

УДК 532:533:536

**ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРЕДЕЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ ПЛАВЛЕНИЯ
ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ НАГРЕВАТЕЛЕЙ МЕТОДОМ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ***Клоков В. В.¹, Таха А. Ш.²*ON DETERMINATION OF A THRESHOLD FUSION BOUNDARY IN THE PRESENCE OF
SEVERAL HEAT SOURCES USING THE HYDRODYNAMICAL ANALOGY METHOD

Klokov V. V., Takha A. S.

When describing natural phenomena, such as determining the boundaries of snow melting areas or filtration in earth dams and some technological problems, namely dimensional electrochemical processing of metals and wires deposition, it turns out to be useful to solve the following problem stated in terms of the theory of heat conduction. The plane-parallel temperature field is described in terms of the Laplace's equation. The constant threshold value of a local heat current and temperature are assumed to be known on an unknown field boundary (e.g. fusion boundary) in its limiting position. When the heat current value is smaller than the limiting one, the boundary is unchangeable. The work resulted in the solution of the problem aimed to determine this boundary based on the methods of the theory of functions of a complex variable and hydrodynamical analogy of the problem.

При исследовании различных природных явлений, таких как установление границ областей подтаивания снежного покрова или фильтрации в земляных плотинах [1], а также ряда технологических процессов (размерной электрохимической обработки металлов [2], нанесение изоляционного покрытия на электрические провода [3]) полезным оказывается решение следующей задачи, формулируемой в терминах теории теплопроводности. Плоскопараллельное температурное поле описывается уравнением Лапласа. На неизвестной границе поля (например, границе плавления) в предельном ее положении известны постоянная предельная величина локального теплового потока и температура. При величине теплового потока, меньшего предельного, граница не изменяется. В работе получено решение задачи по определению этой границы на основе методов теории функций комплексного переменного и гидродинамической аналогии задачи.

Идея использования гидродинамической аналогии при решении плоскопараллельных стационарных задач теплопроводности была

впервые предложена Кельвиным, экспериментальное моделирование переноса тепла выполнялось на ячейке Хеле-Шоу [4]. Расчет тепловых полей, так же как и гидродинамических, в областях с известными границами может быть осуществлен с использованием теории аналитических функций комплексного переменного [5]. Эта теория успешно применена также при решении краевых задач в областях с частично известными границами (задачи построения крылового профиля, контура гидротехнического сооружения [6], нахождения границы воронки после взрыва на выброс [7]). Однако отсутствуют систематические исследования задач теплопроводности по определению стационарной неизвестной границы пространства теплового поля. Примером подобной задачи может служить проблема по нахождению границы плавления среды от источников тепла. На рис. 1 показаны результаты наблюдения плавления полимерной пленки. Область плавления около цилиндрического нагревателя, превращаясь из кристаллической в стеклообразную, постепенно увеличивается [8]. Через некоторый промежуток вре-

¹Клоков Владимир Васильевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

²Таха Ахмед Шакер, аспирант кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета; e-mail: ahmed_shaker2001@yahoo.com

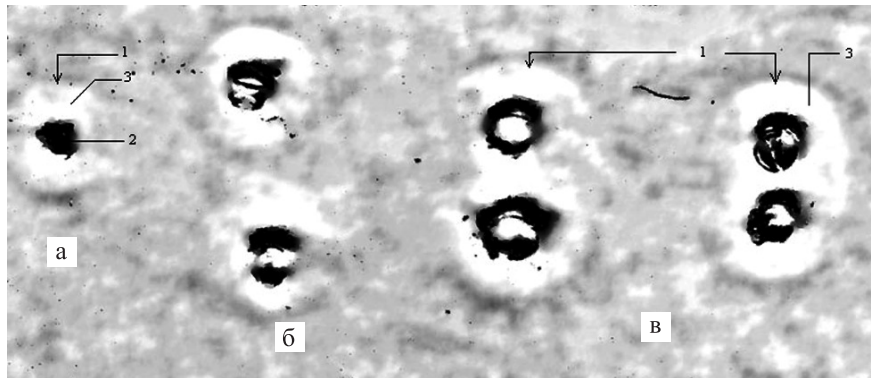


Рис. 1. Области плавления: *а* — один нагреватель; *б* — два нагревателя без взаимного влияния; *в* — два нагревателя с их взаимным влиянием, 1 — граница плавления; 2 — зона нагревателя; 3 — область плавления

мени размер области достигает своего предельного положения. Причины наступления этого состояния до конца не изучены. Например, при нагревании резольной смолы сначала она вязко плавится, но затем вязкость ее возрастает и полимер постепенно переходит в твердую фазу, называемую резитом [9]. При двух источниках нагрева области плавления могут быть изолированными друг от друга, но при достаточно близком расстоянии эти области взаимодействуют.

На рис. 1 представлено сканированное изображение реально наблюдаемого явления — предельной границы плавления. При наличии одного нагревателя или двух нагревателей без их взаимного влияния граница плавления является окружностью (рис. 1а, 1б). При взаимном влиянии двух нагревателей граница плавления является овалом (рис. 1в).

Математическое описание динамики плавления (или затвердевания) тел осуществляется, как известно, путем решения так называемой проблемы Стефана [10, 11]. Последняя состоит в отыскании в заданной области решения нестационарного уравнения теплопроводности при отсутствии в нем конвективных членов, но наличии производной по времени. Считается заданным закон движения границы раздела фаз, скорость точки которой пропорциональна разности тепловых потоков. В данной работе не изучается задача Стефана, а исследуется положение границ плавления (или затвердевания) из условий прекращения движения этой границы. Это условие в безразмерных переменных определяется температурой фазового перехода $T = 0$ и минимальным значением предельной величины плотности теплового потока $\partial T/\partial n = 1$, при котором прак-

тически прекращаются изменения конфигурации границы.

В настоящей работе представлен метод расчета предельной конфигурации в зависимости от расстояния между источниками тепла. Задача, подобная рассматриваемой, но исследованная с целью определения минимального расхода при заданной площади области фильтрации, была решена ранее методом особых точек [12]. В данной работе решение получено методом Жуковского. Этот метод позволил провести изучение таких свойств границы плавления, как ее монотонный характер, положение точек перегиба или их отсутствие, предельные положения границ при увеличении или уменьшении расстояния между нагревателями.

В работе предполагается, что температурное поле является стационарным, конвекцией тепла можно пренебречь, коэффициенты теплопроводности среды являются постоянными. В случае плоскопараллельного характера теплового поля температура удовлетворяет уравнению Лапласа.

Задача решается в области с границей ABCDA, геометрические размеры которой показаны на рис. 2а. В точке С расположен источник тепла постоянной мощности. (Задача формулируется и решается далее с использованием безразмерных переменных). Участок границы области АВ заранее неизвестен. Значения температуры на левой симметричной искомой границе области АВ равны $T = 0$, считаются постоянными и известными, здесь же имеет место равенство $\partial T/\partial n = 1$, где производная берется в направлении нормали (последнее условие соответствует постоянным значениям температуры в области плавления и с другой стороны АВ, где плавление не на-

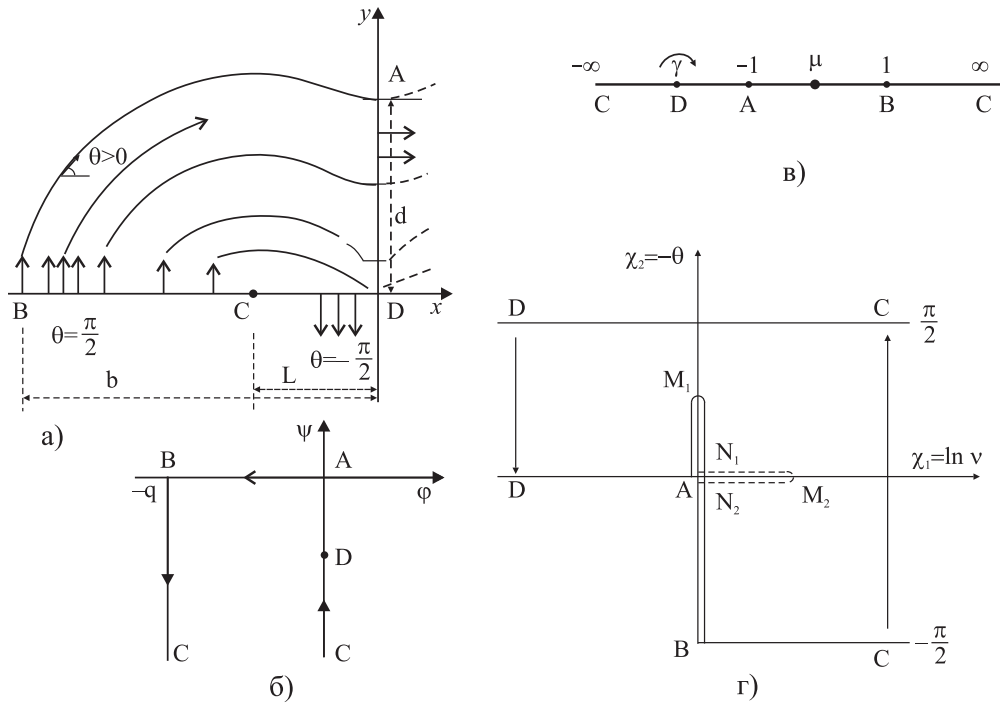


Рис. 2. Области изменения: а — D_z ; б — D_w ; в — D_t ; г — D_χ

ступило). Участки границы BC , CD и DA являются линиями симметрии теплового поля при наличии двух симметрично расположенных источников тепла одинаковой мощности. Эти линии могут являться линиями тепловой изоляции.

Задача имеет гидродинамическую аналогию, состоящую в определении неизвестной границы движения идеальной несжимаемой жидкости, совершающей плоскопараллельное потенциальное течение от источников на BC к стокам на CDA , что соответствует потоку от вихря в точке C .

При этом для фиктивного гидродинамического поля требуется определить комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi + i\psi$, $z = x + iy$, φ — потенциал скорости (аналог теплового потенциала), ψ — функция тока (аналог функции распределения температуры), который должен удовлетворять следующим условиям: на эквипотенциальной линии BC : $\varphi = -q$; на линиях симметрии CD и AD : $\varphi = 0$; на искомой границе BA : $\psi = 0$, $|\frac{dw}{dz}| = 1$.

Требуется в зависимости от геометрического размера L (или d) при заданной величине q найти уравнение линии AB и провести анализ её характера.

Задача решается методом использования функции Жуковского [13], состоящим в установлении связи между областью изменения

D_z и областью изменения D_χ функции

$$\chi = \ln \frac{dw}{dz} = \ln (ve^{-i\theta}) = \ln v - i\theta = \chi_1 + i\chi_2,$$

$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = v_x - iv_y$ — сопряженная скорость.

При решении задачи в параметрическом виде дифференциал dz представляется в виде

$$dz = e^{-\chi} \frac{dw}{dt} dt. \tag{1}$$

Согласно граничным условиям течения имеем на линиях

$$\begin{aligned} BC : v_y > 0, \quad v_x = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \\ CD : v_y < 0, \quad v_x = 0, \quad \theta = -\frac{\pi}{2}, \\ DA : v_x > 0, \quad v_y = 0, \quad \theta = 0, \\ AB : v = 1, \quad \ln v = 0, \end{aligned}$$

где θ — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс, при этом в центре вихря $v_C = \infty$, в точке разветвления потоков $v_D = 0$.

Область изменения функции χ (рис. 2г) представляет собой многоугольник DAM_1BCD с разрезом AM_1N_1 (в случае немонотонного характера линии AB) или AM_2N_2 (в случае монотонности AB).

Отображение верхней полуплоскости D_t изменения вспомогательного переменного t

Координаты точек линий AB

$L = 0,05; \quad \gamma = -82,537; \quad d = 0,634; \quad \mu = -41,271; \quad t_M = t_{\max} = -0,999$											
t_N	-0,999	-0,99	-0,9	-0,5	-0,1	0	0,1	0,5	0,9	0,99	1
$-x_N$	0	0,043	0,14	0,317	0,426	0,449	0,471	0,551	0,621	0,636	0,638
y_N	0,634	0,632	0,618	0,549	0,471	0,449	0,426	0,318	0,142	0,045	0,000
$L = 0,434; \quad \gamma = -1,069; \quad d = 0,236; \quad \mu = -0,88; \quad t_M = -0,88; \quad t_{\max} = -0,219$											
t_N	-1	-0,99	-0,88	-0,5	-0,219	-0,1	0,1	0,5	0,9	0,99	0,999
$-x_N$	0	0,041	0,148	0,308	0,403	0,442	0,504	0,625	0,742	0,766	0,766
y_N	0,236	0,248	0,283	0,355	0,366	0,364	0,353	0,295	0,148	0,053	0,000
$L = 0,321; \quad \gamma = -1,000001; \quad d = 0,001; \quad \mu = -0,999; \quad t_M = -0,999; \quad t_{\max} = -0,0018$											
t_N	-1	-0,999	-0,9	-0,5	-0,1	-0,0018	0,1	0,5	0,9	0,99	0,999
$-x_N$	0,000	0,011	0,031	0,159	0,286	0,310	0,35	0,477	0,604	0,633	0,636
y_N	0,001	0,011	0,138	0,275	0,316	0,318	0,316	0,275	0,138	0,044	0,000

(рис. 2в) на область D_χ с соответствием точек $t_A = -1$, $\chi_A = 0$, согласно теории интеграла Кристоффеля–Шварца [14], осуществляем с помощью функции

$$\chi = c \int_{-1}^t \frac{(s - \mu) ds}{\sqrt{s-1}\sqrt{s+1}(s-\gamma)}, \quad (2)$$

где

$$c = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{2(\gamma - \mu)}. \quad (3)$$

Область изменения D_W является, согласно граничным условиям, полуполосой (рис. 2б), поэтому по той же теории производная $\frac{dw}{dt}$ имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = -i \frac{q}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t+1}\sqrt{t-1}}, \quad (4)$$

величина q пропорциональна суммарному тепловому потоку источника тепла.

Выражения (1–4) позволяют установить связь дифференциалов dz и dt , в которую входят два неизвестных математических параметра γ и μ , соответствующих образам точек D и M_1 (или M_2) в плоскости t .

Первая связь между этими параметрами устанавливается из соответствия образов точки B на границах D_χ и D_t и приводит к равенству

$$\mu = \gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 1}.$$

Второе соотношение между параметрами устанавливаем с учетом заданного расстояния L между источниками тепла

$$L = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (I_1)^c I_2 \frac{du}{\sqrt{(\gamma - u^2)^2 - 1}}, \quad (5)$$

где

$$I_1 = \left| \gamma - u^2 + \sqrt{(\gamma - u^2)^2 - 1} \right|,$$

$$I_2 = \left(\gamma(\gamma - u^2) + \sqrt{(\gamma^2 - 1)((\gamma - u^2)^2 - 1)} - 1 \right)^{1/2}.$$

Из решения нелинейного уравнения (5) при заданном значении L определяется параметр γ . Анализ решения показал, что при $1/\pi < L < 0,434$ решение является двузначным. Например, при $L = 0,4$, $\gamma_1 = -1,316$, $\gamma_2 = -1,006$. Эти решения получаются при задании различных начальных приближений (соответственно $-1, 2; -1, 02$).

При постановке задачи вместо расстояния L может быть задано расстояние d , которое выражается формулой

$$d = -\frac{1}{\pi} \int_{t_C}^{t_B} \exp \left[-c \int_{-1}^t \frac{(s - \mu) ds}{\sqrt{s^2 - 1}(s - \gamma)} \right] \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Это равенство также может являться уравнением для нахождения параметра γ .

Параметрические уравнения искомой линии AB устанавливаем после разделения вещественной и мнимой части дифференциала (1) и интегрирования по t от -1 до t_N , где $1 \geq t_N \geq -1$ (N — точка линии AB):

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{t_N} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left[\int_{-1}^t \frac{(s - \mu) ds}{\sqrt{1 - s^2}(s - \gamma)} \right] \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

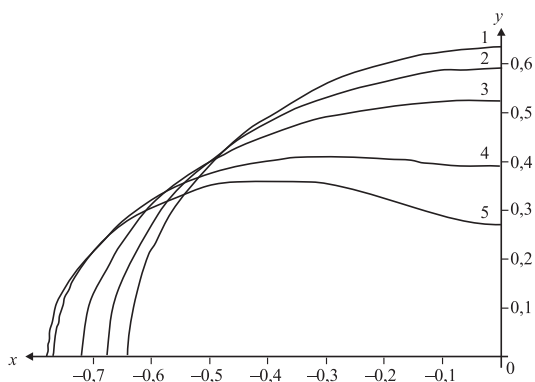


Рис. 3. Предельная граница плавления АВ при изменении длины L : 1 — $L=0,05$; 2 — 0,2; 3 — 0,3; 4 — 0,4; 5 — 0,432

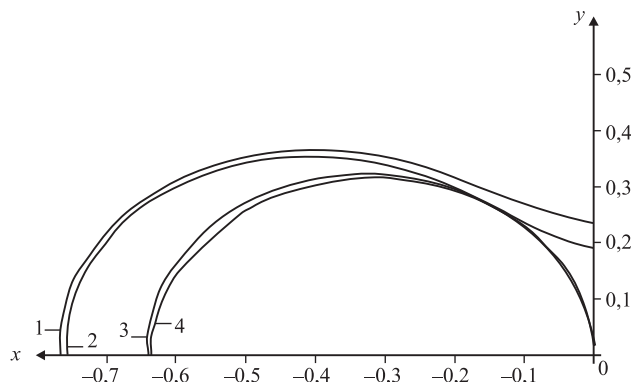


Рис. 4. Предельная граница плавления АВ при изменении длины L : 1 — $L=0,434$; 2 — 0,431; 3 — 0,338; 4 — 0,321

Метод решения задачи позволяет находить координаты точки перегиба M при $t_N = t_M = \mu$, если $-1 < \mu < 1$, и точки экстремума при $t_N = t_{\max}$, в которой $dy/dx = 0$. При $\mu \leq -1$ предельная граница имеет монотонный вид.

В таблице даны результаты расчета параметров γ , d и μ в зависимости от величины L , координат точки перегиба, точки экстремума и координат точек линии АВ.

На рис. 3 представлена граница плавления при увеличении значений L в интервале $0,00 < L < 0,434$, где γ изменяется $-\infty < \gamma < -1,069$, в этом случае расстояние b увеличивается в интервале $2/\pi \leq b \leq 0,778$.

На рис. 4 представлена граница плавления при уменьшении значений L в интервале $0,434 \geq L \geq 1/\pi$, где γ изменяется $-1,069 < \gamma < -1,0$, в этом случае расстояние b уменьшается в интервале $0,766 \geq b \geq 2/\pi$.

Как видно из рис. 3 и рис. 4, расстояние b при минимальных значениях ($d = 0,00$) и максимальных значениях ($d = 2/\pi$) одинаково и равно $2/\pi$. Это обстоятельство соответствует равенству длины четверти дуги окружности и полуокружности, если радиус первой окружности будет в два раза больше радиуса второй окружности.

Численный анализ при $q = 1$ показал, что представленный метод решения справедлив, если $L \leq 0,434$. Приведенные расчеты подтверждают качественный характер границ, установленный экспериментально.

Результаты работы можно использовать также в теории струйных течений [13] и теории размерной электрохимической обработки металлов [2]. Другие примеры расчета границ плавления даны в [15, 16].

Литература

1. Ильинский Н.Б., Якимов Н.Д. Обратная задача фильтрации в земляной плотине // Труды семинара по краевым задачам. Казань 1972.: Изд-во Казан. ун-та, Вып. 9. С. 103–111.
2. Каримов А.Х., Клоков В.В., Филатов Е.И. Методы расчета электрохимического формообразования. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. 386 с.
3. Алимов М.М., Скворцов Э.В. Об оценках расходных характеристик в теории фильтрации и теплопроводности // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 462–468.
4. Шнейдер П.Дж. Инженерные проблемы теплопроводности. М.: ИЛ, 1960. 478 с.
5. Лыков А.В. Теплообмен (справочник). М.: Энергия, 1978. 480 с.
6. Тумашев Г.Г., Нуржин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. 333 с.
7. Ильинский Н.Б. Об одном методе построения выемки выброса при взрыве шнуровых зарядов // Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. С. 71–80.
8. Кодолов В.И., Трубочев А.В. Основы общей химии. Ижевск: Интеграция, 2001. 321 с.
9. Кирпичников П.А., Аверко-Антонович Л.А., Аверко-Антонович Ю.О. Химия и технология синтетического каучука. Ленинград.: Химия, 1970. 528 с.
10. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967. 456 с.
11. Alexiades V., Solomon A.D. Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes. Taylor & Francis, 1993. 323 p.
12. Костерин А.В., Скворцов Э.В. Об оценке минимального расхода при заданной площади фильтрации // Исследования по подземной гидромеханике. Казань 1983.: Изд-во Казан. ун-та. Вып. 6. С. 47–57.

13. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1977. 644 с.
14. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
15. *Клоков В.В., Таха А.Ш.* Задача по определению предельной границы плавления при заданной форме нагревателей / Казанский гос. университет. Казань, 2007. 27 с. Деп. в ВИНТИ 11.01.07, № 28–В2007.
16. *Клоков В.В., Таха А.Ш.* Определение предельной границы плавления методом гидродинамической аналогии // Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук: Тез. докл. Материалы научной конференции. Зеленодольск, 23 ноября 2006 года. С. 50–53.

Ключевые слова: гидродинамическая аналогия, предельная граница плавления, тепловой поток, плоскопараллельная стационарная задача, метод Жуковского, уравнение Лапласа

Статья поступила 17 января 2008 г.

Казанский государственный университет, г. Казань

© Клоков В. В., Таха А. Ш., 2008