УДК 534.1

ЛОКАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ[1]

Беляев А. К.[2]

LOCAL INSTABILITY OF ROTATION OF A DRILL STRING

Belyaev A. K.

Stability of a flexible drill string rotating in a curved oil well is studied. The string is considered as an elastic Cosserat bar, general equations are derived and the cases allowing for the closed form solution are analyzed. The rotation with constant angular velocity is shown to be feasible only for a straight shaft. In all other cases the rotation is unstable and for some relations between the parameters it is accompanied by quasi-static transition to a new configuration. The instability is caused by the energy exchange between the torsional and bending modes. The increasing torque on the end of the shaft improves the rotational stability at expenses of the increasing stresses in the drill string.

Введение

Бурильная колонна предназначена для подвода энергии к долоту, обеспечения подачи бурового раствора к забою, создания осевой грузки на долото, восприятия реактивного момента долота забойного двигателя. Длина бурильной колонны достигает 8 км при толщине стенки трубы около 1 см. Тем самым, с механической точки зрения колонна является чрезвычайно гибким стержнем. Чтобы обеспечить нагрузку на долото на забое скважины при направленном (наклонном) бурении колонна должна находиться в сжатом состоянии. При этом она принимает одну из форм статической потери устойчивости и приводится во вращение буровым оборудованием, расположенным на поверхности. Направленное бурение предполагает проводку скважины вдоль запроектированной пространственной трассы в обход осложненных зон горных пород.

Целью исследования является анализ устойчивости вращения произвольно искривленной бурильной колонны в скважине произвольной геометрии. Другая часть работы связана с моделированием колонны с помощью теории стержней. С этой целью колонна представляется как стержень Коссера, используются уравнения Кирхгоффа-Клебша для пространственно искривленной колонны. В работе изучен наиболее важный случай отсутствия трения при круговом поперечном сечении колонны и скважины. Показано, что в некоторых случаях уравнение кручения не зависит от остальных. Подробно рассмотрен также важный частный случай спиралевидной или плоской исходной формы колонны и плоской скважины. Показано, что вращение неустойчиво и при определенном сочетании параметров сопровождается локальным квазистатическим перескоком к новой конфигурации. Четвертая и пятая части демонстрируют влияние крутящего момента на конце колонны на устойчивость вращения и момент в самой колонне.

1. Бурильная колонна как стержень Коссера

1.1. Геометрия кривой линии

Бурильная колонна рассматривается как стержень, т. е. как пространственная упругая линия. Для нее справедливы все уравнения дифференциальной геометрии [1]. В частности, движение натурального триэдра по пространственной линии полностью определяется положением точки на ней. Это положение в системе неподвижных осей задается радиусом-вектором $\mathbf{r}$, который рассматривается как заданная функция криволинейной

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ р2006_юг (проект 06-01-96641).

[2]Беляев Александр Константинович, д-р. физ.-мат. наук, заместитель директора по научной работе Института проблем машиноведения РАН (Санкт-Петербург); e-mail: belyaev@director.ipme.ru

координаты s, отсчитываемой вдоль лини от начала $s = 0$.

Единичный вектор касательной $\mathbf{t} = d\mathbf{r}(s)/ds$ к кривой $\mathbf{r}(s)$ задает вектор главной нормали к кривой $\mathbf{n} = \rho d\mathbf{t}(s)/ds$, где ρ — радиус кривизны в точке. Вектор бинормали конструируется по правилу $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$.

Таким образом, ортогональный триэдр $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ определен для каждой точки кривой. Справедливы формулы Френе [1]

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{D} \times \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{D} \times \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{D} \times \mathbf{b},$$

где

$$\mathbf{D} = w\mathbf{t} + k\mathbf{b}$$

обозначает вектор Дарбу, w — кручение и $\times$ — знак векторного произведения.

В дальнейшем принимается, что касательная к естественной и актуальной конфигурациям совпадают, и вводится обобщенный вектор Дарбу

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{D} + \frac{d\theta}{ds}\mathbf{t},$$

где $\theta(s)$ — вектор поворота вокруг касательной $\mathbf{t}$.

1.2. Уравнения равновесия и определяющие уравнения

Уравнения Кихгоффа для пространственного искривленного стержня имеют вид [2]

$$\frac{d\mathbf{Q}}{ds} + \mathbf{q} = 0, \quad \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{Q} \times \mathbf{t} + \mathbf{m} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{M}$ и $\mathbf{Q}$ обозначают момент и силу в сечении, а $\mathbf{q}$ и $\mathbf{m}$ суть внешние распределенные сила и момент, действующие на стержень.

Как будет показано далее, нет необходимости в выборе конкретного вида определяющих уравнений для сил в стержне. Моменты в стержне взяты в форме определяющих уравнений Клебша

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0), \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{\kappa}$ и $\boldsymbol{\kappa}_0$ — векторы актуального и начального закручивания стержня.

Уравнения (1.1) в проекциях на главные оси 1 и 2 поперечного сечения и касательную $\mathbf{t}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{dQ_1}{ds} + \kappa_2 Q_t - \kappa_t Q_2 + q_1 = 0,\\
&\frac{dQ_2}{ds} + \kappa_t Q_1 - \kappa_1 Q_t + q_2 = 0,\\
&\frac{dQ_t}{ds} + \kappa_1 Q_2 - \kappa_2 Q_1 + q_t = 0,\\
&\frac{dM_1}{ds} + \kappa_2 M_t - \kappa_t M_2 - Q_2 + m_1 = 0,\\
&\frac{dM_2}{ds} + \kappa_t M_1 - \kappa_1 M_t + Q_1 + m_2 = 0,\\
&\frac{dM_t}{ds} + \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 + m_t = 0,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где соответствующие проекции помечены индексами 1,2 и $\mathbf{t}$.

Определяющие уравнения (1.2) в проекциях принимают вид

$$\begin{aligned}
M_1 &= EI(\kappa_1 - \kappa_{10}),\\
M_2 &= EI(\kappa_2 - \kappa_{20}),\\
M_t &= GI_p(\kappa_t - \kappa_{t0}),
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где M_1 и M_2 — изгибающие моменты, а M_t — крутящий момент. Через EI и GI_p обозначены жесткости на изгиб и кручение. Кривизны выражаются через закручивание w, радиус кривизны ρ и угол поворота сечения θ

$$\kappa_1 = \frac{\sin\theta}{\rho}, \quad \kappa_2 = \frac{\cos\theta}{\rho}, \quad \kappa_t = w + \frac{d\theta}{ds}. \tag{1.5}$$

В дальнейшем делаются следующие предположения:

1) бурильная колонна является однородным линейно упругим стержнем,

2) внутренне трение в колонне и трение о стенки скважины не учитываются,

3) рассматривается квазистатическое вращение, и

4) конец колонны $s = 0$ вращается с постоянной угловой скоростью.

Пусть исходная конфигурация колонны, т.е. форма в естественном состоянии, описываются параметрами w_s, ρ_s и θ_s. Актуальная конфигурация считается совпадающей с формой скважины, т. е. w_p, ρ_p и θ_p. Видно, что уравнение для крутящего момента (шестое уравнение в (1.3)) совсем не зависит от сил в колонне. Кроме того, $m = 0$, поскольку мы пренебрегаем трением между колонной и стенками скважины. Подставляя (1.4) и (1.5) в шестое уравнение в (1.3), приходим к единственному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \frac{1+\nu}{\rho_s\rho_p}\sin\theta = \frac{d}{ds}(w_s - w_p), \tag{1.6}$$

где ν — коэффициент Пуассона. В случае кругового поперечного сечения новая переменная $\theta = \theta_p - \theta_s$ подразумевает угол поворота поперечного сечения относительно натурального состояния.

2. Свободное вращение колонны в плоской скважине постоянной кривизны

Уравнение (1.6), описывающее квазистатическое вращение, может быть упрощено и сделано более прозрачным. Во-первых, для всех форм колонны и скважины, для которых $w_s = \text{const}$ и $w_p = \text{const}$, правая часть уравнения (1.6) обращается в ноль. Это случаи дуги и спирали. Прямая линия также принадлежит к этому частному случаю.

Рассмотрим сначала случай вращения колонны радиуса R_s в скважине, имеющей форму дуги радиуса R_p. В этом случае, изученном в [3], (1.6) принимает вид

$$\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} - a^2 \sin\theta = 0, \tag{2.1}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{R_p}{R_s}(1+\nu)}$$

и $\varphi = s/R_p$ является угловой переменной, соответствующей криволинейной (дуговой) координате s.

Случай вращения колонны, принявшей спиралевидную форму и вращающейся в плоской скважине в форме дуги, (1.6) сводится к (2.1), в котором

$$a = \sqrt{\frac{R_p R_h (1+\nu)}{R_h^2 + (h/2\pi)^2}},$$

так как кручение w_s и радиус кривизны ρ_s спирали колонны описываются формулами

$$w_s = \frac{R_h}{R_h^2 + (h/2\pi)^2}, \quad \rho_s = \frac{R_h^2 + (h/2\pi)^2}{R_h},$$

где R_h и h — радиус и высота подъема спирали.

Так как оба случая описываются одним и тем же дифференциальным уравнением (2.1), анализируем это уравнение без уточнения конкретной формы колонны и скважины.

Если нижний конец колонны ($\varphi = \Psi$) свободен, общая форма граничных условий к уравнению (2.1)

$$\begin{gathered} \varphi = 0, \quad \theta = \Theta_0, \\ \varphi = \Psi, \quad GI_p\left(w_p - w_s + \frac{1}{R_p}\frac{d\theta}{d\varphi}\right) = 0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где Θ_0 — угол поворота верхнего конца колонны ($\varphi = 0$).

Так как рассматривается плоская скважина, $w_p = 0$. Чтобы уменьшить число параметров задачи, ограничимся случаем плоской круговой колонны, то есть, положим $w_s = 0$. Граничная задача (2.1) и (2.2) имеет следующее аналитическое решение:

$$\Theta_0 = 2\arccos\left(\cos\frac{\Theta_1}{2}\sin\left\{\mathrm{am}\left[a\Psi + F\left(\frac{\pi}{2}, \cos^2\frac{\Theta_1}{2}\right), \cos^2\frac{\Theta_1}{2}\right]\right\}\right),$$

где $\mathrm{am}\,[x, y]$ и $F\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$ — амплитудная функция Якоби и эллиптический интеграл первого рода, а Θ_1 обозначает угол поворота свободного конца колонны. Хотя целью исследования является анализ зависимости $\Theta_1 = \Theta_1(\Theta_0)$, последняя формула дает обратную связь. Эта обратная форма решения предпочтительнее.

Зависимость $\Theta_1 = \Theta_1(\Theta_0)$ представлена на рис. 1 как функция критического параметра a. Наблюдаемая складка является свидетельством нелинейности задачи и известна как причина неустойчивости. Сечения (рис. 1) показаны на рис. 2 для некоторых значений a. Видно, что равномерное вращение предварительно искривленного стержня в криволинейной скважине невозможно, так как случай $\Theta_1 = \Theta_0$ реализуется только для $a = 0$, как показывает рис. 2. Для $0 < a\Psi < \pi/2$ углы поворота концов колонны не совпадают, несмотря на то, что никакие внешние моменты сопротивления вращению не приложены. Более того, для $a\Psi > \pi/2$ наблюдаются несколько значений Θ_1 для некоторых значений Θ_0. Это приводит к скачкам, показанным стрелками на этих рисунках, что оправдывает представление решения в форме $\Theta_0 = \Theta_0(\Theta_1)$. Критическое значение параметра a получается из уравнения $a_{crit}\Psi = \pi/2$ (рис. 2), потому что эта величина отделяет области вращения со скачками и без них.

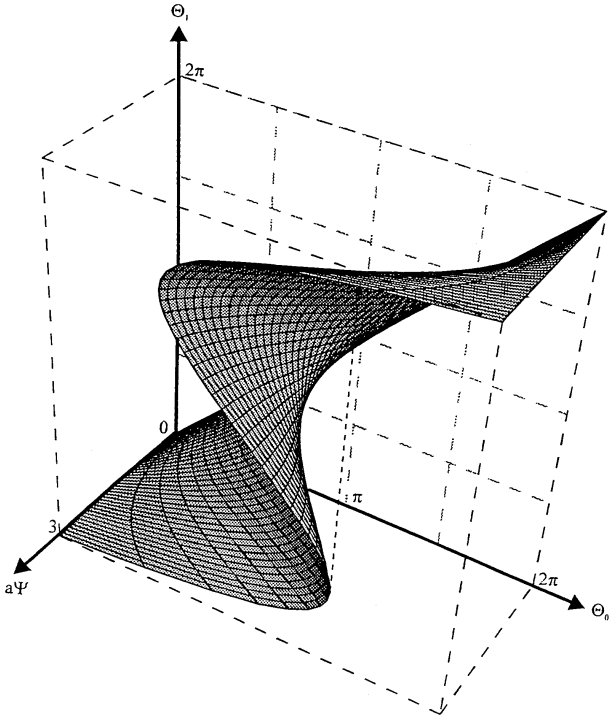

Рис. 1

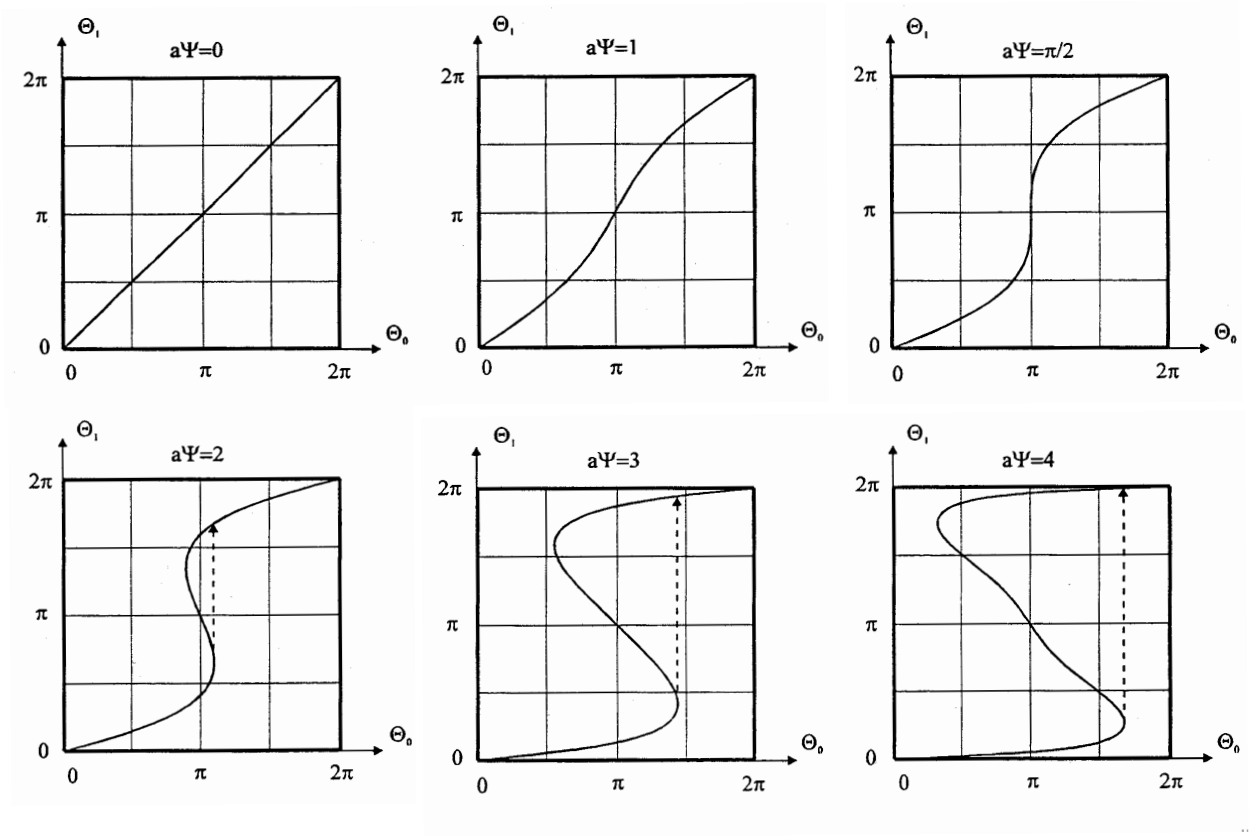

Рис. 2

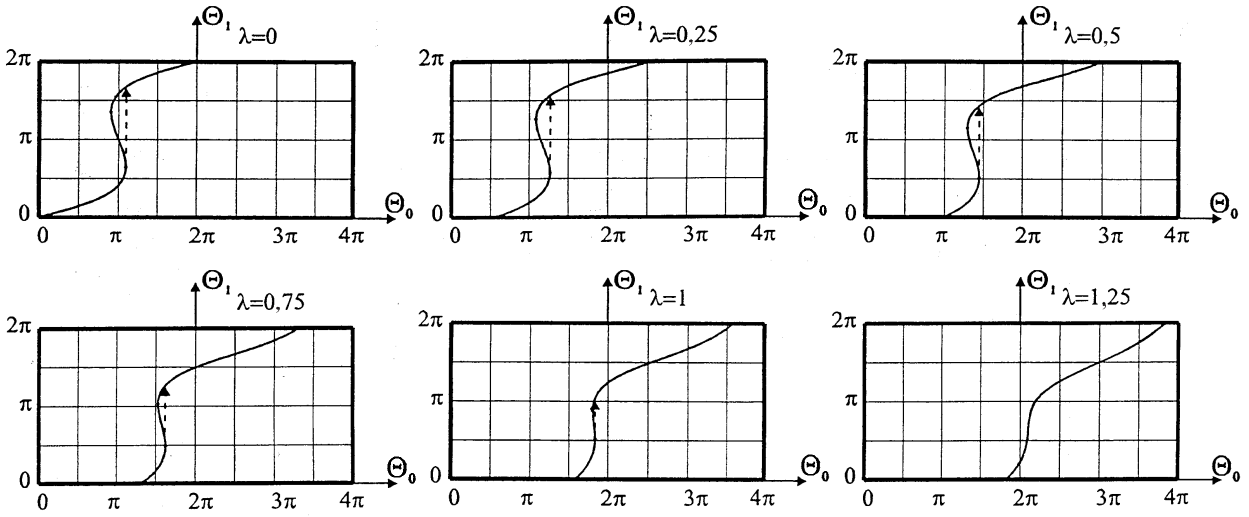

Рис. 3

3. Случай крутящего момента на конце бурильной колонны

Для плоской круговой скважины в форме дуги ($w_p = 0$) граничное условие записывается в виде

$$\varphi = 0, \quad \theta = \Theta_0,$$
$$\varphi = \Psi, \quad GI_p\left(-w_s + \frac{1}{R_p}\frac{d\theta}{d\varphi}\right) = -M_{t1}, \tag{3.1}$$

где M_{t1} обозначает внешний момент сопротивления вращения на конце колонны, вызванный, например, внешним трением. Аналитическое решение граничной задачи (2.1) и (3.1)

$$\Theta_0 = 2\arccos\left(k\sin\left\{\mathrm{am}\left[a\Psi + F\left(\varphi_1, k^2\right), k^2\right]\right\}\right),$$

где

$$k = \sqrt{\xi^2 + \cos^2\frac{\Theta_1}{2}}, \quad \xi = \frac{w_s R_p}{2a},$$

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{1}{k}\cos\frac{\Theta_1}{2}\right).$$

На рис. 3 показана зависимость угла поворота Θ_1 от Θ_0 для $a\Psi = 2$ и некоторых значений безразмерного внешнего момента сопротивления $\lambda = \dfrac{R_p M_{t1}}{2aGI_p}$. Видно, что увеличение внешнего момента улучшает устойчивость вращения.

4. Крутящий момент в бурильной колонне

Согласно (1.4) и (1.5), общая формула для крутящего момента в колонне имеет вид

$$M_t = GI_p\left(w_p - w_s + \frac{d\theta}{ds}\right).$$

В случае свободного вращения плоской предварительно искривленной колонны получаем

$$M_t = GI_p\frac{1}{R_p}\frac{d\theta}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=\Psi} = \\ = GI_p\frac{1}{R_p}\sqrt{2\left(\cos\Theta_1 - \cos\Theta_0\right)}.$$

Безразмерный крутящий момент $M_t R_p / GI_p$ показан на рис. 4 для некоторых значений λ.

Заключение

Изучена квазистатическая устойчивость вращения бурильной колонны в скважине. Для этого колонна представлена упругим стержнем Коссера и применены уравнения для пространственно искривленного гибкого упругого стержня произвольной формы. Силовые факторы стержня выражены через кривизны искривленной оси, угол закручивания в исходной и актуальной конфигурациях, а также изгибную и крутильную жесткости стержня. В наиболее важном случае пренебрежимо малого трения и круговых поперечных сечений колонны и скважины шесть уравнений

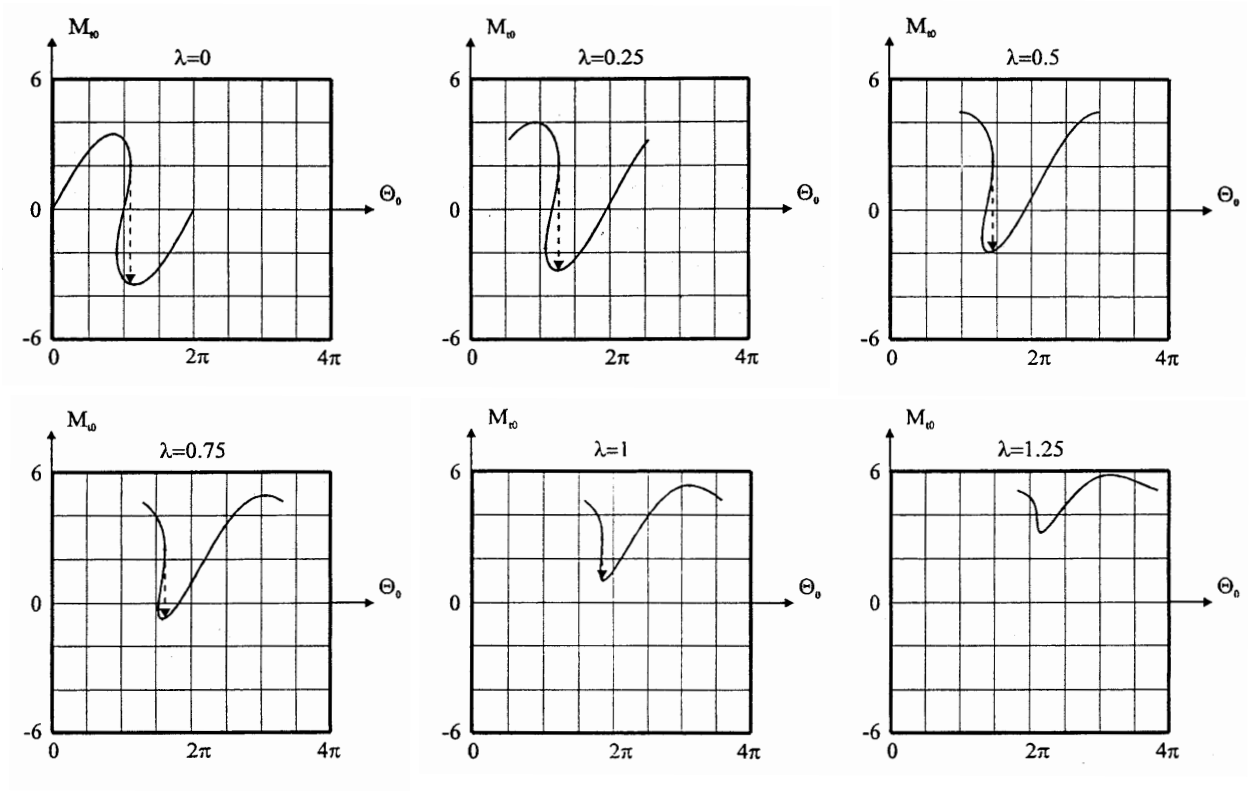

Рис. 4

равновесия сводятся к единственному уравнению для угла относительного поворота поперечного сечения. Оказалось, что некоторые частные случаи допускают аналитическое решение через эллиптические функции и интегралы. Подробно проведен анализ случая исходной спиралевидной формы колонны и плоской скважины. Показано, что вращение без деформации возможно только для прямолинейной колонны. Во всех остальных случаях вращение вызывает крутильно-изгибную деформацию и сопровождается перескоками к новой конфигурации при некоторых соотношениях между параметрами. Увеличение момента внешнего сопротивления на конце бурильной колонны улучшает устойчивость ее вращения, однако за счет увеличения механических напряжений в ней и вероятности ее обрыва. Крутящий момент демонстрирует поведение, которое обычно ассоциируют с автоколебаниями. Однако ни внутреннее демпфирование, ни внешнее трение не представлены в модели. Неустойчивость вызвана обменом упругой энергией между изгибной и крутильной формами. Определено критическое значение крутящего момента, при превышении которого вращение становится неустойчивым. Локальные скачки искривленной колонны в криволинейной скважине — известное явление в практике бурения и было объяснено в рамках предложенного подхода [4]. Общепризнанным объяснением неравномерного вращения являются фрикционные автоколебания всей бурильной колонны, вызванные падающей зависимостью силы трения от скорости вращения [5]. Введение такой падающей зависимости позволило ранее указать предельную длину бурильной колонны, гарантирующую устойчивое вращение [6]. Настоящая работа предлагает альтернативное объяснение неравномерности вращения, а именно, локальный обмен упругой энергией между изгибной и крутильной формами деформации.

Несмотря на предложенное решение, остается целый ряд других проблем. Прежде всего, необходимо также вычислить изгибающий момент и силы в колонне. В частности, следует определить продольное усилие, которое должно быть приложено к колонне, с тем, чтобы предотвратить «выпрыгивание» колонны из скважины. Затем необходимо определить силовые факторы в колонне. Вычисление изгибающего момента и сил в колонне может быть проведено методом последователь-

ных приближений. Также следует изучить влияние внутреннего и внешнего трения. Наконец, проблема динамического анализа представляет несомненный интерес. Она связана с распространением связанных изгибно-крутильных волн в колонне и на порядок сложнее представленного квазистатического анализа.

Литература

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Наука, 1961. 824 с.
2. *Елисеев В. В.* Механика упругих тел. Издательство С.-Петербургского политехнического университета, 1999.
3. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1987. 352 с.
4. *Belyaev A. K.* Dynamics of a buckled drillstring rotating in a curved oil wellbore. In: New Applications of Nonlinear and Chaotic Dynamics in Mechanics, ed. F.C. Moon, Kluwer, Dordrecht. 1999. Pp. 169–171.
5. *Белокобыльский С. В., Ветюков М. М., Нагаев Р. Ф.* О фрикционных автоколебаниях бурильной колонны // Известия АН СССР. Машиноведение. 1982. С. 15—-20.
6. *Palmov V. A., Brommundt E., Belyaev A. K.* Stability analysis of drillstring rotation. International Journal Dynamics and Stability of Systems. 1995. Vol. 10. No. 2. Pp. 99–110.

Ключевые слова: бурильная колонна, криволинейный стержень Коссера, локальная неустойчивость

Статья поступила 15 марта 2008 г.
Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург
© Беляев А. К., 2008