

УДК 539.3

АСИМПТОТИКА ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СЛОИСТОМ СКВАЖИННОМ ВОЛНОВОДЕ¹Фоменко С. И.²

ASYMPTOTICS OF WAVE FIELDS IN A LAYERED BOREHOLE WAVEGUIDE

Fomenko S. I.

The problem of progressive wave excitation in a multi-layer cylindrical borehole structure with fluid, elastic and porous fluid-saturated porous layers is considered. The wave field in the borehole is represented in terms of contour integrals. The asymptotic representations for body and tube waves in the far-from-the-source zone are derived using these integrals.

Введение

Исследование волновых процессов в скважинных слоистых цилиндрических структурах имеет большую практическую ценность в газо-, нефтеразведке (скважинный каротаж) и добывающей промышленности. Начиная с первых теоретических исследований 50-х годов [1,2], к настоящему времени произведен достаточно полный анализ возбуждаемых в скважине мод, а также сравнение с экспериментальными измерениями фазовых скоростей и коэффициентов затухания волн, показавшие хорошую согласованность с теоретическими расчетами [3–6] и работы, указанные в обзорах данных статей.

Существующие исследования, как правило, посвящены анализу частотных зависимостей фазовых скоростей собственных мод флюидозаполненной скважины (модальный анализ). Исследование амплитуды волнового поля, возбуждаемого скважинными источниками, в окружающем скважину грунте с помощью асимптотических формул практически не проводилось [7]. Отчасти этот пробел объясняется тем, что такие асимптотические представления получаются на основе интегрального подхода, требующего тщательной аналитической проработки. С другой стороны, асимптотика поля в грунте уже не может быть получена только с помощью метода стационарной фазы, поскольку в среде могут также возбуждаться цилиндрические бегущие волны с некоторым декрементом затухания

[5]. Это означает, что при выводе асимптотик нужно учитывать слияние особенностей: полюса и стационарной точки.

Целью работы является построение интегральных представлений и на их основе асимптотических формул для дальнего поля в скважине.

1. Постановка задачи

Рассматривается слоистая структура: жидкостный цилиндр D_0^f : $0 \leq r \leq b_0$, $-\infty < z < \infty$; стенка (обсадка) с упругими слоями D_k^{sol} : $b_{k-1} \leq r \leq b_k$, $-\infty < z < \infty$, $k = 1, \dots, N-1$; и внешний упругий грунт D_N^{sol} : $r > b_N$, $-\infty < z < \infty$ (рис. 1). Гармоническое волновое поле генерируется источником в виде сосредоточенной объемной силы давления $P_0 \delta(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$, $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Связь между цилиндрическими координатами (r, θ, z) и декартовыми (x, y, z) дается известными соотношениями

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Осесимметричная постановка задачи предполагает, что волновое поле не зависит от угла θ и описывается вектором смещений точек среды в цилиндрической системе координат $\mathbf{u} = u_r \mathbf{n}_r + u_z \mathbf{n}_z$ (u_r , u_z — компоненты вектора смещений) и тензором напряжений $\{\sigma_r, \tau_{rz}, \sigma_z\}$. Волновое поле в общем случае зависит от пространственных координат $\mathbf{x}(r, z)$,

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (06-01-96607).

²Фоменко Сергей Иванович, младший научный сотрудник ИММИ КубГУ.

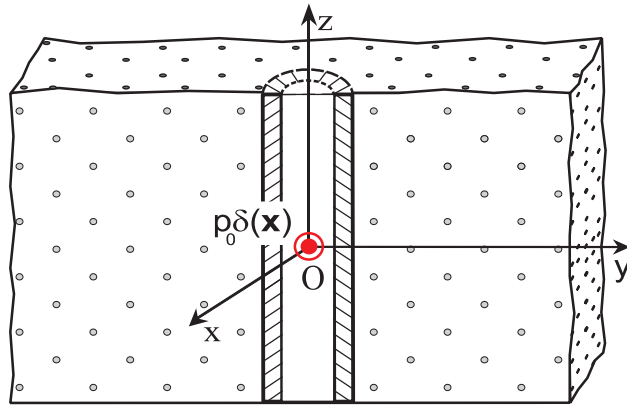


Рис. 1. Геометрия задачи

времени t и определяется геометрическими и материальными параметрами рассматриваемой скважинной структуры: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in D_k$, $k = 0, \dots, N$. Далее математическая постановка и выкладки будут даны относительно комплексных амплитуд $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ гармонических колебаний с круговой частотой ω . Гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ в представлении волнового поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}]$ опущен.

Свойства скважинной жидкости D_0^f задаются скоростью звука $v_{p,0}$ и плотностью ρ_0 ; упругая среда D_k^{sol} описывается скоростями продольных и поперечных волн $v_{p,k}$ и $v_{s,k}$, а также плотностью материала ρ_k .

Давление p в скважинной жидкости удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + \kappa_{p,0}^2 p = P_0 \delta(\mathbf{x}), \quad (r, z) \in D_0^f, \quad (1.1)$$

где $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат, P_0 — заданная амплитуда точечного источника. Вектор смещений фронта волны $\mathbf{u}$ дается соотношением

$$\mathbf{u} = \frac{i}{\omega} \text{grad } \varphi, \quad p = i\omega\rho_0\varphi, \quad (r, z) \in D_0^f, \quad (1.2)$$

где $\varphi(r, z, \omega)$ — потенциал скоростей в жидкости, i — мнимая единица.

Движение частиц в упругих средах описывается уравнениями Ламе [8] и для вектора смещений $\mathbf{u}$ справедливо классическое разложение Грина-Ламе

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot}\{a \mathbf{n}_\theta\}, \quad (r, z) \in D_k^{sol}. \quad (1.3)$$

Потенциалы φ и a в каждом из слоев D_k^{sol} , $k = \overline{1, N}$, удовлетворяют волновым уравнениям

$$\Delta \varphi + \kappa_{p,k}^2 \varphi = 0, \quad (1.4)$$

$$\Delta a + (\kappa_{s,k}^2 - 1/r^2)a = 0, \quad (r, z) \in D_k^{sol}, \quad (1.5)$$

$\mathbf{n}_\theta$ — азимутальный вектор цилиндрической системы координат. Напряжения $\boldsymbol{\tau}_n$ на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ определяются соотношением

$$\boldsymbol{\tau}_n = \lambda_k \mathbf{n} \text{ div } \mathbf{u} + 2\mu_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \mu_k (\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u}),$$

$$(r, z) \in D_k^{sol}.$$

На внутренних границах упругих слоев выполняются условия непрерывности перемещений $\mathbf{u}$ и напряжений $\boldsymbol{\tau}_r$. На границе скважинной жидкости и упругой стенки заданы условия проскальзывания: непрерывность радиальных компонент смещений и напряжений u_r и σ_r , а также отсутствие касательных напряжений τ_{rz} в упругом слое. На бесконечности имеем условия излучения, вытекающие из принципа предельного поглощения [9].

2. Интегральное представление волнового поля

Преобразование Фурье по осевой координате z преобразует уравнения (1.1), (1.4) и (1.5) в обыкновенные дифференциальные уравнения Бесселя. Поэтому их общее решение может быть выписано в виде линейной комбинации цилиндрических функций Бесселя и Ханкеля. В скважинной жидкости преобразование Фурье потенциала скоростей $\Phi = \mathcal{F}_z[\varphi]$ имеет вид [10]

$$\Phi(r, \alpha) = c_{10} J_0(i\sigma_{p,0}r) + G(r, \alpha), \quad r \in D_0. \quad (2.1)$$

Здесь c_{10} — неизвестный коэффициент разложения; $\sigma_{p,0} = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_{p,0}^2}$, $\kappa_{p,0} = \omega/v_{p,0}$ — волновое число; $G(r, \alpha) = -\frac{i}{\rho_0 \omega} P(r, \alpha)$, $P(r, \alpha) = \mathcal{F}_z[p] = -\frac{iP_0}{4\pi} H_0^{(1)}(i\sigma_{p,0}r)$ — преобразование Фурье частного решения неоднородного волнового уравнения (1.1)

$$p(r, z) = -\frac{P_0}{4\pi} \frac{e^{i\kappa_{p,0}R}}{R}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2},$$

описывающее поле источника в безграничной жидкой среде.

В упругом слое D_k^{sol} цилиндрической структуры преобразования Фурье $\Phi_k = \mathcal{F}_z[\varphi]$ и $A = \mathcal{F}_z[a]$ потенциалов φ и a имеют следующие общие представления [1, 11]:

$$\Phi(r, \alpha) = c_{1k} H_0^{(1)}(i\sigma_{p,k}r) + c_{3k} H_0^{(2)}(i\sigma_{p1,k}r),$$

$$A(r, \alpha) = c_{2k} H_1^{(1)}(i\sigma_{s,k}r) + c_{4k} H_1^{(2)}(i\sigma_{s,k}r), \quad (2.2)$$

$$r \in D_k^{sol},$$

$$\sigma_{p,k} = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_{p,k}^2}, \quad \sigma_{s,k} = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_{s,k}^2}.$$

Для внешней среды ($k = N$) условия излучения требуют, чтобы $c_{3N} = c_{4N} = 0$. Ветви разрезов двухзначных радикалов $\sigma_{p,k}$, по которым склеиваются листы римановой поверхности, выбираются в соответствии с неравенствами

$$\operatorname{Re} \sigma_{p,k} \geq 0, \quad \operatorname{Im} \sigma_{p,k} \leq 0.$$

Аналогично выбираются условия для разрезов функций $\sigma_{s,k}(\alpha)$.

Неизвестные коэффициенты c_{jk} в представлениях (2.1) и (2.2) определяются из решения системы алгебраических уравнений [11]

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{f}, \quad (2.3)$$

возникающей после подстановки этих представлений в граничные условия. Здесь $\mathbf{c} = \{c_{jk}\}$ — обобщенный вектор коэффициентов; элементы матрицы $\mathbf{B} = \|b_{jk}\|$ находятся в явном виде и представляются комбинациями функций Бесселя $J_m(\sigma r)$ и Ханкеля $H_m^{(1)}(\sigma r)$, $H_m^{(2)}(\sigma r)$ ($m = 0, 1$); $\mathbf{f}$ — вектор с компонентами, выражающимися через $G(r, \alpha)$.

Искомое поле $\mathbf{u}$ строится в форме обратного преобразования Фурье

$$\mathbf{u}(r, z, \omega) = \mathcal{F}_z^{-1}[\mathbf{U}] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(r, \alpha, \omega) e^{-i\alpha z} d\alpha, \quad (2.4)$$

в котором $\mathbf{U} = U_r \mathbf{n}_r + U_z \mathbf{n}_z$ выражается через потенциалы (2.1), (2.2) в соответствии с преобразованиями Фурье соотношений (1.2) и (1.3). При этом для каждого значения параметра интегрирования α коэффициенты $c_{jk}(\alpha)$ определяются из системы (2.3). Несмотря на это, в ближней к источнику зоне значения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ эффективно определяются с помощью прямого численного интегрирования (2.4), в том числе и в случае многослойных скважинных структур. Однако с увеличением расстояния от источника численное интегрирование становится все более затратным из-за усиления осцилляции подынтегральных функций. Но при этом повышается точность асимптотических представлений.

Волновая картина во внешней среде скважинной структуры достаточно сложная, поскольку здесь могут возбуждаться цилиндрические волны со скоростями, превышающими скорости объемных S - или P -волн (см. пример для структуры S_{slow} на рис. 2). Эти волны хотя и имеют некоторый декремент затухания, но их вкладом можно пренебречь лишь на расстояниях порядка 10^5 длин волн. В результате волновое поле во внешней среде представляет собой суперпозицию сферических, цилиндрических и волн более сложных типов. Но, как и для слоистого полупространства [9], асимптотика волновых полей определяется вкладами полюсов и стационарных точек показателей экспонент осциллирующих интегралов (2.4).

3. Асимптотика скважинных волн

Вклад вычетов в полюсах ζ_k подынтегральной функции в (2.4) выделяется с помощью замыкания контура и теоремы Коши о вычетах. В соответствии с этой техникой, асимптотика волнового поля при $|z| \rightarrow \infty$ и $r = \text{const}$ определяется суммой

$$\mathbf{u}(r, z) \sim \sum_{m=1}^M \mathbf{u}_m(r, z), \quad (3.1)$$

$$|z| \rightarrow \infty, \quad r = \text{const},$$

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{a}_m^{\pm}(r) e^{i\zeta_m |z|},$$

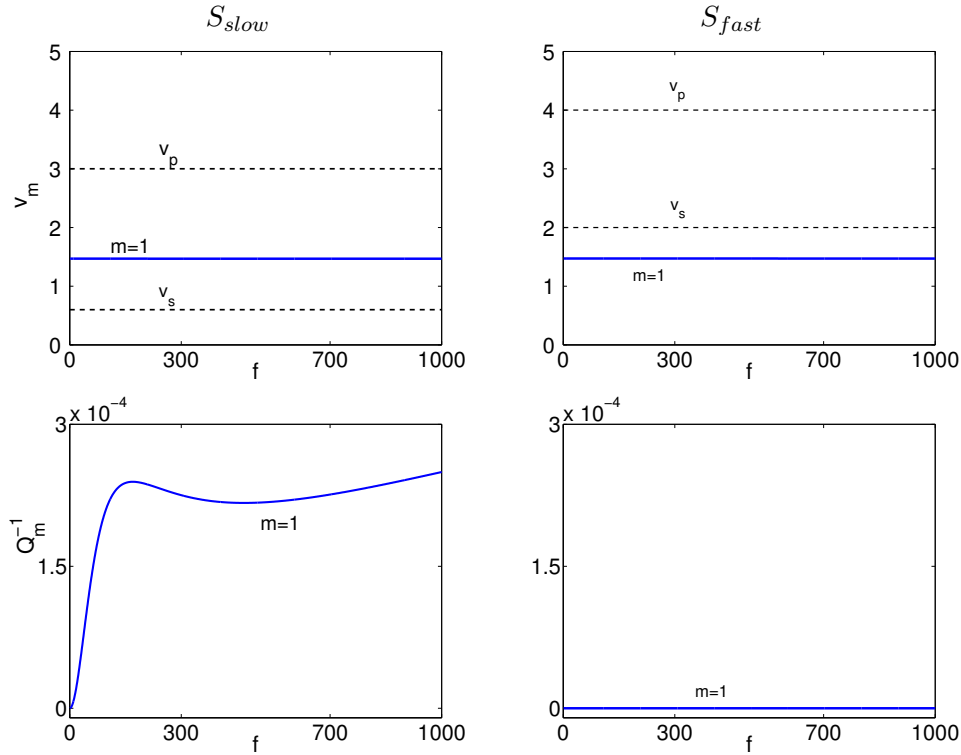


Рис. 2. Частотные зависимости фазовых скоростей v_m и коэффициентов затухания за цикл $Q_m^{-1} = 2\delta_m v_m$ для структур S_{slow} (слева) и S_{fast} (справа)

$$\mathbf{a}_m^{\pm} = \mp i \operatorname{Res} \mathbf{U}(r, \alpha) \Big|_{\alpha=\mp \zeta_m}.$$

Полюса ζ_m являются корнями характеристического уравнения

$$\Delta(\alpha, \omega) \equiv \det \mathbf{B}(\alpha, \omega) = 0,$$

где $\mathbf{B}$ — матрица системы (2.3).

Вклад $\mathbf{u}_m$ вычета в полюсе ζ_m , лежащего на вещественной оси или близкого к ней ($|\operatorname{Im} \zeta_m / \operatorname{Re} \zeta_m| \ll 1$), описывает скважинную волну (или в других терминологиях трубную волну, гидроволну), распространяющуюся вдоль осевой координаты z со скоростью $v_m = \omega / |\operatorname{Re} \zeta_m|$ и с коэффициентом затухания $\delta_m = \operatorname{Im} \zeta_m / \omega$

$$|\mathbf{u}_m| \sim O(e^{-\omega \delta_m |z|}), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Для двух трехслойных цилиндрических структур S_{slow} и S_{fast} , отличающихся друг от друга лишь параметрами внешней среды, на рис. 2 выведены ветви частотных зависимостей фазовых скоростей и коэффициентов затухания скважинных волн. Геометрические и материальные параметры сред указаны в табл. 1–3. В каждой из двух цилиндрических структур возбуждается по одной

моды, в первой структуре S_{slow} с медленным грунтом скважинная волна распространяется быстрее, а в другой среде S_{fast} с быстрым грунтом — медленнее, чем объемные P - и S -волны. Волна в S_{fast} имеет более выраженное экспоненциальное затухание по сравнению с S_{slow} при удалении от внешней границы скважины (рис. 3).

Вклад этих мод в волновые колебания на внешней поверхности скважины становится существенным уже на расстоянии $|z| > 50$ м. На рис. 4 сравниваются значения амплитуд смещений, подсчитанных численно по формулам (2.4) и по асимптотическим формулам (3.1). Характерно, что на расстоянии $|z| > 300$ м резко возрастают ошибки и время счета при численном интегрировании (2.4), в отличие от асимптотических представлений (3.1), которые тем точнее, чем больше $|z|$. Эти и все следующие результаты были получены при частоте $f = 100$ Гц.

4. Асимптотика объемных волн

Исследуем асимптотику волнового поля при $r \rightarrow \infty$.

Таблица 1. Параметры сред

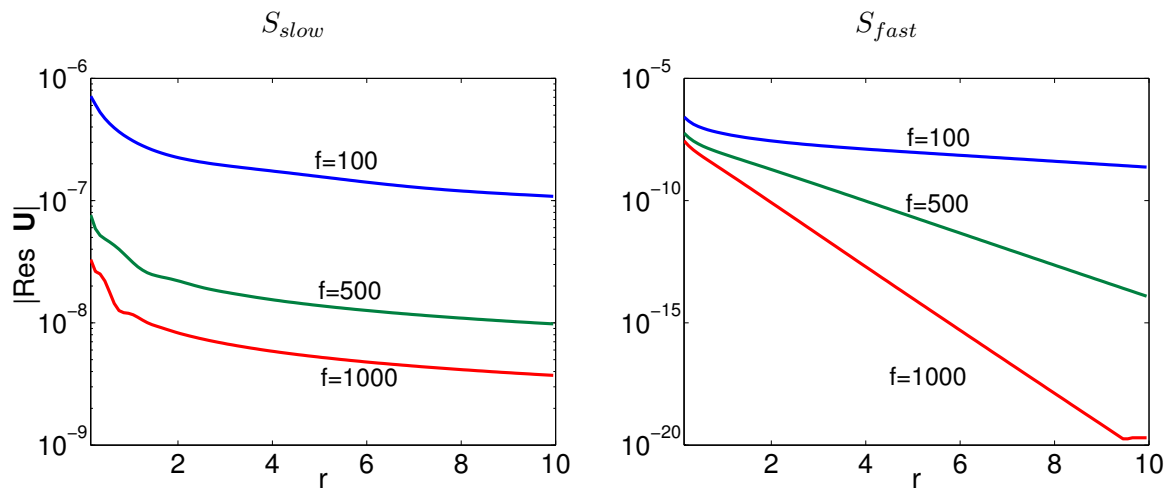
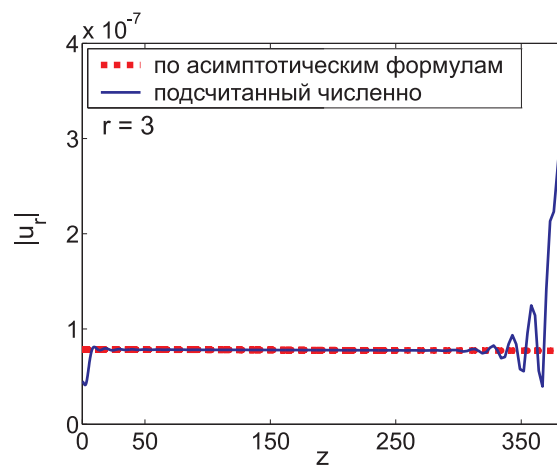
	Жидкость	Бетон	Грунт 1 (медленный)	Грунт 2 (быстрый)
v_p , м/с	1 500	2 915	1 500	4 000
v_s , м/с	0	1 875	1 045	2 610
ρ , кг/м ³	1 000	4 165	2 000	2 000

Таблица 2. Геометрические параметры
трехслойной структуры S_{slow}

Номер слоя, k	0	1	2
Материал	Жидкость	Бетон	Грунт 1
Внешний радиус b_k , м	0,08	0,1	∞

Таблица 3. Геометрические параметры
трехслойной структуры S_{fast}

Номер слоя, k	0	1	2
Материал	Жидкость	Бетон	Грунт 2
Внешний радиус b_k , м	0,08	0,1	∞

Рис. 3. Амплитуды скважинных волн в медленном грунте (структура S_{slow} , слева) и в быстром (справа) при удалении от поверхности скважиныРис. 4. Сходимость асимптотики скважинных волн и потеря точности при численном счете интегральных представлений для структуры S_{slow}

4.1. Сферические волны

Выпишем асимптотику преобразования Фурье перемещений в области D_N :

$$U = \{U_r(r, \alpha), U_z(r, \alpha)\},$$

$$U = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sum_{n=1}^2 K_n(\alpha) Q_n(\alpha) e^{i\sigma_n(r-b_N)}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Здесь

$$Q_1 = t_{1,N}, \quad Q_2 = t_{2,N};$$

$$\sigma_1 = i\sigma_{p,N}, \quad \sigma_2 = i\sigma_{s,N};$$

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{-i\sigma_1}} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{-i\sigma_2}} \begin{pmatrix} -i\alpha \\ i\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда смещения точек внешней среды представимы суммой интегралов

$$u(r, z) \sim u_1 + u_2, \quad r \rightarrow \infty;$$

$$u_n(R, \psi) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \times \int_{-\kappa_n}^{\kappa_n} K_n(\alpha) Q_n(\alpha) e^{i\Theta_n(\alpha, \psi)R} d\alpha, \quad (4.1)$$

$$n = 1, 2,$$

где $\kappa_1 = \kappa_{p,N}$, $\kappa_2 = \kappa_{s,N}$ и

$$R = \sqrt{(r - b_N)^2 + z^2},$$

$$r = R \sin \psi + b_N, \quad z = R \cos \psi,$$

$$\Theta_n(\alpha, \psi) = \sigma_n \sin \psi - \alpha \cos \psi, \quad \sigma_n = \sqrt{\kappa_n^2 - \alpha^2}.$$

Предположим, что функция $Q_n(\alpha)$ регулярна в окрестности точек интервала интегрирования $[-\kappa_n, \kappa_n]$, тогда по методу стационарной фазы [12] имеем асимптотику интегралов (4.1)

$$u_n = \frac{1}{\pi} K_n Q_n(\alpha_n^o) \times \times \kappa_n \frac{e^{iR\kappa_n}}{R} \left[1 + O(R^{-1}) \right], \quad (4.2)$$

$$R \rightarrow \infty,$$

$\alpha_n^o = -\kappa_n \cos \psi$ — стационарная точка

$$K_1(\psi) = \begin{pmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi \end{pmatrix}, \quad K_2(\psi) = \begin{pmatrix} i \cos \psi \\ i \sin \psi \end{pmatrix}.$$

Если $Q_n(\alpha)$ имеет хотя бы один полюс ζ , близкий к вещественной оси и такой, что $|\operatorname{Re} \zeta| < \kappa_n$ (рис. 2 слева), то существуют направления ψ , для которых асимптотика (4.2) недействительна. Так, для угла ψ^o такого, что $\zeta = -\kappa_n \cos \psi^o$, происходит слияние двух особенностей: стационарной точки и полюса.

4.2. Вклад вычетов в асимптотику объемных волн

1. Рассмотрим следующий эталонный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \frac{e^{i\lambda\alpha^2}}{\alpha - \zeta} d\alpha, \quad (4.3)$$

где $f(\alpha)$ — аналитическая функция.

Его асимптотика при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\operatorname{Im} d > 0$, где $d = \zeta \sqrt{-i\lambda}$, известна [12]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \frac{e^{i\lambda\alpha^2}}{\alpha - \zeta} d\alpha \sim \pi i f(0) w(d), \quad (4.4)$$

$$\lambda \rightarrow \infty.$$

Здесь $w(z)$ — функция, выражающаяся через значения интеграла Френеля

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

$$w(z) = e^{-z^2} [1 - \operatorname{erf}(-iz)].$$

Если $\operatorname{Im} d < 0$, то, следуя работе [12], кроме первого члена, в (4.4) необходимо добавить члены асимптотического ряда более высокого порядка, пока не будет достигнута желаемая точность.

Существует другой способ оценки асимптотики (4.3), вскользь упомянутый в [12] — выделить в явном виде вклад вычета. Для этого необходимо заменить интеграл на сумму двух интегралов по окрестностям критических точек (стационарная точка и полюс). Асимптотика интеграла (4.3) ищется по двум различным формулам. Если критические точки достаточно удалены друг от друга, то асимптотика интеграла (4.3) определяется вкладами вычета в полюсе $\alpha = \zeta$ и стационарной точки $\alpha = 0$. Вторая асимптотическая формула используется в случае, когда критические точки достаточно близки между собой, интеграл оценивается асимптотикой (4.4). Четкого критерия в выборе первой или второй асимптотической формулы сформулировано не было.

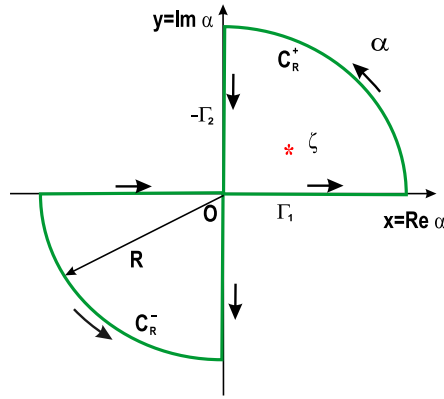


Рис. 5. Контур интегрирования Γ_1 интеграла (4.3) и замыкание его в комплексную плоскость

Пусть для определенности $\lambda = \operatorname{Re} \lambda > 0$. Пусть также $\alpha = x + iy$; x и y — вещественная и мнимая часть α , тогда

$$e^{i\lambda\alpha^2} = e^{i\lambda(x^2 - y^2)} e^{-2\lambda xy}.$$

Откуда видно, что подынтегральная функция экспоненциально убывает при $xy \rightarrow +\infty$. Замыкая контур интегрирования Γ_1 (контур вдоль вещественной оси) в I и III-четверть комплексной плоскости контурами C_R^+ и C_R^- , как показано на рис. 5, и устремляя $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ к бесконечности, с помощью леммы Жордана и теоремы Коши о вычетах значения интеграла (4.4) представляется в виде суммы интеграла по контуру Γ_2 и вычета в полюсе ζ . Для оценки асимптотики интеграла по Γ_2 , воспользуемся равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda y^2}}{y + i\zeta} dy = -\pi i w(-d), \text{ если } \operatorname{Im} d < 0.$$

Если λ — комплекснозначное число, то контур Γ_2 нужно деформировать в соответствие с условием $\operatorname{Im}[\lambda\alpha^2] = 0$ для всех его точек α , а затем воспользоваться методом перевала [12]. Тем самым, условие $\lambda = \operatorname{Re} \lambda > 0$ не нарушает общности рассуждений.

Таким образом, асимптотика (4.3) при $\operatorname{Im} d < 0$ принимает форму

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \frac{e^{i\lambda\alpha^2}}{\alpha - \zeta} d\alpha &\sim -\pi i f(0) w(-d) + \\ &+ \hbar_{\zeta} 2\pi i \operatorname{sign}(\operatorname{Im} \zeta) f(\zeta) e^{i\lambda\zeta^2}, \quad (4.5) \\ &\lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь $\hbar_{\zeta} = 1$, если $\operatorname{Im}[\lambda\zeta^2] > 0$, иначе $\hbar_{\zeta} = 0$.

Знак $\operatorname{Im} d$ дает критерий, по которому выбираются асимптотические формулы (4.4) и (4.5) для оценки интеграла (4.3).

2. Функция Q_n из (4.1) может быть представлена в виде суммы гладкой функции $\tilde{Q}_n$ и набора элементарных функций с особенностями в ζ_k

$$Q_n(\alpha) = \tilde{Q}_n(\alpha) + \sum_{k=1}^M \frac{Q_{n,k}}{\alpha - \zeta_k},$$

$$Q_{n,k} = \operatorname{Res} Q_n(\alpha) \Big|_{\alpha=\zeta_k}.$$

Тогда справедливо представление

$$u_n = \tilde{u}_n + \sum_{k=1}^M u_{n,k}, \quad n = 1, 2; \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \times \\ &\times \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} K_n(\alpha) \tilde{Q}_n(\alpha) e^{i\Theta_n(\alpha, \psi) R} d\alpha, \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n,k} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \times \\ &\times \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \frac{K_n(\alpha) Q_{n,k}}{\alpha - \zeta_k} e^{i\Theta_n(\alpha, \psi) R} d\alpha. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Асимптотика интегралов (4.7) строится методом стационарной фазы (4.2), асимптотика же интегралов (4.8) определяется на основе формул (4.4), (4.5) и представляется в виде суммы

$$u_{n,k} \sim v_{n,k} + w_{n,k}, \quad R \rightarrow \infty; \quad (4.9)$$

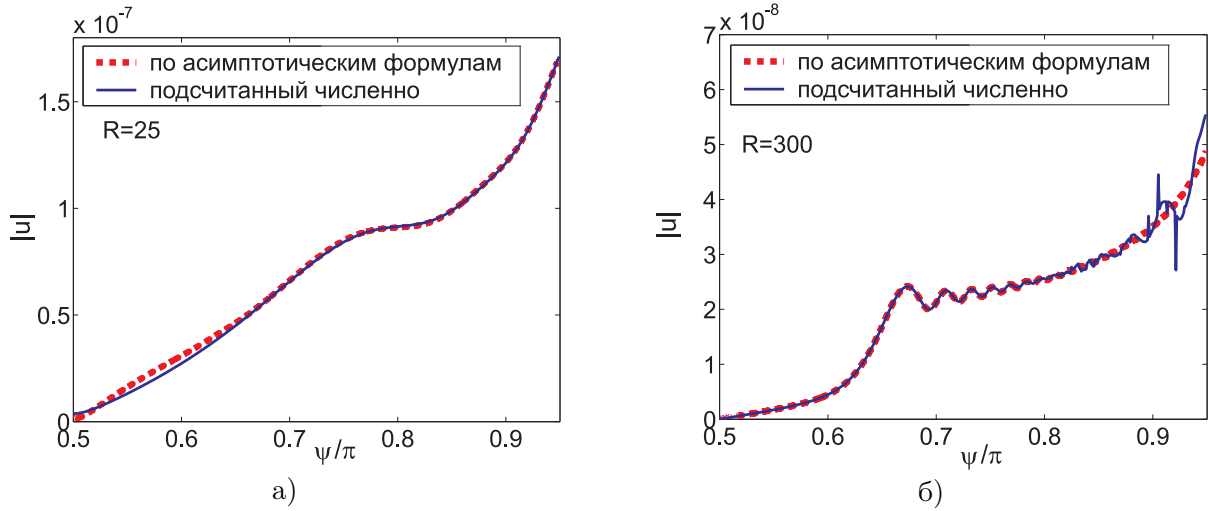


Рис. 6. Сходимость асимптотик и потеря точности при численном интегрировании

$$v_{n,k}(R, \psi) = i \operatorname{sign}[\operatorname{Im} d_k] \sqrt{\frac{\varkappa_n}{2\pi r \sin \psi}} \times \\ \times \mathcal{K}_n(\psi) e^{iR\varkappa_n} w(d_k \operatorname{sign}[\operatorname{Im} d_k]),$$

$$d_k = \sqrt{\frac{i}{2}} R / \varkappa_n (\zeta_k - \alpha_n^o) / \sin \psi.$$

Если $\operatorname{Im} \Theta_n(\zeta_k) > 0$ и $\operatorname{Im} d < 0$, то

$$w_{n,k}(R, \psi) = i \operatorname{sign}[\operatorname{Im} \zeta_k] \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \mathbf{K}_n(\zeta_k) e^{iR\Theta_n(\zeta_k)},$$

иначе $w_{n,k} = 0$.

Вклад $w_{n,k}$ описывает волны с уравнением

$$R\Theta_n(\zeta_k, \psi) - \omega t = \text{const.}$$

Вдоль осевой координаты (при фиксированном r) — это волны плоского типа с волновым числом ζ_k , а вдоль радиальной координаты (при фиксированном z) они ведут себя, как цилиндрические волны, распространяющиеся с волновым числом $\sigma_{n,k} = \sqrt{\varkappa_n^2 - \zeta_k^2}$, амплитуда которых при удалении от центра координат убывает, как $\exp(-r \operatorname{Im} \sigma_{n,k}) / \sqrt{r}$.

Главный член асимптотики $v_{n,k}$ при $\sqrt{R}|\alpha_n^o - \operatorname{Re} \zeta| \rightarrow \infty$ описывает сферическую P - или S -волну, которой соответствуют волновое число $\varkappa_n$. Это легко показать. Воспользовавшись асимптотикой функции $w(z)$

$$w(z) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} z^{-1} \left[1 + O(z^{-2}) \right], \quad \operatorname{Re} z \rightarrow \infty,$$

можно получить выражения, подобные (4.2).

На примере структуры S_{slow} покажем справедливость полученных асимптотик. На

рис. 6 при фиксированных значениях радиуса $R = 25$ и 300 м выведены графики зависимостей амплитуд смещений от угла ψ , подсчитанных численно и по асимптотическим формулам; а на рис. 7 — зависимости $|u|$ от радиуса R при $\psi = 3\pi/4$. Как и следовало ожидать, точность асимптотических представлений с ростом R увеличивается и сохраняется практически для всех углов из диапазона $\pi/2 \leq \psi < \pi$. Однако, с увеличением R возрастает осцилляция подынтегральных выражений, что приводит к численным ошибкам при интегрировании. Это отражается в характерной осцилляции («шумы») численных значений.

Заключение

На основе интегрального подхода построена численно-аналитическая модель волновых колебаний в слоистых скважинных волноводах. С помощью интегральных представлений получены асимптотические формулы для дальнего поля. Найдена в новой форме асимптотическая формула в случае слияния стационарной точки и полюса. Разработан программный комплекс, позволяющий исследовать волновую структуру, а также изучать распределение энергии источников между волнами различных типов в зависимости от свойств и строения среды.

Автор благодарит проф. Глушкова Е. В. и проф. Глушкову Н. В. за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

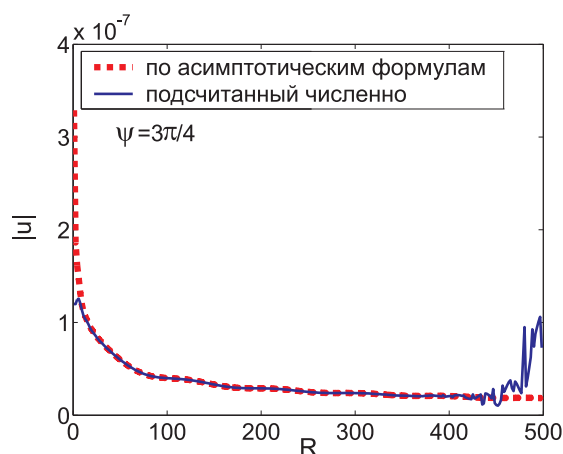


Рис. 7. Асимптотика волнового поля в направлении $\psi = 3\pi/4$

Литература

1. Biot M. A. Propagation of elastic waves in cylindrical bore containing a fluid // J. Appl. Phys. 1952. Vol. 23. P. 997–1005.
2. Gasis D. C. Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders, I. Analytical foundation, and II. Numerical results // J. Acoust. Soc. Am. 1959. Vol. 31. P. 568–577.
3. Winkler K. W., Liu H.-L., Johnson D. L. Permeability and borehole Stoneley waves: Comparison between experiment and theory // Geophysics. 1989. No. 54. P. 66–75.
4. Hsu C.-J., Kostek S., Johnson D. L. Tube waves and mendrel modes: Experiment and theory // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102. P. 3277–3289.
5. Sinha B. K., Asvadurov S. Dispersion and radial depth of investigation of borehole modes // Geophys. Prospecting. 2004. Vol. 52. No. 4. P. 271–286.
6. Максимов Г. А., Ортега Е., Подъячев Е. В. Затухание волны Стоунли и высших лембовских мод вследствие их рассеяния на двумерных неровностях флюидозаполненной скважины. // Акустический журнал. 2007. Т. 53. № 1. С. 20–37.
7. Сницер А. Р. Волны при нормальном гармоническом нагружении скважины в упругой среде. I. Структура волнового поля на поверхности скважины и в дальней зоне. // Динамические системы. Вып. 20. 2006. С. 68–88.
8. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
9. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
10. Гринченко В. Т. Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1980. 284 с.
11. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Фоменко С. И. Распределение энергии сейсмо- акустического скважинного источника в пористо-упругом водонасыщенном грунте // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Акустика и волны. Киев: Наук. думка, 2007. С. 73–83.
12. Федоряк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Статья поступила 11 декабря 2007 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Фоменко С. И., 2007