$, $H^+ - H^- = 2H$. В данном случае полагается $H^+, H^- = \text{const}$. Трещина вскрывает продуктивный пласт ($|z| < H$) и прилегающие к нему горные породы ($|z| > H$). Упругие постоянные пласта и горных пород считаются одинаковыми, длина трещины $2L$ и распределение давления жидкости в ней $p(x)$ полагаются известными. Заданными также считаются значение постоянного бокового горного давления в массиве σ и модуля сцепления K, характеризующего трещиностойкость пласта и окружающих его пород.

При этом функция $p(x)$ является медленно меняющейся по переменной x, что позволяет использовать для решения задачи асимптотические методы.

Далее в работе H^+, H^- считаются известными и равными $H^\pm = \pm H$ соответственно. Тогда характерный вертикальный размер трещины $2H$.

Определение раскрытия трещины $2w(x, z)$ сводится к решению уравнений равновесия упругой породы при следующих условиях на границах трещины:

$$\sigma_{yy}(x, z, 0) = \sigma - p(x), \tag{1.1}$$

$$\sigma_{xy}(x, z, 0) = \sigma_{xz}(x, z, \pm 0), \quad (x, z) \in G. \tag{1.2}$$

Здесь $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ — компоненты напряжений. Задача (1.1)–(1.2) эквивалентна решению интегро-дифференциального уравнения относительно смещения поверхности трещины $w(x, z) \geqslant 0$, совпадающей с границей полупро-

[1]Гордеев Юрий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» Московского инженерно-физического института (Государственного университета).

[2]Сандаков Антон Евгеньевич, аспирант кафедры «Высшая математика» Московского инженерно-физического института (Государственного университета).

странства $y > 0$ [6]

$$\Delta_{xz} \iint\limits_G \frac{w(x',z')dx'dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(z-z')^2}} = \\ = -2\pi\beta(p(x)-\sigma), \quad (1.3)$$

$$\Delta_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \beta = \frac{2(1-\nu^2)}{E}, \quad (x,z) \in G.$$

Здесь E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона пласта и вмещающих его пород соответственно.

Обозначая $\psi(x) = -2\pi\beta(p(x)-\sigma)$ и применяя к обеим частям (1.3) преобразования Фурье по переменным (x,z) с параметром $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, было получено

$$\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right) F\left[\iint\limits_G \frac{w(x',z')dx'dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(z-z')^2}}\right] = \\ = -\widetilde{\psi}.$$

Рассматривая левую часть последнего выражения как преобразование Фурье от свертки функций [7] и учитывая, что $F(1/r) = 2\pi/|\xi|$ [6]

$$2\pi P_G\left\{F^{-1}(|\xi|) * w(x,z)\right\} = -\psi(x).$$

Здесь P_G — оператор сужения на область G.

Асимптотический метод решения уравнения (1.3) основан на разложении интегро-дифференциального оператора по малому параметру $\varepsilon = H/L$, характеризующему степень вытянутости трещины, предложенном в работе [8]. Чтобы параметр ε явно вошел в уравнение (1.3), следует перейти к безразмерным переменным вида

$$X = x/L, Z = z/(\varepsilon L), \varepsilon = H/L, \\ W = w/(\varepsilon L\beta\sigma_\infty), \Psi = (p-\sigma)/\sigma_\infty,$$

где σ_∞ — характерное значение бокового горного давления σ.

Учитывая проделанное выше преобразование Фурье и вводя обозначение F_{XZ} для преобразование Фурье в новых переменных (X,Z) с параметром $\xi = (\xi_X, \xi_Z)$, запишем

$$F_{XZ}\left[\frac{1}{r}\right] = \iint\limits_{R^2} \frac{\exp[i\,(X\xi_X + Z\xi_Z)]}{\sqrt{(LX)^2+(\varepsilon LZ)^2}} dXdZ = \\ = \frac{2\pi}{\varepsilon L}\frac{1}{\sqrt{\xi_X^2+\varepsilon^{-2}\xi_Z^2}}.$$

Тогда, используя $F_{xz}(1/r) = 2\pi/|\xi|$, можно дописать, что

$$F^{-1}(|\xi|) = \varepsilon^{-2} F_{XZ}^{-1}\left(\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}\right).$$

Учитывая то, что в новых координатах (X,Z) свертка уменьшается в ε раз, получим

$$P_{G'}\left\{F_{XZ}^{-1}\left(\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}\right) * W(X,Z,\varepsilon)\right\} = \\ = \varepsilon\Psi(X,\varepsilon).$$

Здесь $P_{G'}\{\}$ — оператор сужения на область G', т. е. область G в новых переменных (X,Z).

Далее необходимо отыскать асимптотику множителя $F_{XZ}^{-1}\left(\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}\right)$ как обобщенной функции при малом параметре $\varepsilon \to 0$. Для этого следует найти асимптотику функции $\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}$, а затем, используя непрерывность оператора $F_{XZ}^{-1} : S'(R^2) \to S'(R^2)$, применить ее к членам полученного разложения. Под пространствами $S(R^2)$ и $S'(R^2)$ понимаются пространство основных и пространство обобщенных функций соответственно.

Пусть $\varphi \in S(R^2)$, т. е. φ — бесконечно дифференцируемая и финитная функция, а $\overline{\varphi}$ — соответствующая ей комплексно-сопряженная функция. Для удобства введем функцию $\theta(t) = \{1, t > 0; 0, t \leqslant 0\}$.

Тогда

$$\left(\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}, \varphi\right) = \\ = \iint\limits_{R^2} \sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}\big[\overline{\varphi}(\xi_X,\xi_Z) - \\ - \theta(1-|\xi_Z|)\overline{\varphi}(\xi_X,0)\big]d\xi_X d\xi_Z + \\ + \int\limits_{R^1} \overline{\varphi}(\xi_X,0)d\xi_X \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}d\xi_Z. \quad (1.4)$$

Пользуясь условием $\varepsilon \to 0$, можно записать

$$\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2} = |\xi_Z|\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2\xi_X^2}{\xi_Z^2}} = \\ = |\xi_Z| + \frac{1}{2}\varepsilon^2\xi_X^2|\xi_Z|^{-1} + O(\varepsilon^2).$$

Воспользуемся оценкой

$$\left|\left(\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}-|\xi_Z|\right)\left[\overline{\varphi}(\xi_X,\xi_Z)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\,\theta(1-|\xi_Z|)\overline{\varphi}(\xi_X,\xi_Z)\right]\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left|\varepsilon^2\xi_X^2|\xi_Z|^{-1}\left[\overline{\varphi}(\xi_X,\xi_Z)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\,\theta(1-|\xi_Z|)\overline{\varphi}(\xi_X,\xi_Z)\right]\right|\in L_1(R^2).$$

Здесь $L_1(R^2)$ — пространство интегрируемых по Лебегу функций.

Стоит отметить, что в последнем выражении устранена особенность при $|\xi_Z|\to 0$ благодаря определению функции $\theta(t)$ и финитности функции φ.

С помощью теоремы Лебега для первого слагаемого (1.4) было получено

$$\iint\limits_{R^2}\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}\left[\overline{\varphi}(\xi_X,\xi_Z)-\right.$$
$$\left.-\,\theta(1-|\xi_Z|)\overline{\varphi}(\xi_X,0)\right]d\xi_X d\xi_Z=$$
$$=\iint\limits_{R^2}|\xi_Z|\overline{\varphi}(\xi_X,\xi_Z)d\xi_X d\xi_Z-$$
$$-\int\limits_{R^1}\overline{\varphi}(\xi_X,0)d\xi_X+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\iint\limits_{R^2}\xi_X^2|\xi_Z|^{-1}\left[\overline{\varphi}(\xi_X,\xi_Z)-\right.$$
$$\left.-\,\theta(1-|\xi_Z|)\overline{\varphi}(\xi_X,0)\right]d\xi_X d\xi_Z+O(\varepsilon^2).$$

Далее используется легко проверяемое соотношение

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}d\xi_Z=$$
$$=1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\xi_X^2\left[1+\ln\left(\frac{4}{\varepsilon^2\xi_X^2}\right)\right]+O(\varepsilon^2).$$

Подстановка этого выражения во второе слагаемое (1.4) приводит к соотношению

$$\int_{R^1}\overline{\varphi}(\xi_X,0)d\xi_X\int_{-1}^{1}\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}d\xi_Z=$$
$$=\int_{R^1}\overline{\varphi}(\xi_X,0)d\xi_X+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_{R^1}\xi_X^2\left[\ln\left(\frac{4}{\varepsilon^2\xi_X^2}\right)+1\right]\times$$
$$\times\,\overline{\varphi}(\xi_X,0)d\xi_X+O(\varepsilon^2).$$

Подставим полученные выше выражения для первого и второго слагаемых в (1.4). В результате имеем

$$\left(\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2},\varphi\right)=$$
$$=\iint\limits_{R^2}|\xi_Z|\overline{\varphi}(\xi_X,\xi_Z)d\xi_X d\xi_Z+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\iint\limits_{R^2}\xi_X^2|\xi_Z|^{-1}\left[\overline{\varphi}(\xi_X,\xi_Z)-\right.$$
$$\left.-\,\theta(1-|\xi_Z|)\overline{\varphi}(\xi_X,0)\right]d\xi_X d\xi_Z+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int\limits_{R^1}\xi_X^2\left[\ln\left(\frac{4}{\varepsilon^2\xi_X^2}\right)+1\right]\overline{\varphi}(\xi_X,0)d\xi_X+$$
$$+\,O(\varepsilon^2).$$

Для функции $\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}$ как обобщенной функции была получена следующая асимптотика:

$$\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}=|\xi_Z|+\frac{1}{2}\varepsilon^2\xi_X^2\times$$
$$\times\left[P\frac{1}{|\xi_z|}+\delta(\xi_Z)\left(\ln\frac{4}{\varepsilon^2\xi_X^2}+1\right)\right]+$$
$$+\,O(\varepsilon^2),\quad(1.5)$$

где $\delta(\xi_Z)$ — дельта-функция Дирака, а $P\frac{1}{|\xi_z|}$ — обобщенная функция, определяемая формулой

$$\left(P\frac{1}{|\xi_z|},\varphi\right)=\iint_{R^2}|\xi_Z|^{-1}\left[\overline{\varphi}(\xi_X,\xi_Z)-\right.$$
$$\left.-\,\theta(1-|\xi_Z|)\overline{\varphi}(\xi_X,0)\right]d\xi_X d\xi_Z.$$

Применяя к (1.5) обратное преобразование Фурье F_{XZ}^{-1} в переменных (X,Z), можно записать

$$F_{XZ}^{-1}\left[|\xi_Z|\right]=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial Z}P\frac{1}{Z}\delta(X),$$
$$F_{XZ}^{-1}\left[\xi_X^2\delta(\xi_Z)\right]=-\frac{1}{2\pi}\delta''(X),$$
$$F_{XZ}^{-1}\left[\xi_X^2P\frac{1}{|\xi_Z|}\right]=\frac{1}{\pi}\left(\gamma+\ln|Z|\right)\delta''(X),$$
$$F_{XZ}^{-1}\left[\xi_X^2\ln|\xi_X|\delta(\xi_Z)\right]=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\gamma\delta''(X)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}P\frac{1}{|X|}\right).\quad(1.6)$$

Здесь γ — постоянная Эйлера, а $\delta''(X)$ — вторая производная от Дельта-функции Дирака.

С помощью подстановки (1.6) в (1.5) получим

$$F_{XZ}^{-1}\left[\sqrt{\varepsilon^2\xi_X^2+\xi_Z^2}\right]=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial Z}P\frac{1}{Z}\delta(X)-\frac{1}{2\pi}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2}\delta''(X)\left(1+\ln\frac{4}{\varepsilon^2}\right)-\ln|Z|\delta''(X)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}P\frac{1}{|X|}\right].$$

Таким образом, при помощи преобразования Фурье и аппарата обобщенных функций поставленная задача приводится к следующему виду, удобному для последующего построения асимптотического разложения решения

$$\Phi(X,Z,\varepsilon)*W(X,Z,\varepsilon)=$$
$$=-2\pi\Psi(X),(X,Z)\in G'. \quad (1.7)$$

Здесь

$$\Phi*W=\iint_{G'}\Phi(X'-X,Z'-Z,\varepsilon)\times$$
$$\times W(X',Z',\varepsilon)dX'dZ',$$

$$\Phi(X,Z,\varepsilon)=\Phi_0(X,Z)+\varepsilon^2\ln(2/\varepsilon)\delta''(X)+$$
$$+\varepsilon^2\Phi_2(X,Z)+o(\varepsilon^2),$$

$$\Phi_0(X,Z)=-2\delta(X)\frac{\partial}{\partial Z}P\frac{1}{Z},$$

$$\Phi_2(X,Z)=\delta''(X)(1-\ln|Z|)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}p\frac{1}{|X|}.$$

2. Определение раскрытия трещины

Решение (1.7) представляется в виде разложения искомой функции $W(X,Z)$ в ряд по малому параметру ε

$$W(X,Z,\varepsilon)=W_0(X,Z)+\varepsilon^2\ln(2/\varepsilon)V(X,Z)+$$
$$+\varepsilon^2W_2(X,Z)+o(\varepsilon^2). \quad (2.1)$$

Подстановка разложения (2.1) в (1.7) и приравнивание членов, стоящих при одинаковых степенях ε, дает систему уравнений

$$\Phi_0*W_0=-2\pi\Psi(X), \quad (2.2)$$

$$\Phi_0*V=-\delta''(X)*W_0, \quad (2.3)$$

$$\Phi_0*W_2=-\Phi_2*W_0. \quad (2.4)$$

Используя свойства дифференцирования свертки функций и свойство дельта-функции Дирака, для уравнения (2.3) можно записать

$$\Phi_0*V=-\delta''(X)*W_0=$$
$$=-\frac{d^2}{dX^2}\int_{-1}^{1}W_0(X,Z)dZ.$$

Каждое уравнение системы (2.2)–(2.4) представляет собой уравнение плоской задачи теории упругости о прямолинейной трещине нормального отрыва со специфическими распределениями нагрузок вдоль берегов. Переменная X входит в каждое уравнение как параметр, а учет нелокальных эффектов осуществляется только через правые части последних двух уравнений (т. е. уравнений (2.3) и (2.4)), содержащих операторы свертки.

Система (2.2)–(2.4) решается последовательно: сначала из (2.2) находится $W_0(X,Z)$, а затем из (2.3)–(2.4) — функции $V(X,Z)$ и $W_2(X,Z)$.

Подставляя выражение для $\Phi_0(X,Z)$ из (1.7) в (2.2), получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{W_0'(X,\eta)}{\eta-Z}d\eta=\pi\Psi(X),$$
$$W_0'=\frac{\partial}{\partial Z}W_0(X,Z). \quad (2.5)$$

Сингулярное уравнение (2.5) при каждом $X=\text{const}$ имеет аналитическое решение [9]

$$W_0'=\frac{1}{\sqrt{1-Z^2}}\left(\pi\Psi(X)\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-Z}d\eta+\right.$$
$$\left.+C_1(X)\right). \quad (2.6)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, $C_1(X)$ — произвольная постоянная (параметрически зависящая от X), выбираемая из условия обращения в нуль $W_0(X,Z)$ на обоих концах трещины $Z=\pm1$. Тогда по формуле Ньютона — Лейбница можно записать

$$W_0(X,Z)=\int_{-1}^{Z}W_0'(X,\eta)d\eta.$$

После подсчета необходимых в (2.6) интегралов и определения $C_1(X)$, было получено

$$W_0(X,Z)=\pi^2\Psi(X)\sqrt{1-Z^2}. \quad (2.7)$$

Стоит отметить, что поправка (2.7) представляет собой решение классической задачи о раскрытии трещины гидроразрыва Перкинса – Керна.

Далее, используя [9], из (2.3) можно записать

$$V(X,Z) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1-Z^2}\frac{d^2}{dX^2}\langle W_0\rangle,$$

где $\langle W_0\rangle = \int_{-1}^{1} W_0(X,Z)dZ$.

В итоге было получено, что

$$V(X,Z) = \frac{\pi^2}{4}\sqrt{1-Z^2}\frac{d^2}{dX^2}\Psi(X).$$

Используя формулы Келдыша – Седова [9], а также выражения для $W_0(X,Z)$ и $\langle W_0(X)\rangle$, было найдено решение сингулярного уравнения (2.4) для поправки $W_2(X,Z)$

$$W_2(X,Z) = \frac{\pi^2}{8}\sqrt{1-Z^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^2\Psi(\xi)}{d\xi^2}\frac{d\xi}{|X-\xi|}+ \\ + \frac{\pi}{2}\frac{d^2\Psi(X)}{dX^2}\int_{-1}^{1}\ln\left(\frac{\sqrt{(Z+1)(1-\xi)}}{\sqrt{2|Z-\xi|}}+ \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{(\xi+1)(1-Z)}}{\sqrt{2|Z-\xi|}}\right)\gamma_2(\xi)d\xi,$$

где

$$\gamma_2(\xi) = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-\eta^2}\ln\frac{e}{|\xi-\eta|}d\eta.$$

Здесь соответствующие сингулярные интегралы следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, после подсчета усредненных по переменной Z величин

$$\langle V(X)\rangle = \int_{-1}^{1} V(X,Z)dZ,$$

$$\langle W_2(X)\rangle = \int_{-1}^{1} W_2(X,Z)dZ$$

было получено, что полное раскрытие трещины гидроразрыва Перкинса – Керна представляется в следующем виде:

$$W(X,\varepsilon) = \langle W_0(X)\rangle + \varepsilon^2\ln(2/\varepsilon)\langle V(X)\rangle + \\ + \varepsilon^2\langle W_2(X)\rangle. \quad (2.8)$$

Заключение

В данной работе предложено обобщение модели трещины гидроразрыва Перкинса – Керна. Поставленная задача решалась с помощью асимптотического метода.

Первое слагаемое $\langle W_0(X)\rangle$ в разложении (2.8) является классическим решением задачи раскрытия трещины гидроразрыва Перкинса – Керна. Второе и третье слагаемые в (2.8) учитывают влияние поля давления жидкости в трещине упругого поля на раскрытие трещины Перкинса – Керна.

Литература

1. *Perkins T. K., Kern L. R.* Width of hydraulic fractures // J.Petrol. Technol. 1961. Vol. 13. P. 937–949.
2. *Adachi J., Detournay E.* Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid. Int. J. Numer. Anal. Met. 2002. Vol. 26. No. 6. P. 579–604.
3. *Adachi J., Detournay E.* Simulation of a plane-strain hydraulic fracture with fluid leak-off using an explicit moving mesh algorithm. In NARMS-TAC 2002: Mining and Tunnelling Innovation and Opportunity. Vol. 2. Toronto: University of Toronto Press, 2002. P. 1031–1038.
4. *Detournay E., Adachi J. I., Garagash D. I.* Asymptotic and intermediate asymptotic behaviour near the tip of a fluid-driven fracture. In Structure Integrity and Fracture (Proceedings of SIF 2002, Perth, Australia, September 2002). Rotterdam: Balkema, 2002. P. 9–18.
5. *Алексеенко О. П., Гордеев Ю. Н., Зазовский А. Ф.* Глубокопроникающий гидравлический разрыв пласта. В сб.: Тез. докл. Седьмой всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Москва, 1991. С. 91–96.
6. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
8. *Гольдштейн Р. В., Корельштейн Л. Б.* Асимптотическое решение задач теории упругости о трещинах, вытянутых вдоль пространственной кривой // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 858–865.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Статья поступила 24 ноября 2007 г.
Московский инженерно-физический институт (Государственный университет), г. Москва
© Гордеев Ю. Н., Сандаков А. Е., 2007