УДК 539.3

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕКОНСТРУКЦИИ СВОЙСТВ БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЕЙ[1]

***Ватульян А. О.*[2], *Пономарева А. Д.*[3], *Олифер Н. А.*[4]**

IDENTIFICATION OF ELASTICITY MODULES AND ITS APPLICATION TO BIOMECHANICS

Vatulyan A. O., Ponomareva A. D., Olifer N. A.

This paper describes an approach to quotient inverse problems of the Elasticity Theory for harmonically oscillating finite bodies. The inverse problem is reduced to an iterative process, each iteration requires solving of the Fredholm equation derived from the generalized reciprocity relation. An approach to solving such equations using form functions and body decomposition is proposed. The numerical LSQR technique is used to solve the resulting ill-conditioned system of linear equations. Several results of numerical experiments are presented.

Введение

Определение механических свойств (в частности, модулей упругости) материалов находит широкое применение во многих областях науки. Использование модели однородной изотропной теории упругости, характеризуемой двумя упругими характеристиками — модулем Юнга и коэффициентом Пуассона, сыграло свою позитивную роль в становлении на научную основу расчетов на прочность и колебания различных конструкций. В то же время модели неоднородной теории упругости стали весьма популярны в различных областях знания — в геофизике, горной механике, биомеханике, однако требуют определения этих характеристик как функций координат по результатам наблюдений или экспериментов. Так, в последнее время в практике неинвазивного контроля биологических тканей быстро развиваются новые диагностические методы, основанные на результатах теоретических работ по обратным задачам в акустике и биомеханике. Вопрос реконструкции неизвестных механических свойств материала на основе измерений внутренних смещений и деформаций при внешнем механическом воздействии представляет большой интерес в связи с проблемой неповреждающей диагностики состояния мягких и твердых тканей человека. Такие исследования начались ещё в 40-х годах в связи с проблемой согласования с телом человека показаний различных контактных датчиков. Решение этой задачи открывает новые возможности слежения за изменениями характеристик тканей, в первую очередь мышечной и костной, в ходе различных физиологических и патологических процессов и в ходе развития реакции на различные тестовые воздействия. Таким образом, открываются новые возможности для проведения биомеханических и медико-диагностических исследований нервно-мышечной и костной систем человека.

К. Паркер [1–3] и Ямакоши [4] предприняли попытки использования ультразвуковых допплер-сканеров для обнаружения включений в тканеподобных образцах и патологий в мягких биологических тканях при их низкочастотном внешнем нагружении. Физической основой такого рода подхода является отличие механических характеристик тканевых новообразований от характеристик нормальных тканей, что ведет к различному характеру деформирования исследуемого объекта при внешнем механическом воздействии.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (05-01-00734) и Южного федерального университета.

[2]Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета.

[3]Пономарева Анна Дмитриевна, ассистент кафедры теории упругости Южного федерального университета.

[4]Олифер Никита Андреевич, аспирант кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: olyphern@mail.ru

Внутренние смещения могут быть измерены экспериментально при помощи ультразвука или ядерно-магнитного резонанса (ЯМР). Для реконструкции пространственного распределения неоднородных механических свойств внутри объекта исследования по таким экспериментальным данным может успешно применяться аппарат линейной неоднородной теории упругости.

Некоторые аспекты решения задачи идентификации модуля сдвига как функции координат рассматривались в [5, 6]. В работе [5] предложена процедура реконструкции упругих свойств материала, состоящая в определении неизвестного модуля сдвига, исходя из дифференциального уравнения совместности, однако корректной постановки и решения обратной задачи акустики работа не содержит.

В [6] на основе обобщения решения классической осесимметричной задачи Лэмба исследована возможность реконструкции неизвестных механических свойств многослойной вязкоупругой среды по данным о смещениях действующего на неё жесткого круглого индентора-штампа. Эта задача, состоящая в определении конечного числа параметров, была решена на основе процедуры минимизации функционала невязки.

В работе [7] обсуждены различные аспекты моделирования мышечной ткани, в частности, применение акустических методов для определения её характеристик. Показано, что диагностика патологий и функционального состояния мышечной системы возможна при использовании, в первую очередь, сдвиговых волн, которые более информативны, чем объемные, предложена также соответствующая модель анизотропии частного вида при описании распространения волн в мышечном волокне.

Работа [8] посвящена определению импедансных и волновых свойств биоматериалов; изучается динамическая реакция слоя, близкого по упругим свойствам к живой ткани. Исследована динамическая реакция слоя, находящегося под действием осциллирующего круглого штампа. В [9] рассмотрена более сложная модель: на трехслойное полупространство, моделирующее систему «кожно-жировой слой-мышца-печень» действует колебательная нагрузка от круглого штампа. В работе исследованы зависимости колебательных смещений в глубине тканей от размеров и частоты колебаний поверхностного источника. На основе этих зависимостей могут быть идентифицированы характеристики материала.

В [10] исследованы параметры спонгиозной кости на основе модели Био при помощи высокочастотых акустических измерений. В работе описывается метод вычисления акустического давления по результатам измерений в диапазоне частот до 100 кГц, соответствующий экспериментально исследуемым диапазонам.

В настоящей работе описан подход к определению упругих характеристик как функций координат в ограниченной плоской области. Для решения обратной задачи по реконструкции неизвестных модулей упругости необходимо иметь данные о смещениях на границе образца. После этого формулируются операторные уравнения, связывающие известные граничные поля смещений и неизвестные упругие характеристики. Далее на основе метода линеаризации был построен итерационный процесс, позволяющий построить решение обратной задачи на основе современных конечно-элементных технологий. В перспективе данный метод может быть применен не только для линейной изотропной модели теории упругости, но и для более сложных моделей.

1. Постановка прямых задач

Рассмотрим следующие задачи о колебаниях с частотой ω неоднородного упругого тела.

Задача 1. Рассматривается плоская деформация

$$(u_3 = 0,\ u_1 = u_1(x_1, x_2),\ u_2 = u_2(x_1, x_2))$$

области S с границей $l = l_u \cup l_\sigma$ в режиме установившихся колебаний.

Уравнения колебаний будут иметь вид

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \rho\omega^2 u_2 = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Компоненты напряжений для изотропного неоднородного материала представимы в следующей форме:

$$\sigma_{ij} = \lambda(x_1, x_2)\, u_{k,k}\delta_{ij} + 2\mu(x_1, x_2)\, \varepsilon_{ij}, \tag{1.2}$$

где λ и μ — произвольные положительные кусочно-непрерывные функции координат. Компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора перемещений

$$\varepsilon_{ij} = 1/2\,(u_{i,j} + u_{j,i})\,. \tag{1.3}$$

Будем считать, что часть границы l_u закреплена, а к другой части границы l_σ приложена

нагрузка с компонентами p_i. Граничные условия имеют вид

$$u_i|_{l_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{l_\sigma} = p_i. \tag{1.4}$$

Задача 2. Из современной литературы по диагностике свойств мягких тканей известно, что наиболее информативными характеристиками являются не объемный модуль и соответственно, скорость объемных волн, а модуль сдвига и скорость волн сдвига [7]. Рассмотрим задачу об установившихся сдвиговых колебаниях ($u = u_3(x_1, x_2)$, $u_1 = u_2 = 0$) области S с границей $l = l_u \cup l_\sigma$. Будем считать, что модуль сдвига μ — функция координат.

Уравнение установившихся колебаний примет вид

$$(\mu u_{,1})_{,1} + (\mu u_{,2})_{,2} + \rho\omega^2 u = 0, \tag{1.5}$$

а соответствующие граничные условия представимы в форме

$$u|_{l_u} = 0, \quad \mu u_{,n}|_{l_\sigma} = p. \tag{1.6}$$

При произвольной геометрии области S, а также упругих характеристиках, зависящих от координат, решение краевых задач (1.1)–(1.4) и (1.5)–(1.6) может быть получено только численно, например, методом конечного элемента.

2. Постановка обратных задач и формулировка итерационных процессов

Сформулируем теперь задачи об определении упругих модулей по информации о граничных полях смещений.

Обратная задача 1. Задача об определении упругих характеристик тел при установившихся колебаниях ставится следующим образом: по информации о перемещениях u_1 и u_2 на нагружаемой части границы $u_i|_{l_{\sigma 0}} = f_i$, $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, определить коэффициенты Ляме λ и μ, зависящие от координат. Здесь $l_{\sigma 0}$ — часть границы, на которой нагрузка отлична от нуля.

Обратная задача 2. Задача об определении модуля сдвига при установившихся сдвиговых колебаниях ставится следующим образом: по информации о перемещениях u_3 на нагружаемой части границы $u_3|_{l_{\sigma 0}} = f$, $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, определить модуль сдвига μ, зависящий от координат.

Задача об определении модулей упругости является нелинейной и некорректной проблемой [11, 12] и может быть решена на основе некоторого итерационного процесса, на каждом этапе которого осуществляется решение линейной краевой задачи с известными переменными модулями упругости и плотностью. При этом начальные функциональные зависимости λ и μ находятся обычно в классе простых функций (линейных или постоянных) на основе процедуры минимизации функционала невязки либо считаются известными, исходя из условий задачи. Например, при диагностике завершающих стадий срастания перелома за начальное приближение можно взять состояние полностью здоровой костной ткани. Вместе с тем, можно избежать утомительных построений по решению прямых задач первого приближения с произвольными правыми частями и формулировки операторных соотношений связи, если использовать обобщение теоремы взаимности [13] и метод линеаризации. Предложенный в [13] итерационный процесс позволяет эффективно строить решение обратной задачи. В этом случае легко получить следующее интегральное уравнение Фредгольма первого рода с суммируемыми ядрами относительно $\lambda^{(n)}$ и $\mu^{(n)}$. В случае обратной задачи 1 это уравнение имеет следующий вид:

$$\int\limits_S \left[\lambda^{(n)}(x)\left(u_{k,k}^{(n-1)}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\mu^{(n)}(x)\left(u_{i,j}^{(n-1)} + u_{j,i}^{(n-1)}\right)^2\right] dS +$$
$$+ \int\limits_{l_\sigma} p_i\left[f_i - u_i^{(n-1)}\right] dl = 0, \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \tag{2.1}$$

В случае обратной задачи 2 итерационный процесс строится на основе уравнения

$$\int\limits_S \mu^{(n)}\left[\left(u_{,1}^{(n-1)}\right)^2 + \left(u_{,2}^{(n-1)}\right)^2\right] dS +$$
$$+ \int\limits_{l_\sigma} p\left(f - u^{(n-1)}\right) dl = 0, \tag{2.2}$$
$$\omega \in [\omega_1, \omega_2].$$

При каждой последующей итерации в уравнениях (2.1) и (2.2) меняются ядра и правые части.

Найдя $\lambda^{(n)}$ и $\mu^{(n)}$ из (2.1) или (2.2), переходим к следующей итерации, пересчитывая

перемещения и деформации с учетом изменившихся упругих характеристик. Отметим, что интегральные уравнения (2.1) и (2.2) порождают операторы с суммируемыми ядрами, обращение которых представляет собой некорректную задачу и при обращении необходимо использовать методы регуляризации [11]. Особенностью построенных операторов является то обстоятельство, что подынтегральные функции по форме представляют собой удвоенную обобщенную потенциальную энергию, причем деформации относятся к предыдущей итерации, а модули — к следующей.

3. Решение обратной задачи

Решение $u^{(n-1)}(x_1, x_2)$ прямой задачи на каждом шаге в общем случае можно построить только численно, например, методом конечных элементов. При этом область, занятая телом, разбивается на N подобластей $S = \cup_{i=1}^{N} S_i$.

Решение μ или λ будем искать в виде линейной комбинации функций формы $a_i(x_1, x_2)$, одинаковых для всех итераций, которые строятся следующим образом:

$$a_i\left(x_1, x_2\right) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in S_i, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin S_i, \end{cases}$$

$$\lambda^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{(n)} a_i\left(x_1, x_2\right), \tag{3.1}$$

$$\mu^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i^{(n)} a_i\left(x_1, x_2\right). \tag{3.2}$$

Определим коэффициенты $\lambda_i^{(n)}$ и $\mu_i^{(n)}$ разложений (3.1) или (3.2).

Для решения задачи подставим (3.1) и (3.2) в соответствующее интегральное уравнение (2.1) или (2.2). Для обратной задачи 1 получим функциональное уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\lambda_i^{(n)} K_{1i}^{(n-1)}\left(\omega\right) + \mu_i^{(n)} K_{2i}^{(n-1)}\left(\omega\right)\right] = F^{(n-1)}\left(\omega\right), \tag{3.3}$$

$$\omega \in \left[\omega_1, \omega_2\right].$$

Здесь ядра уравнения для задачи 1 имеют вид

$$K_{1i}^{(n-1)}(\omega) = \int\limits_S a_i(x) \left(\varepsilon_{11}^{(n-1)}(x,\omega) + \varepsilon_{22}^{(n-1)}(x,\omega)\right)^2 dS,$$

$$K_{2i}^{(n-1)}(\omega) = \int\limits_S a_i(x) \Big(\varepsilon_{11}^{(n-1)}(x,\omega)^2 + 2\varepsilon_{12}^{(n-1)}(x,\omega)^2 + \varepsilon_{22}^{(n-1)}(x,\omega)^2\Big) dS,$$

правая часть имеет вид

$$F^{(n-1)}\left(\omega\right) = \int\limits_{l_\sigma} p_i \left[f_i - u_i^{(n-1)}\right] dl.$$

Для обратной задачи 2 функциональное уравнение примет вид

$$\sum \mu_i^{(n)} K_i^{(n-1)}\left(\omega\right) = F^{(n-1)}\left(\omega\right), \tag{3.4}$$

$$\omega \in \left[\omega_1, \omega_2\right].$$

Для задачи 2 ядро уравнения можно представить

$$K_i^{(n-1)}(\omega) = \int\limits_S a_i(x) \left(\left(u_{,1}^{(n-1)}\right)^2 + \left(u_{,2}^{(n-1)}\right)^2\right) dS,$$

правая часть запишется

$$F^{(n-1)}\left(\omega\right) = \int\limits_{l_\sigma} p \left(f - u^{(n-1)}\right) dl.$$

Ядра уравнений выражаются через перемещения $n-1$-й итерации, правые части — через результаты измерений f на границе l_σ и перемещения на границе на $n-1$-й итерации.

Функциональные уравнения (3.3) и (3.4) выполняются на всем рассматриваемом частотном диапазоне $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$. Один из способов сформировать далее систему алгебраических уравнений для определения $\mu_i^{(n)}$ состоит в выполнении равенств (3.3), (3.4) в некотором наборе частот ω_j, $j \in [1, M]$. В результате получим систему линейных уравнений

$$\sum \lambda_i^{(n)} K_{1ij}^{(n)} + \mu_i^{(n)} K_{2ij}^{n} = F_j^{(n)} \tag{3.5}$$

для обратной задачи 1 и систему уравнений для обратной задачи 2

$$\sum \mu_i^{(n)} K_{ij}^{(n)} = F_j^{(n)}. \tag{3.6}$$

Здесь $K_{1ij}^{(n)}$, $K_{2ij}^{(n)}$, $K_{ij}^{(n)}$ и $F_j^{(n)}$ — соответственно компоненты матриц и вектора, вычисленные для фиксированной частоты ω_j.

Для решения систем (3.5) и (3.6) линейных алгебраических уравнений применялся проекционно-итерационный метод Пэйджа-Саундерса (LSQR) [15].

4. Численные эксперименты

Численная реализация предложенного метода была проведена для простейшей прямоугольной области: $S = \{x, y|\ 0 \leqslant x_1 \leqslant l,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant h\}$ с границами $l_u = \{x, y|\ x_1 = 0, 0 \leqslant x_2 \leqslant h\}$, $l_1 = \{x, y|\ 0 \leqslant x_1 \leqslant l,\ x_2 = 0\}$, $l_2 = \{x, y|\ 0 \leqslant x_1 \leqslant l,\ x_2 = h\}$, $l_{\sigma 0} = \{x, y|\ x_1 = 0, 0 \leqslant x_2 \leqslant h\}$.

Характеристики материалов были представлены в виде суммы начального приближения $E_0 = 18\,700$ МПа и $G_0 = 6\,680$ МПа и некоторой малой функции $E(x_1) = E_1(x_1) + E_0$ и $G(x_1) = G_1(x_1) + G_0$. Характеристики начального приближения E_0 и G_0 соответствуют компактной костной ткани [14], плотность которой $\rho = 1\,850$ кг/м^3. В дальнейшем будем рассматривать не модуль Юнга E и модуль сдвига G, а коэффициенты Ляме λ и μ.

Приведем задачу к безразмерному виду. Для этого введем размерные константы: $a = 10^{-2}$ м — характерный размер тела, $\mu = 6\,680$ МПа — характерное значение модуля сдвига, например, доступное для измерения на границе тела, $c = \sqrt{\rho/\mu}$ — скорость поперечных волн.

Пусть новые безразмерные величины и координаты будут иметь вид

$$\tilde{x}_1 = x_1/a, \quad \tilde{x}_2 = x_2/a,$$

$$\tilde{u}_1 = u_1/a, \quad \tilde{u}_2 = u_2/a, \quad \tilde{\mu} = \tilde{G} = \mu/\mu,$$

$$\tilde{E} = E/\mu, \quad \tilde{p} = p/\mu, \quad \tilde{\omega} = \omega a/c,$$

$$\tilde{\lambda} = \lambda/\mu, \quad \tilde{\mu} = \mu/\mu, \quad \tilde{h} = h/a, \quad \tilde{l} = l/a.$$

В дальнейшем знак «тильда» $\sim$ будем опускать. В серии расчетов полагается $h = 0,05$, $l = 1$, $p = 1$. Начальные приближения безразмерных коэффициентов Ляме получаются следующими: $\lambda_0 = 4$, $\mu_0 = 1$.

Был проведен анализ спектра, для решения обратной задачи использовались частотные интервалы перед первой собственной частотой, а также между первой и второй собственными частотами. Лучшие результаты по реконструкции искомых характеристик получались в частотном диапазоне с более пологой АЧХ.

В качестве примеров реализации рассмотрим некоторые варианты одномерных обратных задач.

Будем рассматривать следующий частный случай обратной задачи 1. Будем считать, что $\lambda = \text{const}$, а $\mu(x_1) = \mu_0 + \mu_1(x_1)$ зависит только от координаты x_1 (задача 1а).

Также был рассмотрен другой частный случай задачи 1, при котором $\mu = \text{const}$, а $\lambda(x_1) = \lambda_0 + \lambda_1(x_1)$ зависит только от координаты x_1 (задача 1б). В этом случае восстановление происходит аналогично предыдущему случаю.

Кроме того, рассмотрен частный случай обратной задачи 2, при реализации которого найден закон изменения модуля сдвига μ в зависимости от переменной x_1.

Расчеты прямых задач производились при помощи учебной версии пакета FlexPDE 5 с точностью 10^{-6}. Данные экспортировались в вычислительную программу, которая осуществляла решение системы линейных уравнений на основе метода Пэйджа-Саундерса и формировала файл с результатами, затем строились графики с промежуточными результатами и создавался файл с поправками для очередной итерации. Количество разбиений области при решении задач 1а и 1б составляло $N = 64$, при решении задач 2 — $N = 16$.

Численные результаты для задачи 1а.

Часть границы l_u тела закреплена, к части границы l_σ приложена периодическая нормальная нагрузка p, части границы l_1 и l_2 свободны от напряжений.

Результат восстановления закона $\lambda_1(x_1) = \lambda(x_1) - \lambda_0 = x_1$. На рис. 1 показана функция $\lambda_1(x_1)$, сплошная линия соответствует точному закону, крестики — первой итерации, кружки — второй итерации.

Результат восстановления закона $\lambda_1(x_1) = \lambda(x_1) - \lambda_0 = e^{x_1}$. На рис. 2 показана функция $\lambda_1(x_1)$ с теми же обозначениями.

Численные результаты для задачи 2.

Случай **A:** часть границы l_u тела закреплена, к части границы l_σ приложена постоянная касательная нагрузка p, части границы l_1 и l_2 свободны от напряжений.

В прямой задаче изучались две координатные зависимости модуля сдвига от координаты x_1 — линейная $\mu_0(x) = m_0 + m_1 x$ и квадратичная $\mu_0(x) = m_0 + m_2 x^2$. Эти задачи решались при следующих значениях параметров $m_0 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$. В качестве начального приближения $\mu^{(0)}(x)$ выбиралось значение $\mu^{(0)}(x) = m_0$.

Система линейных уравнений формировалась так же, как и при решении задачи 1. Размерность системы $N = 16$.

На рис. 3–5 сплошная линия — истинное распределение, пунктирная линия с точка-

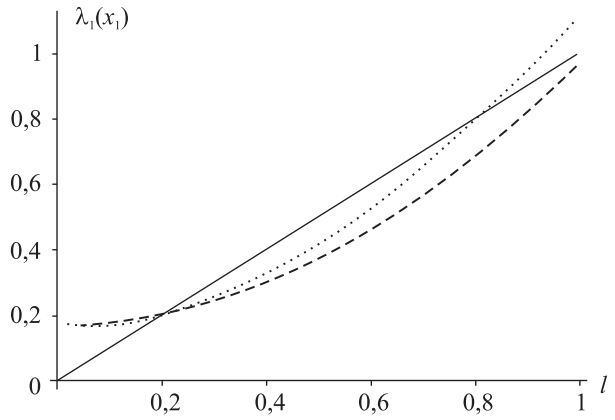

Рис. 1

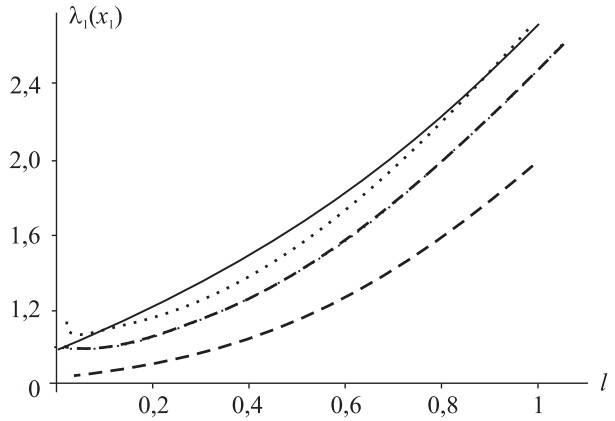

Рис. 2

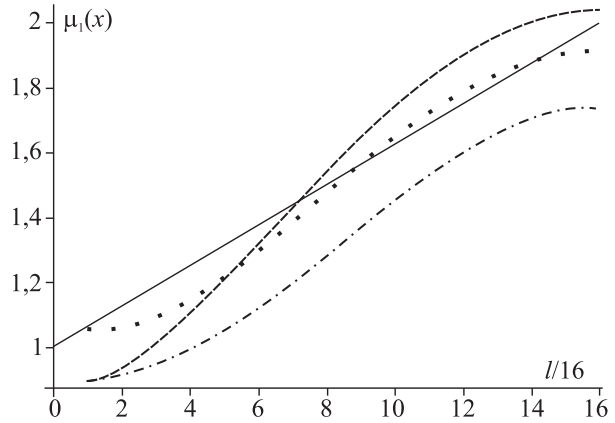

Рис. 3

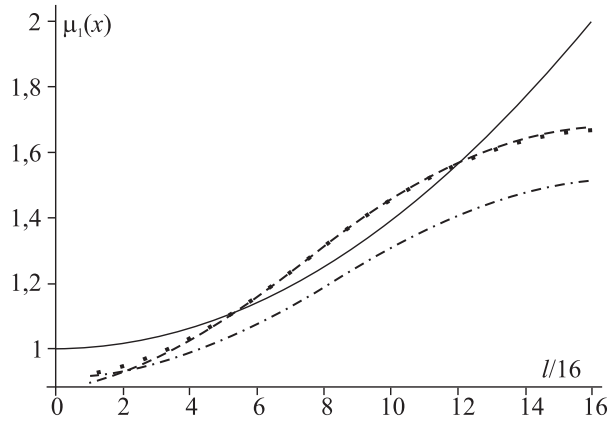

Рис. 4

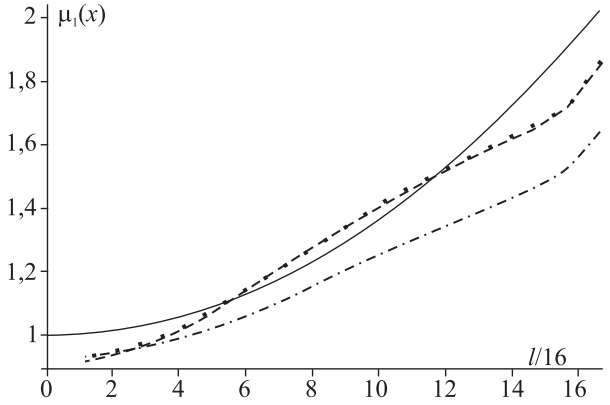

Рис. 5

ми — результат восстановления на первой итерации, пунктирная линия — результат восстановления на второй итерации, кружочки — результат восстановления на третьей итерации.

На рис. 3 представлены результаты реконструкции модуля закона $\mu(x) = m_0 + m_1 x$.

На рис. 4 представлен результат восстановления закона $\mu(x) = m_0 + m_1 x^2$.

Случай **B:** часть границы l_u тела закреплена, к части границы l_σ приложена касательная нагрузка, распределенная по линейному закону $P(x) = 0,2 + px$, части границы l_1 и l_2 свободны от напряжений.

На рис. 5 представлен результат восстановления закона $\mu(x) = m_0 + m_1 x^2$.

5. Выводы

Таким образом, результаты численных экспериментов показали принципиальную возможность реконструкции модуля сдвига или модуля Юнга по полю смещений на границе тела при априорной информации о его одномерности при помощи предлагаемой итерационной процедуры [13, 14].

Литература

1. *Lee F., Bronson J.P., Lerner R.M., Parker K.J., Huang S.R.* Sonoelastisity imaging: results in *in vivo* tissue specimens // Radiology. 1991. Vol. 181(1). P. 237–239.
2. *Lerner R.M., Parker K.J., Huang S.R.* Sonoelastisity. Medical elastisity images derived from ultrasound signals in mechanically vibrated tissue // Acoustical Imaging. 1988. Vol. 16. P. 317–327.
3. *Lerner R.M., Parker K.J., Holen J., Gramiak R., Waag R.C.* Sonoelastisity images derived from ultrasound signals in mechanically vibrated targets // Ultrasound Med. Biol. 1990. Vol. 16(3). P. 231–239.
4. *Yamakoshi Y., Sato T.* Ultrasonic imaging of vibration of soft tissue under forced vibration // IEEE Transactions on Ultrasonic Ferroelectrics and Frequency Control. 1990. Vol. 37(2). P. 45–53.
5. *Сковорода А.Р.* Реконструкция упругих свойств мягких биологических тканей по данным об их деформировании при динамическом нагружении // Биофизика. 2000. Т. 45. Вып. 4. С. 723–729.
6. *Сковорода А.Р., Аглямов С.Р.* Определение механических свойств многослойной вязкоупругой среды по данным измерений импеданса // Биофизика. 1998. Т. 43. Вып. 2. С. 348–352.
7. *Руденко О.В., Сарвазян А.П.* Волновая биомеханика скелетной мышцы // Акустический журнал. 2006. Т. 52. № 6. С. 833–846.
8. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Тиманин Е.М.* Определение импедансных свойств биоматериалов // Акустический журнал. 1993. Т. 39. № 6. С. 1043–1049.
9. *Тиманин Е.М.* Поля смещений поверхностного источника колебаний в слоистой биологической ткани // Акустический журнал. 2002. Т. 48. № 1. С. 98–104.
10. *James L. Buchanan, Robert P. Gilbert.* Determination of the parameters of cancellous bone using high frequency acoustic measurements // Mathematical and Computer Modelling. 2007. Vol. 45. P. 281–308.
11. *Яхно В.Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990. 304 с.
12. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
13. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит. 2007. 223 с.
14. *Маслов Л.Б.* Резонансные свойства большеберцовой кости в неповрежденном состоянии и с устройствами внешней фиксации // Российский журнал биомеханики. 2003. Т. 7. № 2. С. 20–34.
15. *Paige C. C., Saunders M. A.* An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // ASM Trans. Math. Softw. Vol. 8. 1982. P. 43–71.

Ключевые слова: реконструкция модулей упругости, биоматериалы, итерационная процедура

Статья поступила 21 января 2008 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону