УДК 539.375

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЫСВОБОЖДАЮЩЕЙСЯ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ ПРИ ОБРАЗОВАНИИ ИЗОЛИРОВАННОГО ДЕФЕКТА[1]

Дунаев В. И.[2]

ABOUT ONE METHOD OF CALCULATING RELEASED INTERNAL ENERGY IN THE PROCESS OF AN ISOLATED DEFECT FORMATION

Dunaev V. I.

In this work the integrals for the internal energy released in the process of an isolated defect formation were calculated through coefficients of only one complex potential. This complex potential is a segment of a power series, since conformal mapping (exact or approximate) of the unit circle to the plane with a defect is also set with the segment of a power series.

Введение

В работе [1] предложено энергетическое условие разрушения хрупких тел при образовании изолированного дефекта в условиях однократного статического нагружения. При плоском напряженно-деформированном состоянии получено комплексное представление интегралов высвобождающейся внутренней энергии (потенциальной и энтропийной составляющей), входящих в это условие. В работах [1, 2], для пластин, находящихся в однородном напряженно-деформированном состоянии при образовании в них дефекта в виде эллипса или астроиды, интегралы внутренней энергии вычисляются с помощью вычетов. В настоящей работе предложенный метод вычисления интегралов высвобождающейся внутренней энергии обобщен для плоскости с дефектом произвольной формы, являющейся конформным отображением внешности единичного круга, если конформное отображение задается отрезком степенного ряда.

1. Постановка и метод решения задачи

Пусть односвязное тело, до образования в нем изолированного дефекта, находится в однородном напряженно-деформированном состоянии под действием главных напряжений P_1 и P_2. Будем считать, что при образовании дефекта тело деформируется теми же напряжениями, приложенными вдали от дефекта (теоретически на бесконечности).

Рассмотрим бесконечную пластинку D, ослабленную криволинейным отверстием с контуром L, когда на бесконечности приложены напряжения P_1 и P_2, действующие во взаимно перпендикулярных направлениях, и напряжение P_1 составляет с осью $0x$ угол α. При этом контур L свободен от внешних напряжений.

Задача об определении напряженно-деформированного состояния плоской пластинки сводится [3] к нахождению двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного (комплексных потенциалов) $z = x + iy$, удовлетворяющих граничному условию

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = 0, \quad z \in L \tag{1.1}$$

или в сопряженной форме

$$\overline{\varphi(z)} + \overline{z}\varphi'(z) + \psi(z) = 0, \quad z \in L, \tag{1.2}$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \Gamma z + \varphi^0(z) \\ \psi(z) &= \Gamma' z + \psi^0(z) \end{aligned} \tag{1.3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ р2006_юг (проект 08-01-99014).

[2]Дунаев Владислав Игоревич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры численного анализа Кубанского государственного университета; e-mail: i.dunaev@hotmail.com

Здесь $\Gamma = \frac{1}{4}(P_1 + P_2)$, $\Gamma' = -\frac{1}{2}(P_1 - P_2)e^{-2i\alpha}$, $\varphi^0(z)$, $\psi^0(z)$ — голоморфные в области D функции, включая и бесконечно удаленную точку.

Тогда напряжения и перемещения вычисляют по формулам Колосова-Мусхелишвили [3]

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right], \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2\left[\overline{z}\varphi''(z) + \varphi'(z)\right], \\ 2\mu(u_1 + iu_2) &= \chi\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \psi(z), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $2\mu = E/(1+\nu)$, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, $\chi = 3 - 4\nu$ для плоской деформации и $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$ для плоского напряженного состояния.

Пусть функция $z = \omega(\xi)$, осуществляющая конформное отображение внешности единичного круга в плоскости ξ на внешность криволинейного контура L в плоскости z, имеет вид

$$\omega(\xi) = R\left[\xi + \sum_{l=1}^{N} \mathrm{c}_l \xi^{1-l}\right]. \tag{1.5}$$

Тогда, переходя к переменным ξ в выражении (1.2), получим граничное условие

$$\overline{\varphi(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \cdot \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = 0, \tag{1.6}$$

где $\sigma = e^{i\theta}$ — произвольная точка единичной окружности.

Согласно соотношениям (1.3), функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ представимы в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= R\Gamma\xi + \varphi^0(\xi), \\ \psi(\xi) &= R\Gamma'\xi + \psi^0(\xi). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь $\varphi^0(\xi)$, $\psi^0(\xi)$ — голоморфные в области $|\xi| > 1$ функции, включая и бесконечно удаленную точку.

Поскольку отображение $\omega(\xi)$ задается отрезком степенного ряда (1.5), то, следуя [3], функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= R\Gamma\xi + \sum_{l=1}^{N} a_l \xi^{1-l}, \\ \psi(\xi) &= R\Gamma'\xi + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \xi^{1-l}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Из граничного условия (1.6) следует равенство

$$\psi(\sigma)\omega('\sigma) = -\overline{\varphi(\sigma)}\omega('\sigma) - \omega(\sigma)\varphi'(\sigma). \tag{1.9}$$

Подставляя в равенство (1.9) выражения (1.5) и (1.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых положительных степенях σ в обеих частях равенства, с учетом условия $\psi^0(\infty) = 0$ $(b_1 = 0)$ [3] получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов a_l, определяющих функцию $\varphi(\xi)$

$$\overline{a}_p + \sum_{l=1}^{N-p}(1-l)c_l\overline{a}_{l+p} + \sum_{l=1}^{N-p}(1-l)\overline{c}_{l+p}a_l + R\Gamma\overline{c}_p = D_p. \tag{1.10}$$

Здесь $D_p = \begin{cases} 0, & p \neq 2, \\ R\,\Gamma', & p = 2, \ \mathrm{p} = 1, \ldots, N. \end{cases}$

Функцию $\psi(\xi)$ можно найти и не прибегая к сравнению коэффициентов перед одинаковыми степенями σ [4].

Умножая обе части равенства (1.9) на $\frac{1}{2\pi i(\sigma - \xi)}$, где ξ — точка вне единичной окружности ω и интегрируя это соотношение по ω, получаем

$$\omega('\xi)\psi(\xi) = -\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right)\omega('\xi) - \omega\left(\frac{1}{\xi}\right)\varphi'(\xi),$$

откуда

$$\psi(\xi) = -\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right) - \frac{\omega(\xi)}{\omega('\xi)}\varphi'(\xi).$$

2. Вычисление интегралов внутренней энергии

Покажем, что полученное решение может быть использовано для эффективного вычисления интегралов внутренней энергии

$$W = U - \gamma\Sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} n_j ds + \alpha_0 T_0 k_1 \oint\limits_{\Sigma} u_i^{(1)} \delta_{ij} n_j ds - \gamma\Sigma, \tag{2.1}$$

$$i, j, = 1, 2,$$

входящих в энергетическое условие хрупкого разрушения [1]

$$\frac{dW}{da} = 0, \tag{2.2}$$

где W — полная энергия, U — внутренняя энергия, γ — внутренняя энергия, необходимая для образования единицы площади новой поверхности, $\sigma_{ij}^{(0)}$ — компоненты тензора напряжения в пластине без дефекта, находящейся в однородном напряженном состоянии под действием главных напряжений P_1 и P_2, $u_i^{(1)}$ — компоненты вектора перемещения в пластине с дефектом, n_i — компоненты вектора внешней нормали к области, ограниченной контуром Σ, δ_{ij} — символ Кронекера, α_0 – линейный коэффициент теплового расширения, T_0 — абсолютная температура, $k_1 = E/(1-\nu)$ — для плоского напряженного состояния, $k_1 = E/(1-2\nu)$ — для плоской деформации, a — представительный параметр контура дефекта.

Используя выражения (1.4), комплексное представление интегралов внутренней энергии (2.1) приводится к виду [1]

$$U = \frac{1}{4\mu}\,\mathrm{Re}\Bigg\{\frac{1}{i}\oint\limits_{\Sigma}([\chi\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1('z)} - \overline{\psi_1(z)}]\times$$
$$\times\,\overline{[z\varphi_0''(z)+\varphi_0('z)]} - [\chi\overline{\varphi_1(z)} - \overline{z}\varphi_1('z) - \psi_1(z)]\times$$
$$\times\,[\varphi_0(z)+\varphi_0('z)])dz\Bigg\} +$$
$$+\frac{\alpha_0 T_0 k_1}{2\mu}\,\mathrm{Re}\Bigg\{i\oint\limits_{\Sigma}[\chi\overline{\varphi_1(z)} - \overline{z}\varphi_1('z) - \psi_1(z)]dz\Bigg\}.$$

Для рассматриваемого случая с учетом функций

$$\varphi_0(z) = \Gamma z, \quad \psi_0(z) = \Gamma' z,$$

определяющих однородное напряженно-деформированное состояние пластинки без дефекта и граничных условий (1.1), (1.2) получим

$$U = \frac{\chi+1}{4\mu}\,\mathrm{Re}\left\{i\oint\limits_{\Sigma}[2\Gamma\overline{\varphi_1(z)} - \Gamma'\varphi_1(z)]dz\right\} + \\ + \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\chi+1)}{2\mu}\,\mathrm{Re}\left\{i\oint\limits_{\Sigma}\overline{\varphi_1(z)}dz\right\}. \quad (2.3)$$

Заметим, что для вычисления внутренней энергии U по формуле (2.3) достаточно определить функцию $\varphi_1(z)$ из решения задачи о бесконечной плоскости, ослабленной отверстием, когда на бесконечности заданы напряжения P_1 и P_2.

Пусть $z = \omega(\xi)$ — регулярная на единичной окружности ω функция, отображающая ее внешность на внешность контура Σ. Переходя в интегралах (2.3) к новой переменной, получаем

$$U = \frac{\chi+1}{4\mu}\,\mathrm{Re}\Bigg\{i\oint\limits_{\omega}[2\Gamma\overline{\varphi_1(\sigma)} -$$
$$-\,\Gamma'\varphi_1(\sigma)]\omega'(\sigma)d\sigma\Bigg\} + \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\chi+1)}{2\mu}\times$$
$$\times\,\mathrm{Re}\left\{i\oint\limits_{\omega}\overline{\varphi_1(z)}\omega'(\sigma)d\sigma\right\}. \quad (2.4)$$

Если отображение $z = \omega(\xi)$ задается отрезком степенного ряда (1.5), то с учетом выражения (1.8) имеем

$$\varphi_1(\sigma) = R\Gamma\sigma + \sum_{l=1}^{N} a_l\sigma^{1-l},$$
$$\overline{\varphi_1(\sigma)} = R\Gamma\frac{1}{\sigma} + \sum_{l=1}^{N}\overline{a}_l\sigma^{l-1}, \quad (2.5)$$
$$\omega'(\sigma) = R\left[1 - \sum_{l=1}^{N} l c_{l+1}\sigma^{-(l+1)}\right].$$

Из выражений (2.5) следует, что подынтегральные функции в интегралах (2.4) регулярны в области $|\sigma| \leqslant 1$, как функции комплексной переменной σ, за исключением полюса в точке $\sigma = 0$. Поэтому интегралы (2.4) могут быть вычислены при помощи вычетов. Подставляя равенства (2.5) в выражение (2.4) и вычисляя интегралы внутренней энергии, получаем

$$U = \frac{(\chi+1)\pi}{2\mu}\,\mathrm{Re}\Bigg\{\Gamma' R(a_2 - R\Gamma c_2) -$$
$$-\,2\Gamma R\left(R\Gamma - \sum_{l=1}^{N-1} l\overline{a}_{l+1}c_{l+1}\right)\Bigg\} +$$
$$+\,\frac{\alpha_0 T_0 k_1(\chi+1)\pi}{\mu}\times$$
$$\times\,\mathrm{Re}\left\{R\left(\sum_{l=1}^{N-1} l\overline{a}_{l+1}c_{l+1} - R\Gamma\right)\right\}. \quad (2.6)$$

Коэффициенты a_l, определяющие функцию $\varphi_1(\sigma)$, входящие в выражение для внутренней энергии (2.6), находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (1.10).

В частности, при образовании дефектов в виде эллипса и астроиды выражения внутренней энергии (2.6) совпадают с выражениями, полученными в работах [1, 2].

Заключение

В работе вычислены интегралы внутренней энергии, высвобождающейся при образовании изолированного дефекта, через коэффициенты только одного комплексного потенциала, являющегося отрезком степенного ряда. Это следует из того, что конформное отображение (точное или приближенное) внешности единичного круга на плоскость с дефектом представлено в виде отрезка степенного ряда.

Литература

1. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Энергетическое условие разрушения термоупругих твердых тел // Изв. РАН. МТТ. 2003. №6. С. 69–81.
2. *Дунаев В.И., Тугуз Т.К.* О влиянии формы изолированного дефекта на макроскопический критерий хрупкого разрушения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. №2. С. 46–50.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
4. *Каминский А.А.* Хрупкое разрушение вблизи отверстий. Киев: Наукова Думка, 1982. 157 с.

Ключевые слова: изолированный дефект, внутренняя энергия, конформное отображение

Статья поступила 21 февраля 2008 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар