

УДК 532.546

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БАТАРЕИ СКВАЖИН С ПОТОКОМ ПОДЗЕМНЫХ ВОД*Скворцов Э. В.¹, Суючева Д. Т.²***REGULAR BARRIER LINE IN A CONTAMINATED GROUNDWATER FLOW**

Skvortsov E. V., Suyucheva D. T.

The interaction of a contaminated groundwater flow with perpendicular line of regularly spaced equal wells ("regular barrier line") was studied. The capture zone boundary was calculated using the complex analysis method in the frame of the potential flow scheme. The critical flow rates were found, at which capture zone gaps appeared. The sequence of capture zone appearance was determined.

Введение

В насыщенных водой пластах возможны природные потоки, которые способны переносить загрязнения на большие расстояния, в результате чего образуются крупные ареалы загрязнений. Поэтому проводят мероприятия по их локализации и ликвидации. Одним из способов защиты подземных вод является воздействие на поток через скважины путем закачки в пласт или откачки из пласта воды. В частности, таким образом на пути потока можно создать гидродинамические барьеры, препятствующие продвижению загрязнений [1].

Важным этапом анализа течения оказывается определение границ зон движения жидкости от скважин (барьеров для загрязненной жидкости) или к скважинам (зон захвата). В двумерном случае это линия раздела воды, текущей по градиенту давления мимо скважины, и воды, текущей к скважине или от нее.

Если реальная гидродинамическая обстановка в достаточной мере допускает описание сравнительно небольшим числом расчетных параметров, то зоны захвата и области, защищаемые гидродинамическими барьерами, удается определить аналитически.

Согласно распространенной схематизации процесса далее считается, что скважины расположены в однородном и изотропном пласте единичной толщины, где существует загрязненный прямолинейно-параллельный природ-

ный поток, жидкость однородна и несжимаема, справедлив закон Дарси, фильтрация стационарна и двумерна, загрязненное и незагрязненное течения гидродинамически одно от другого не отличаются, нагнетательные скважины имитируются источниками.

В этих предположениях для анализа воздействия скважин на поток может быть использована теория функций комплексного переменного [2].

В связи с практическими приложениями отдельный интерес приобрела задача о взаимодействии батареи скважин с природным потоком подземных вод. В работе [3] были найдены огибающие зоны захвата в случаях двух, трех и четырех скважин в прямолинейных батареях, расположенных поперек потока. При этом варианты с прорывом течения между скважинами не рассматривались. В [4] определены те значения безразмерного критического расхода скважины в батарее скважин (до ста), при которых происходит первый в числе возможных прорыв потока между скважинами.

В [5, 6] указан алгоритм определения первого и второго критических расходов для батареи четырех и пяти скважин, приведены их величины, построены границы — барьеры для загрязненного потока, соответствующие этим расходам.

Данная работа является развитием вышеперечисленных исследований. В ней анализируется взаимодействие загрязненного пото-

¹Скворцов Эдуард Викторович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой моделирования экологических систем Казанского государственного университета.

²Суючева Диляра Таировна, программист кафедры моделирования экологических систем Казанского государственного университета.

ка жидкости с батареей нагнетательных скважин, когда их число больше пяти, и выявляются тенденции к прорывам загрязненным потоком гидродинамического барьера, создаваемого при помощи скважин, при произвольном числе скважин в батарее.

1. Постановка задачи

Пусть X, Y — координаты точки плоскости, $v_x = v, v_y = 0$ — проекции скорости потока. При указанных выше условиях существуют потенциал скорости фильтрации Φ и функция тока Ψ . Вводится комплексный потенциал течения $W(Z) = \Phi + i\Psi$, где $Z = X + iY$, i — мнимая единица. Производная $dW/dZ = -v_x + iv_y$ определяет значение скорости течения в произвольной точке рассматриваемой области [2]. Соотношения $W = W(Z)$ и $dW/dZ = 0$ служат основой для анализа течения. Значения координат точек, в которых скорость течения обращается в нуль, позволяя определить характерные линии тока, представляющие интерес, и упомянутые выше критические расходы источников.

Полагается, что в загрязненном потоке на прямой $X = 0$ симметрично прямой $Y = 0$ на равных расстояниях l один от другого расположены n источников одинакового расхода q . Эта схема течения исследована для $n = 2, 3, 4$ (см. введение). Представляет интерес анализ течения для большего числа источников.

Поскольку при этом возможны прорывы потока между источниками, что снижает эффективность гидродинамического барьера для загрязненного потока, следует выяснить, где и в какой последовательности при уменьшении расхода q возникают прорывы. Ниже при изложении материала учитывается симметрия течения относительно оси x и вводятся безразмерные величины $Q = q/(2\pi vl)$, $w(z) = \varphi + i\psi = W(Z)/(vl)$, $\psi = \Psi/(vl)$, $z = Z/l$ при нечетном числе источников и $w(z) = 2W(Z)/(vl)$, $\psi = 2\Psi/(vl)$, $z = 2Z/l$ при их четном числе.

2. Четное число источников в потоке

При $n = 2m$, $m = 1, 2, \dots$ комплексный потенциал течения в соответствии с принципом суперпозиции с точностью до постоянной записывается следующим образом [2]:

$$w(z) = -z - 2Q \sum_{j=1}^m \ln [z^2 + (2j-1)^2], \quad (2.1)$$

а уравнение для определения координат точек нулевой скорости N_j ($j = 1, 2, \dots, m$) имеет вид

$$f(z, Q) = 1 + 4Qz \sum_{j=1}^m \frac{1}{z^2 + (2j-1)^2} = 0. \quad (2.2)$$

Из (2.2) находятся корни уравнения z_j , соответствующие точкам N_j . При достаточно большом значении Q точки N_1 и N_2 располагаются на оси x , остальные точки N_j — попарно симметрично относительно оси x , и существует единый гидродинамический барьер Γ для загрязненного потока.

Пусть далее Q_j — критические значения безразмерного расхода, при которых происходят прорывы барьера потоком между источниками, причем $Q_1 > Q_2 > \dots > Q_m$. Значение Q_1 , соответствующее первому прорыву, находится из условия слияния двух действительных корней $z_1 = x_1$ и $z_2 = x_2$ уравнения (2.2).

Согласно (2.1) функцию тока ψ можно представить в виде

$$\psi = -y - 2Q [\arctg \rho_m(x, y) \pm k\pi], \quad (2.3)$$

где

$$k = 0, 1, \quad \rho_j = \frac{\rho_{j-1} + r_j}{1 - \rho_{j-1}r_j}, \quad \rho_0 = 0, \quad (2.4)$$

$$r_j = \frac{2xy}{x^2 - y^2 + (2j-1)^2},$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Уравнение границы Γ при $Q \geq Q_1$ имеет вид $\psi = -2m\pi Q$. Из него и формул (2.3), (2.4) следует алгебраическое уравнение степени $2m$ относительно x при заданных значениях y и Q , описывающее границу Γ

$$\rho_m(x, y) = -\operatorname{tg} \frac{y}{2Q}, \quad 0 < y < 2m\pi Q. \quad (2.5)$$

Дальнейший анализ течения проиллюстрируем случаем $m = 3$ (рис. 1).

Вычисления показывают, что при $Q = Q_1 = 0,383$ точки нулевой скорости, располагающиеся в верхней полуплоскости $y > 0$, находятся внутри границы Γ (рис. 16). При $Q_2 \leq Q < Q_1$ возникает струйка загрязненной жидкости, примыкающая к оси x , точка $N_2(x_2, y_2)$ располагается в области $y > 0$ на границе Γ , координаты которой удовлетворяют уравнению

$$\rho_3(x, y) = -\operatorname{tg} \frac{y + \psi_2}{2Q}. \quad (2.6)$$

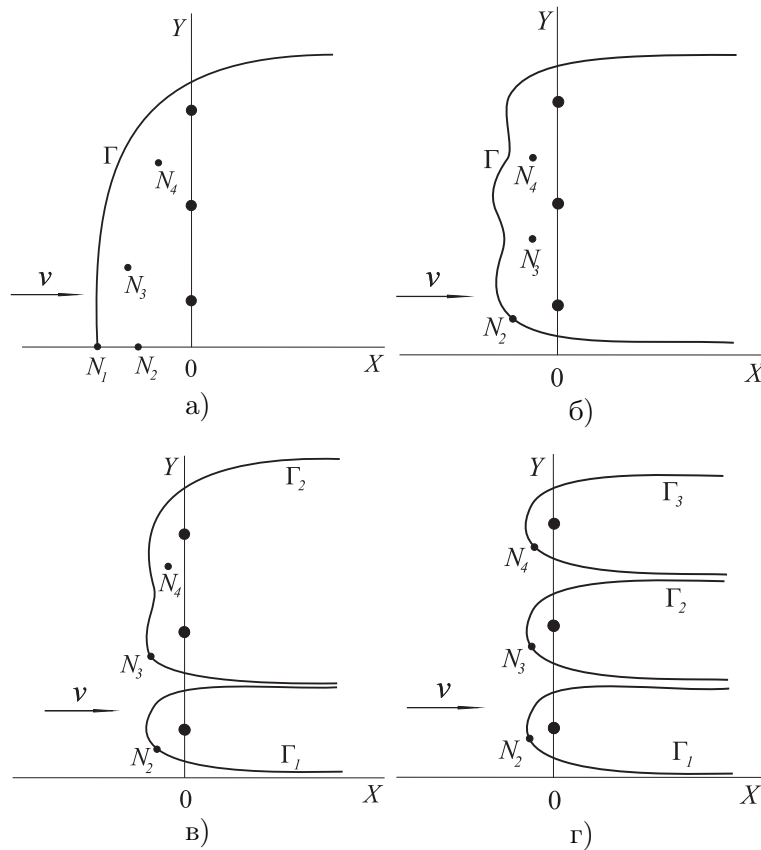


Рис. 1. Схема течения в случае шести источников

Здесь $\psi_2 = \psi_2(x_2, y_2, Q)$, при этом область изменения координаты y определяется автоматически из условия существования действительных корней уравнения (2.6).

Где будет осуществляться второй прорыв барьера, — между первым и вторым либо между вторым и третьим источниками, — заранее неизвестно. При прорыве между первым и вторым источниками на границу Γ должна выйти точка N_3 и, следовательно, должен существовать действительный корень системы уравнений

$$f(z_3, Q_2) = 0,$$

$$\rho_3(x_3, y_3, Q_2) = -\operatorname{tg} \frac{y_3 + \psi_2(x_2, y_2, Q_2)}{2Q_2}.$$

Расчет показывает, что такой корень $Q_2 = 0,351$ существует. Положение границы Γ при $Q = Q_2$ находится в соответствии с уравнением (2.6). При $Q_3 \leq Q < Q_2$ возникает вторая струйка загрязненной жидкости, прорывающая барьер (рис. 1в), граница Γ разделяется на две — Γ_1 и Γ_2 . Кривая Γ_1 строится по уравнению (2.6), кривая Γ_2 — по уравнению

$$\rho_3(x, y) = -\operatorname{tg} \frac{y + \psi_3}{2Q}, \quad (2.7)$$

причем соответствующий диапазон изменения ординаты y определяется автоматически.

При выходе точки N_4 на кривую Γ_2 (рис. 1в) справедлива система уравнений

$$f(z_4, Q_3) = 0,$$

$$\rho_3(x_4, y_4, Q_3) = -\operatorname{tg} \frac{y_4 + \psi_3(x_3, y_3, Q_3)}{2Q_3}.$$

Отсюда находится значение $Q_3 = 0,346$. При $Q < Q_3$ возникает третья струйка загрязненной жидкости (рис. 1г). Границами незагрязненной жидкости служат кривые Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 , причем граница Γ_3 строится по уравнению

$$\rho_3(x, y) = -\operatorname{tg} \frac{y + \psi_4}{2Q}. \quad (2.8)$$

На рис. 2 изображены построенные по формулам (2.5)–(2.8) границы гидродинамических барьеров для загрязненной жидкости при различных значениях величины Q , в частности, при $Q = Q_j$ ($j = 1, 2, 3$).

Описанный выше подход к определению критических расходов источников при $n = 6$ может быть аналогичным образом применен и к общему случаю $n = 2m$. При этом число

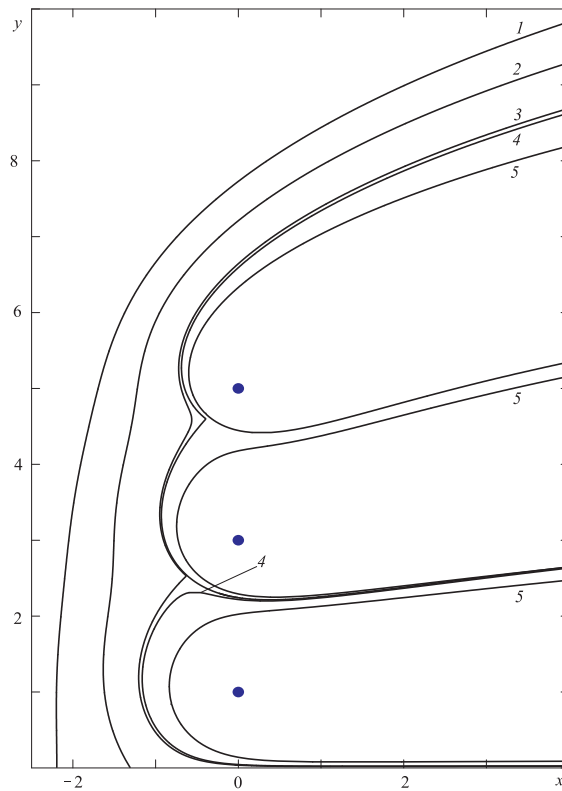


Рис. 2. Границы для потока в случае батареи шести источников. Кривые 1–5 соответствуют значениям параметра $Q = 0,5, 0,383, 0,351, 0,346, 0,3$

теоретически возможных вариантов реализации прорывов загрязненной жидкости между источниками возрастает.

Вместе с тем, расчеты показывают, что при $m = 4$, $n = 8$ первый, второй, третий и четвертый прорывы соответственно, осуществляются сначала вдоль оси x , затем между первым и вторым, вторым и третьим, третьим и четвертым источниками, а критические расходы таковы: $Q_1 = 0,368$, $Q_2 = 0,344$, $Q_3 = Q_4 = 0,339$. Таким образом, прослеживается тенденция последовательного осуществления прорывов от середины батареи источников к ее периферии, при этом соответствующие величины критических расходов постепенно сближаются. Отметим, что при $n \rightarrow \infty$ критический расход стремится к величине $Q = 1/\pi$ [4].

3. Нечетное число источников в потоке

При $n = 2m + 1$, $m = 1, 2, \dots$ комплексный потенциал и функция тока течения имеют вид

$$w(z) = -z - Q \left[\ln z + \sum_{j=1}^m \ln(z^2 + j^2) \right],$$

$$\psi = -y - Q [\arctg \rho_m(x, y) \pm k\pi],$$

где

$$k = 0, 1, \quad \rho_j = \frac{\rho_{j-1} + r_j}{1 - \rho_{j-1}r_j}, \quad \rho_0 = \frac{y}{x},$$

$$r_j = \frac{2xy}{x^2 - y^2 + j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

При $Q > Q_1$, где Q_1 — первый критический расход, существует единый барьер Γ для загрязненного потока, описываемый алгебраическим уравнением степени $2m + 1$

$$\rho_m(x, y) = -\operatorname{tg} \frac{y}{Q}.$$

В отличие от случая четного числа источников, в рассматриваемом случае при $y \geq 0$ первый прорыв барьера, когда $Q = Q_1$, происходит между первым и вторым источниками. Дальнейший анализ течения от проведенного выше принципиально не отличается. Расчет для $n = 7$ и $n = 9$ подтверждает предположение о том, что при последовательном уменьшении расхода Q реализуется такой «сценарий» возникновения каждого очередного прорыва исходного барьера, при котором сначала появляется прорыв между первым и вторым

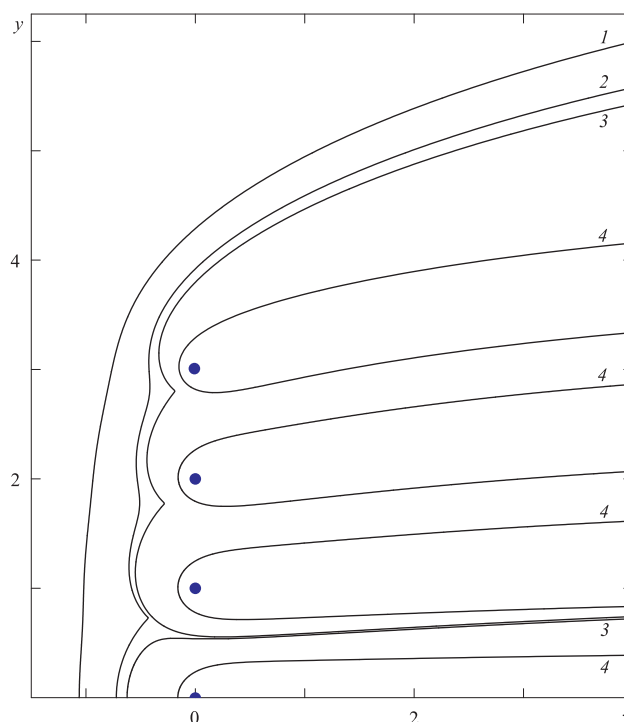


Рис. 3. Границы для потока в случае батареи семи источников: кривые 1–4 соответствуют значениям $Q = 0,39, 0,357, 0,343, 0,15$

источниками, далее — между вторым и третьим, третьим и четвертым и т.д.

На рис. 3 показаны границы барьеров для случая $n = 7$ при различных значениях Q , в частности, при $Q_1 = 0,357$, $Q_2 = Q_3 = 0,343$. Для случая $n = 9$ расчет дает значения критических расходов $Q_1 = 0,349$, $Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0,338$. Как и в случае четного числа источников, величины критических расходов с ростом n сближаются, стремясь к значению $Q = 1/\pi$.

Заключение

Проведенный анализ течений, возникающих при взаимодействии загрязненного потока и прямолинейной батареи нагнетательных скважин с одинаковыми расходами, расположенных на равных расстояниях одна от другой, показывает, что при последовательном уменьшении расхода скважины ниже критической величины Q_1 эффективность гидродинамических барьеров, создаваемых такой батареей, резко снижается из-за появления мно-

жественных прорывов барьера загрязненным потоком.

Литература

1. Christ J. A., Goltz M. N., Huang J. Development and application of an analytical model to aid design and implementation of in situ remediation technologies // Journal of Contaminant Hydrology. 1999. No. 37. P. 295–317.
2. Лаверентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. Javandel I., Tsang C.-F. Capture zone type curves: a tool for aquifer cleanup // Ground Water. 1986. Vol. 24. No. 5. P. 616–625.
4. Erdmann J. B. On capture width and capture zone gaps in multiple-well systems // Ground Water. 2000. Vol. 38. No. 4. P. 497–504.
5. Кузьмин Р. С., Скворцов Э. В. Влияние скважин и галерей на поток подземных вод // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 3. Краевые задачи и их приложения. Казань: Унипресс, 1999. С. 78–84.
6. Скворцов Э. В., Суючева Д. Т. Взаимодействие скважин с потоком подземных вод // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 4. С. 86–96.