

УДК 532.526.5

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ¹

Н. Ф. Морозов², В. Г. Осмоловский³

THEORY OF UNIQUE EXISTENCE OF THE SOLUTION FOR ONE MODEL PROBLEM OF MECHANICS

Morozov N. F., Osmolovsky V. G.

The work is aimed at proving the unique existence of the problem $u_t^i + (H_{u^i})x = \nu u_{xx}^i$, $\nu > 0$ on the segment $[0, l]$ with initial and boundary conditions of the following type: $u_t^i(0, t) = u^i(l, t) = 0$, $u^i(x, 0) = \varphi^i(x)$.

1. Введение

В монографии [1, с. 507] для вектор-функции $u(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t))$ предложена система уравнений

$$\begin{aligned} u_t^i + (H_{u^i})x &= 0, \\ i &= 1, 2, \quad t \geq 0, \quad x \in R^1, \\ H &= H(u) = \frac{1}{2}f((u^1)^2 + (u^2)^2) - \\ &\quad - \frac{1}{4}k((u^1)^2 + (u^2)^2)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}g((u^2)^2 - (u^1)^2), \\ f, k, g &\in R^1, \end{aligned} \quad (1.1)$$

описывающая квазипоперечные волны. Для выбора допустимых разрывов и нахождения единственного решения начально-краевой задачи для системы (1.1) предлагается метод исчезающей вязкости. Этот метод приводит к замене системы (1.1) на систему [1, с. 514]

$$u_t^i + (H_{u^i})x = \nu u_{xx}^i, \quad \nu > 0. \quad (1.2)$$

Работа посвящена доказательству существования и единственности решения задачи

(1.2) на отрезке $[0, l]$ со следующими начальными и граничными условиями⁴:

$$u_t^i(0, t) = u^i(l, t) = 0, \quad u^i(x, 0) = \varphi^i(x). \quad (1.3)$$

Нелинейность в системе (1.2) при одномерной пространственной переменной по своей силе сходна с нелинейностью двумерного уравнения Навье-Стокса. Поэтому доказательство существования и единственности решения задачи (1.2), (1.3) проводится по схеме, предложенной в [2, гл.6].

2. Постановка задачи и формулировка результатов

Фиксируем число $T > 0$. Положим $Q_T = (0, l) \times (0, T)$. Вектор-функцию $u(x, t)$, для которой существуют соболевские производные

$$\begin{aligned} u_t &\in L_2(Q_T), \quad u_x \in L_2(Q_T), \\ u_{xt} &\in L_2(Q_T), \quad u_{xx} \in L_q(Q_T) \end{aligned} \quad (2.1)$$

для всех $q \in [1, 2]$, назовем решением задачи (1.2), (1.3), если для почти всех $x, t \in Q_T$ выполняются уравнения (1.2), а также граничные и начальные условия (1.3), понимаемые в смысле теоремы вложения.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ р2003юг (03-01-96653).

²Морозов Никита Фёдорович, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теории упругости Санкт-Петербургского государственного университета.

³Осмоловский Виктор Георгиевич, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН.

⁴Этот вопрос возник при выступлении А. Г. Куликовского (одного из авторов монографии [1]) на семинаре ИПМ РАН.

Теорема. Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l) \cap W_2^2(0, l)$. Тогда у задачи (1.2), (1.3) существует и только одно решение.

При доказательстве этой теоремы мы не будем использовать явный вид функции $H(u)$. Нам потребуется лишь существование у нее трех непрерывных производных и справедливость оценок

$$\begin{aligned} |H_{u^i}(u)| &\leq C_0(1 + |u|^3), \\ |H(u)_{u^i u^k u^j}(u) \xi^i \zeta^k \lambda^j| &\leq 2C_0 |u| |\xi| |\zeta| |\lambda| \\ &\text{для всех } \xi, \zeta, \lambda \in R^2, \\ |H_{u^i}(v) - H_{u^i}(w)| &\leq \\ &\leq C_0(1 + |v| + |w|)|v - w|. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Сначала мы получим набор априорных оценок. На их основании с помощью метода Фурье установим существование решения, затем докажем единственность этого решения.

3. Априорные оценки

Нам предстоит получить две априорные оценки для решения задачи (1.2), (1.3). В каждой из этих оценок будет предполагаться, что функция $u(x, t)$ имеет непрерывные производные u_{xx} , u_{xt} , u_{tt} в Q_T и удовлетворяет некоторому равенству, являющемуся формальным следствием (1.2), (1.3). Справедливость этих равенств для приближений Фурье будет обоснована в следующем разделе.

Обозначим $s(t) = \int_0^l |u|^2 dx$, $z(t) = \int_0^l |u_x|^2 dx$,

$y(t) = \int_0^l |u_t|^2 dx$. Здесь и далее, если специально не оговорено, функция u и ее частные производные зависят от аргументов x, t .

1. Предположим, что

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} s(t) - \int_0^l H_{u^i} u_x^i dx + \nu z(t) = 0. \quad (3.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^T z(t) dt &\leq \frac{1}{2\nu} \int_0^l |u(x, 0)|^2 dx, \\ \max_{t \in [0, T]} z(t) &\leq \int_0^l |u(x, 0)|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доказательство. В силу граничных условий

$$\begin{aligned} \int_0^l H_{u^i} u_x^i dx &= \int_0^l \frac{dH}{dx} dx = \\ &= H(u(l, t)) - H(u(0, t)) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому из (3.1) получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_0^l |u(x, \tau)|^2 dx + 2\nu \int_0^\tau \int_0^l |u_x(x, \tau)|^2 dx dt = \\ = \int_0^l |u(x, 0)|^2 dx, \end{aligned}$$

приводящее к оценкам (3.2).

2. Предположим, что выполняется равенство (3.1) и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} y(t) - \int_0^l H_{u^i u^j} u_t^j u_{tx}^i dx + \\ + \nu \int_0^l |u_{tx}|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} y(t) &\leq \left(\int_0^l |u_t(x, 0)|^2 dx \right) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{2C_0^2}{\nu^2} \int_0^l |u(x, 0)|^2 dx \right\}^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l |u_{xt}|^2 dx dt &\leq \frac{1}{\nu} \left(\max_{t \in [0, T]} y(t) \right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{2C_0^2}{\nu^2} \left(\int_0^l |u(x, 0)|^2 dx \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} H_{u^i u^j} u_t^j u_{xt}^i &= H_{u^1 u^1} u_{tx}^1 u_t^1 + H_{u^1 u^2} u_{tx}^1 u_t^2 + \\ &+ H_{u^1 u^2} u_{tx}^2 u_t^1 + H_{u^2 u^2} u_{tx}^2 u_t^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(H_{u^1 u^1} \frac{\partial (u_t^1)^2}{\partial x} + 2H_{u^1 u^2} \frac{\partial (u_t^1 u_t^2)}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + H_{u^2 u^2} \frac{\partial (u_t^2)^2}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} - \int_0^l H_{u^i u^j} u_t^j u_{xt}^i dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(H_{u^1 u^1} (u_t^1)^2 + \right. \\ &+ 2H_{u^1 u^2} u_t^1 u_t^2 + H_{u^2 u^2} (u_t^2)^2 \Big) u_x^j dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l H_{u^i u^k u^j} u_t^i u_t^k u_x^j dx. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу (2.2)

$$\left| \int_0^l H_{u^i u^j} u_t^j u_{xt}^i dx \right| \leq C_0 \int_0^l |u| |u_x| |u_t|^2 dx. \quad (3.5)$$

Так как

$$\begin{aligned} |u_t|^2 &= 2 \int_0^x u_t^i(y, t) u_{xt}^i(y, t) dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^l |u_t| |u_{xt}| dx \leq 2[y(t)]^{\frac{1}{2}} [p(t)]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} C_0 \int_0^l |u| |u_x| |u_t|^2 dx &\leq \\ &\leq 2C_0 [y(t)]^{\frac{1}{2}} \leq [p(t)]^{\frac{1}{2}} I(t) = \\ &= 2\sqrt{\frac{\nu}{2}} [p(t)]^{\frac{1}{2}} C_0 \sqrt{\frac{2}{\nu}} [y(t)]^{\frac{1}{2}} I(t) \leq \\ &\leq \frac{\nu}{2} p(t) + \frac{2C_0^2}{\nu} [I(t)]^2 y(t). \quad (3.6) \end{aligned}$$

Здесь

$$I(t) = \int_0^l |u| |u_x| dx, \quad p(t) = \int_0^l |u_{xt}|^2 dx.$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_0^\tau [I(t)]^2 dt &\leq \int_0^\tau s(t) z(t) dt \leq \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} s(t) \int_0^T z(t) dt. \end{aligned}$$

Учитывая оценку (3.2), получаем

$$\int_0^\tau [I(t)]^2 dt \leq \frac{1}{2\nu} \left(\int_0^l |u(x, 0)|^2 dx \right)^2. \quad (3.7)$$

Из (3.3), (3.5), (3.6) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y(t) + \nu p(t) &\leq \frac{4C_0^2}{\nu} y(t) [I(t)]^2 \equiv \\ &\equiv C_1(t) y(t), \quad (3.8) \end{aligned}$$

где

$$C_1(t) = \frac{4C_0^2}{\nu} [I(t)]^2.$$

Из (3.8) получаем

$$y'(t) \leq C_1(t) y(t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} y(t) &\leq y(0) \exp \left\{ \int_0^t C_1(\tau) d\tau \right\} \leq \\ &\leq y(0) \exp \left\{ \frac{2C_0^2}{\nu^2} \int_0^l |u(x, 0)|^2 dx \right\}^2, \\ &\quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} y(t) &\leq \left(\int_0^l |u_t(x, 0)|^2 dx \right) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{2C_0^2}{\nu^2} \int_0^l |u(x, 0)|^2 dx \right\}^2. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Из (3.9) и (3.8) получаем

$$\begin{aligned} \nu \int_0^T p(t) dt &\leq \int_0^l |u_t(x, 0)|^2 dx + \\ &+ \max_{t \in [0, T]} y(t) \int_0^T C_1(t) dt. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^T p(t) dt &\leq \frac{1}{\nu} \max_{t \in [0, T]} y(t) \times \\ &\times \left(1 + \frac{2C_0^2}{\nu^2} \left(\int_0^l |u(x, 0)|^2 dx \right)^2 \right). \end{aligned}$$

4. Существование решения

Фиксируем систему функций

$$u_j(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi j}{l} x, \quad j = 1, \dots, \quad x \in [0, l].$$

Положим

$$\alpha_j^i = \int_0^l \varphi^i(x) v_j(x) dx, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots. \quad (4.1)$$

Поскольку $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l) \cap W_2^2(0, l)$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^l |\varphi_N(x)|^2 dx &\leq \int_0^l |\varphi(x)|^2 dx, \\ \int_0^l |\varphi_{Nx}(x)|^2 dx &\leq \int_0^l |\varphi_x(x)|^2 dx, \\ \int_0^l |\varphi_{Nxx}(x)|^2 dx &\leq \int_0^l |\varphi_{xx}(x)|^2 dx, \\ \varphi_N^i(x) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j^i v_j(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Будем искать приближенное решение системы (1.2), (1.3) в виде

$$u_N^i(x, t) = \sum_{j=1}^N c_j^i(t) v_j(x), \quad i = 1, 2, \quad (4.3)$$

где $c_j^i(t)$ — неизвестные непрерывно дифференцируемые по t функции.

Для определения коэффициентов $c_j^i(t)$ подставим представление (4.3) в левую часть уравнения (1.2), домножим полученное выражение на $v_k(x)$, $k = 1, \dots, N$, проинтегрируем результат по x на интервале $[0, l]$ и приравняем полученное выражение нулю. Данная процедура приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \int_0^l u_{Nt}^i v_k(x) dx - \int_0^l H_{u^i}(u_N) v_{kx}(x) dx + \\ + \nu \int_0^l u_{Nx}^i(x, t) v_{kx}(x) dx = 0, \\ k = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Раскрывая (4.4), получаем

$$\begin{aligned} c_{kt}^i - \int_0^l H_{u^i}(u_N) v_{kx}(x) dx + \nu k^2 c_k^i(t) = 0, \\ i = 1, 2, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5) дополним начальными условиями

$$c_k^i(0) = \alpha_k^i. \quad (4.6)$$

Очевидно, что система (4.5), (4.6) однозначно разрешима на некотором интервале.

Для доказательства разрешимости полученной системы на всем интервале $[0, T]$ достаточно установить априорную ограниченность решения этой системы. Для доказательства априорной ограниченности домножим равенства (4.4) на $c_k^i(t)$ и просуммируем результат по i от 1 до 2 и по k от 1 до N . Эта процедура приводит к справедливости для $u(x, t) \equiv u_N(x, t)$ соотношения (3.1). Тогда оценки (3.2) и (4.2) приводят к неравенствам

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \int_0^l |u_N(x, t)|^2 dx &\leq \\ &\leq \int_0^l |\varphi_N(x)|^2 dx \leq \int_0^l |\varphi(x)|^2 dx, \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l |u_{Nx}(x, t)|^2 dx dt &\leq \frac{1}{2\nu} \int_0^l |\varphi_N(x)|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2\nu} \int_0^l |\varphi(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из (4.7) вытекает разрешимость системы (4.5), (4.6) на всем интервале $[0, T]$. Очевидно, что решение системы (4.5) дважды непрерывно дифференцируемо по t на интервале $[0, T]$. Используя эту гладкость, продифференцируем каждое равенство (4.4) по t , домножим результат на c_{kt}^i и просуммируем по i от 1 до 2, а по k — от 1 до N , тогда для функции $u_N(x, t)$ получим равенство (3.3). В этом случае оценки (3.4) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \int_0^l |u_{Nt}(x, t)|^2 dx &\leq \\ &\leq \left(\int_0^l |u_{Nt}(x, 0)|^2 dx \right) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{2C_0^2}{\nu^2} \int_0^l |\varphi(x)|^2 dx \right\}^2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l |u_{Nxt}(x, t)|^2 dx dt &\leq \\ &\leq \frac{1}{\nu} \left(\max_{t \in [0, T]} \int_0^l |u_{Nt}(x, t)|^2 dx \right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{2C_0^2}{\nu^2} \int_0^l |\varphi(x)|^2 dx \right)^2. \end{aligned}$$

В силу (4.4)

$$\begin{aligned} \int_0^l u_{Nt}^i(x, 0) v_k(x) dx &= \\ &= \nu \int_0^l u_{Nxx}^i(x, 0) v_k(x) dx + \\ &+ \int_0^l H_{u^i}(u_N(x, 0)) v_{kx}(x) dx. \end{aligned}$$

Домножая эти равенства на c_{kt}^i и производя суммирование, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^l |u_{Nt}^i(x, 0)|^2 dx &= \int_0^l \left(\nu u_{Nxx}^i(x, 0) + \right. \\ &\left. + H_{u^i}(u_N(x, 0)) \right) u_{Nt}^i(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Из этого равенства и оценки (2.2) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^l |u_{Nt}(x, 0)|^2 dx &\leq 2 \int_0^l \left[\nu^2 |u_{Nxx}(x, 0)|^2 + \right. \\ &+ 2C_0^2(1 + |u_N(x, 0)|^6) \left. \right]^{\frac{1}{2}} |u_{Nt}(x, 0)| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^l |u_{Nt}(x, 0)|^2 dx + 2 \int_0^l \left\{ \nu^2 |u_{Nxx}(x, 0)|^2 + \right. \\ &\left. + 2C_0^2(1 + |u_N(x, 0)|^6) \right\} dx. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^l |u_{Nt}(x, 0)|^2 dx &\leq \\ &\leq 4 \int_0^l \left\{ \nu^2 |u_{Nxx}(x, 0)|^2 + \right. \\ &\left. + 2C_0^2(1 + |u_N(x, 0)|^6) \right\} dx. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} |u_N(x, 0)| &= \left| \int_0^x u_{Nx}(y) dy \right| \leq \\ &\leq l^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |u_{Nx}(x, 0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l |u_N(x, 0)|^6 dx &\leq \\ &\leq l^{\frac{5}{2}} \left(\int_0^l |u_{Nx}(x, 0)|^2 dx \right)^3. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Пользуясь оценками (4.2), (4.3), (4.10), приходим к выводу, что существует такая константа $C \neq C(N)$, что

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \int_0^l |u_{Nt}(x, t)|^2 dx &\leq C, \\ \int_0^T \int_0^l |u_{Ntx}(x, t)|^2 dx dt &\leq C. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Огрубляя оценки (4.1), (4.8), (4.11), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} [&|u_N(x, t)|^2 + |u_{Nx}(x, t)|^2 + |u_{Nt}(x, t)|^2 + \\ &+ |u_{Nxt}(x, t)|^2] dx dt \leq R \neq R(N). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из (4.12) следует существование такой подпоследовательности (сохраним за ней прежнее обозначение) $u_N(x, t)$ и такой функции $u(x, t)$, что

$$\begin{aligned} u, u_t, u_x, u_{xt} &\in L_2(Q_T), \\ u(0, t) = u(l, t) &= 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_{Nt} \rightarrow u_t, u_{Nx} &\rightarrow u_x, u_{Nxt} \rightarrow u_{xt} \text{ в } L_2(Q_T), \\ u_N \rightarrow u \text{ в } L_q(Q_T) &\text{ для любого } q \geq 1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Домножим обе части равенства (4.4) на гладкие скалярные функции $b_k^i(t)$, просуммируем полученный результат по i от 1 до 2 и по k от 1 до $M \leq N$, а затем проинтегрируем полученное по t от 0 до T . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \{ &u_{Nt}^i(x, t)w^i(x, t) - H_{u^i}(u_N)w_x^i(x, t) + \\ &+ \nu u_{Nx}^i(x, t)w_x^i(x, t) \} dx dt = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$w^i(x, t) = \sum_{k=1}^M b_k^i(t)v_k(x), \quad M \leq N.$$

Сходимость (4.13) позволяет перейти в (4.14) к пределу при фиксированном M и $N \rightarrow \infty$. После предельного перехода получаем

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \{ &u_t^i(x, t)w^i(x, t) - H_{u^i}(u)w_x^i(x, t) + \\ &+ \nu u_x^i(x, t)w_x^i(x, t) \} dx dt = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Так как функции $w^i(x, t)$, указанные в (4.14), плотны в пространстве функций $W_2^1(Q_T)$, обращающихся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, то (4.15) будет выполненным для любой функции $w \in C_0^\infty(Q_T)$.

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} u_x^i w_x^i dx dt &= \\ &= - \int_{Q_T} \frac{1}{\nu} (u_t^i + H_{u^i u^j}(u)u_x^j) w^i dx dt \end{aligned}$$

для всех $w \in C_0^\infty(Q_T)$, то у функции $u_x^i(x, t)$ существует соболевская производная $u_{xx}^i(x, t)$:

$$\begin{aligned} u_{xx}^i(x, t) &= \\ &= -\frac{1}{\nu} u_t^i(x, t) + H_{u^i u^j}(u)u_x^j(x, t) \in L_q(Q_T) \end{aligned}$$

для любого $1 \leq q \leq 2$.

Осталось заметить, что последнее равенство совпадает с уравнением (1.2).

5. Единственность решения

Предположим наличие двух решений v и w задачи (1.2), (1.3) со свойствами (2.1). Обозначим их разность через u . Тогда функция u обладает гладкостью (2.1), удовлетворяет уравнению и граничным условиям

$$u_t^i + (H_{u^i}(v) - H_{u^i}(w))_x = \nu u_{xx}^i, \quad (5.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

Домножим обе части равенства (5.1) на u^i , произведем суммирование по i и интегрирование по x и t . Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^l (u_t^i u^i + \nu u_x^i u_x^i) dx dt &\leq \\ &\leq \int_0^\tau \int_0^l |H_{u^i}(v) - H_{u^i}(w)| |u_x^i| dx dt. \end{aligned}$$

Пользуясь (2.2) и предыдущим неравенством, получаем

$$\begin{aligned} s(\tau) + 2\nu \int_0^\tau z(t) dt &\leq \\ &\leq C_0 \int_0^\tau \int_0^l (1 + |w|^2 + |v|^2) |u| |u_x| dx dt. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Поскольку

$$|u|^2 \leq 2I(t),$$

то

$$|u| \leq \sqrt{2} [s(t)]^{\frac{1}{2}} [z(t)]^{\frac{1}{4}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^l (1 + |w|^2 + |v|^2) |u| |u_x| dx dt &\leq \\ &\leq \sqrt{2} \int_0^\tau (s(t))^{\frac{1}{4}} (z(t))^{\frac{1}{4}} \times \\ &\times \left(\int_0^l (1 + |w|^2 + |v|^2) |u_x| dx \right) dt \leq \\ &\leq \sqrt{2} \int_0^\tau (s(t))^{\frac{1}{4}} (z(t))^{\frac{1}{4}} \times \\ &\times \left(\int_0^l (1 + |w|^2 + |v|^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} (z(t))^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ &\leq \sqrt{2} \max_{t \in [0, T]} \left(\int_0^l (1 + |w|^2 + |v|^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \int_0^\tau (s(t))^{\frac{1}{4}} (z(t))^{\frac{3}{4}} dt. \end{aligned}$$

Из (2.1) следует, что

$$\sqrt{2} \max_{t \in [0, T]} \left(\int_0^l (1 + |w|^2 + |v|^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \equiv R < \infty.$$

Поэтому из (5.2) и последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} s(\tau) + 2\nu \int_0^\tau z(t) dt &\leq R \int_0^\tau (s(t))^{\frac{1}{4}} (z(t))^{\frac{3}{4}} dt \leq \\ &\leq 2\nu \int_0^\tau z(t) dt + C_{\nu, R} \int_0^\tau s(t) dt, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $C_{\nu, R}$ — некоторая положительная константа.

Положим

$$Y(\tau) = \int_0^\tau \int_0^l |u(x, t)|^2 dx dt.$$

Тогда (5.3) можно переписать в виде

$$Y'(\tau) \leq C_{\nu, R} Y(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq T.$$

Поскольку $Y(0) = 0$, из последнего неравенства получаем

$$Y(t) = 0 \text{ для всех } t \in [0, T].$$

Литература

1. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М., 2001.
2. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.