УДК 593.3

# РАВНОВЕСИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЭЛАСТИЧНОЙ ТРУБЫ С ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ

***Колесников А. М.***[1]

EQUILIBRIUM OF A HORIZONTAL ELASTIC TUBE HOLDING HEAVY LIQUID

Kolesnikov A. M.

The work studies the equilibrium of a light-wall tube made of hyperelastic material that rests on a smooth rigid horizontal plane and loaded from inside by the pressure of heavy liquid. The gravity is directed downwards. The weight of the tube is neglected in comparison with the weight of the liquid. The membrane theory is used. The equilibrium equations for an infinitely long cylindrical membrane are reduced to the system of ordinary differential equations. The solution of the problem about the equilibrium of a cylindrical membrane with constant-thickness circular cross-section is analyzed. In this case, principal stretch ratios are constant, consequently tensions are constant, too. The solution of this problem is found in Euler's coordinates. The shape of a strained cross-section is defined. Dependences of the contact zone with the surface, maximum height and tension of the membrane on the liquid pressure and density are investigated.

## Введение

Влияние силы тяжести на напряженно-деформированное состояние тонкостенных оболочечных конструкций часто используемых для хранения и транспортировки жидкостей, бывает в ряде случаев существенным. Такое влияние, например, может давать большой вклад в механическое поведение биологических оболочек, раздуваемых жидкостями.

В [1] показано, что в поле тяготения форма оболочки равного сопротивления описывается уравнением капиллярной поверхности и совпадает с формой капли, покоящейся на горизонтальной плоскости. Влияние поля силы тяжести на цилиндрическую оболочку исследуется в [2], где рассматривается задача о плоской деформации, описывающей равновесие замкнутой цилиндрической нелинейно упругой безмоментной оболочки, покоящейся на жесткой горизонтальной плоскости и вмещающей в себя тяжелую жидкость и невесомый сжимаемый газ. Там же [2] исследуются вопросы потери устойчивости такой конструкции.

В данной работе рассматривается задача о равновесии тонкостенной трубы из высокоэластичного материала, покоящейся на гладкой горизонтальной плоскости. Труба наполнена тяжёлой жидкостью под давлением. Сила тяжести направлена вертикально вниз. В первом разделе формулируются уравнения равновесия безмоментной оболочки как двумерного материального континуума. Во втором разделе рассматривается частный случай деформации оболочек, который позволяет двумерную задачу свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Такое преобразование оказывается возможным в случае, когда компоненты метрических тензоров поверхности оболочки в отсчетной и текущей конфигурациях не зависят от одной из гауссовых координат поверхности. Кроме этого, необходимо наложить ограничения на внешнюю нагрузку в виде отсутствия компонент, направленных вдоль той же координатной линии. Постановка задачи о равновесии цилиндрической трубы под давлением тяжелой жидкости дана в третьем разделе. Уравнения равновесия выведены для произвольного выпуклого поперечного сечения и для произвольной толщины оболочки. В четвертом разделе для оболочки кругового поперечного сечения постоянной толщины разрешающая система уравнений равновесия сводится к уравнению, с точностью до обозначений совпадающему с уравнением Лапласа для поверхности раздела двух сред. То есть, с учетом граничных условий задача о равновесии эластичной трубы под действием тяжелой жидкости может быть сведена к частному случаю одномер-

[1]Колесников Алексей Михайлович, канд. физ.-мат. наук, ассистент кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: alex_kam@yahoo.com

ной задачи о равновесии капиллярной поверхности [3] с углом контакта равным $\pi$. Решение задачи сводится к представлению неизвестных функций формы деформированной оболочки в явном виде и через эллиптический интеграл с помощью новой независимой координаты — угла наклона касательной к деформированному поперечному сечению оболочки. Численные расчеты для оболочки кругового поперечного сечения постоянной толщины, выполненной из материала Бартенева-Хазановича, представлены в пятом разделе.

## 1. Модель безмоментной оболочки как двумерного материального континуума

Пусть $o$ и $O$ — поверхности, соответствующие отсчетной и деформированной (текущей) конфигурациям оболочки. Положение точки на $o$ определяется радиус-вектором $\mathbf{r}(q^1, q^2)$, где $q^\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ — гауссовы координаты на $o$. Единичный вектор нормали к поверхности $o$ обозначим $\mathbf{n}$, а основной и взаимный базисы на $o$ обозначим $\mathbf{r}_\alpha$ и $\mathbf{r}^\beta$

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}, \quad \mathbf{r}^\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha = \delta^\beta_\alpha, \qquad \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}^\beta \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже греческие индексы принимают значения 1, 2, а $\delta^\beta_\alpha$ означает символ Кронекера. Коэффициенты первой квадратичной формы $g_{\alpha\beta}$ и первый фундаментальный тензор $\mathbf{g}$ поверхности $o$ вводятся соотношениями

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{g} = g_{\alpha\beta}\mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta = \mathbf{E} - \mathbf{nn}, \qquad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор в трехмерном евклидовом пространстве. Считая параметры $q^\alpha$ лагранжевыми координатами материальной поверхности, будем задавать положение точки поверхности $O$ радиусом-вектором $\mathbf{R}(q^1, q^2)$. Таким образом, материальная точка поверхности, имевшая в отсчетной конфигурации положение $\mathbf{r}(q^1, q^2)$, после деформации имеет положение $\mathbf{R}(q^1, q^2)$. Нормаль к поверхности $O$ обозначим через $\mathbf{N}$, а основной и взаимный базисы на $O$ — $\mathbf{R}_\alpha$ и $\mathbf{R}^\beta$. Имеют место формулы, аналогичные (1.1)

$$\mathbf{R}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^\alpha}, \quad \mathbf{R}^\beta \cdot \mathbf{R}_\alpha = \delta^\beta_\alpha, \qquad \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{N} = \mathbf{R}^\beta \cdot \mathbf{N} = 0. \tag{1.3}$$

Коэффициенты первой квадратичной формы и первый фундаментальный тензор на $O$ обозначаются по аналогии с (1.2) прописными буквами

$$G_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta, \quad \mathbf{G} = G_{\alpha\beta}\mathbf{R}^\alpha \mathbf{R}^\beta = \mathbf{E} - \mathbf{NN}, \quad G = G_{11}G_{22} - G_{12}^2. \tag{1.4}$$

В дальнейшем будут использоваться двумерные операторы градиента (набла-операторы) на поверхностях $o$ и $O$

$$\nabla_0 \mathbf{\Phi} = \mathbf{r}^\alpha \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial q^\alpha},$$

$$\nabla \mathbf{\Phi} = \mathbf{R}^\alpha \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial q^\alpha}.$$

Функция удельной (на единицу площади) энергии оболочки $W$ из несжимаемого материала выражается через функцию удельной энергии трехмерной среды $W^*$ по формуле

$$W(\mathbf{G}^\times) = hW^*(\mathbf{G}^\times + (g/G)\mathbf{nn}),$$

$$\mathbf{G}^\times = (\nabla_0 \mathbf{R}) \cdot (\nabla_0 \mathbf{R})^{\mathrm{T}} = G_{\alpha\beta}\mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta.$$

Здесь $\mathbf{G}^\times$ — мера деформации Коши материальной поверхности [4], $h$ — начальная толщина оболочки.

Толщина оболочки в отсчетной конфигурации $h$ может быть переменной: $h = h(q^1, q^2)$. Толщина деформированной оболочки $D(q^1, q^2)$ определяется из условия несжимаемости соотношением

$$D = h\sqrt{g/G}.$$

Уравнения равновесия в геометрии деформированной конфигурации оболочки можно записать в виде [4]

$$\nabla \cdot \mathbf{L} + \mathbf{q} = 0,$$

$$\mathbf{q} = \xi^\beta \mathbf{R}_\beta - \xi \mathbf{N}, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{L} = 2\sqrt{\frac{g}{G}}(\nabla_0 \mathbf{R})^T \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{G}^\times} \cdot \nabla_0 \mathbf{R} = L^{\alpha\beta}\mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta.$$

Здесь $\mathbf{q}$ — интенсивность внешних сил, отнесенных к площади оболочки в текущей конфигурации, $\mathbf{L}$ — тензор усилий типа Коши.

Удельная потенциальная энергия $W^*$ задается как функция трехмерной меры деформации Коши $\mathbf{\Lambda}$. Для изотропного несжимаемого

материала ее можно представить как функцию главных кратностей удлинений $\lambda_1$, $\lambda_2$

$$W^*(\mathbf{\Lambda}) = W^*(\lambda_1, \lambda_2),$$

а условие несжимаемости можно представить произведением

$$\lambda_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}.$$

Определяющие соотношения (1.5) в компонентной форме представляются в виде

$$L^{\alpha\beta} = \frac{2h}{\eta}\sqrt{\frac{g}{G}}\frac{\partial W^*}{\partial G_{\alpha\beta}}, \quad \eta = \begin{cases} 1, \alpha = \beta, \\ 2, \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{1.6}$$

Для изотропного материала главные оси деформации являются и главными осями напряжений. В главных осях ненулевыми остаются только диагональные компоненты тензора меры деформации оболочки $\mathbf{G}^{\times}$ и тензора усилий $\mathbf{L}$. В случае, когда главные оси совпадают с координатными линиями, главные кратности удлинений выражаются через компоненты меры деформации соотношениями

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{G_{11}}{g_{11}}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{G_{22}}{g_{22}}}. \tag{1.7}$$

В случае задания потенциальной энергии деформации как функции кратностей главных удлинений главные усилия, согласно (1.6), (1.7), примут следующий вид:

$$L^{\alpha\alpha} = \frac{h}{g_{\alpha\alpha}\lambda_\alpha\lambda_1\lambda_2}\frac{\partial W^*}{\partial \lambda_\alpha}. \tag{1.8}$$

## 2. Сведение задачи статики оболочки к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим поверхность $o$ и гауссовы координаты $q^1$ и $q^2$ такие, что компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ (1.2) не зависят от координаты $q^2$ и образуют диагональную матрицу

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^2} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{2.1}$$

Кроме того, положим, что толщина оболочки также не зависит от гауссовой координаты $q^2$

$$h = h(q^1). \tag{2.2}$$

На деформацию оболочки наложим ограничения, сходные с указанными выше. Будем считать, что компоненты метрического тензора $G_{\alpha\beta}$ (1.4) не зависят от координаты $q^2$ и образуют диагональную матрицу

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial q^2} = 0, \quad G_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{2.3}$$

Кроме того, наложим ограничения на компоненты тензора кривизны поверхности деформированной оболочки $B_{\alpha\beta}$ и функцию нагрузки

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial q^2} = 0, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(q^1). \tag{2.4}$$

Можно показать, что уравнения равновесия (1.5) могут быть представлены в скалярном виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L^{11}}{\partial q^1} + L^{11}(2\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21}) + \\ \qquad + L^{22}\Gamma^1_{22} + \xi^1 = 0, \\ \xi^2 = 0, \\ L^{11}B_{11} + L^{12}B_{21} + L^{21}B_{12} + \\ \qquad + L^{22}B_{22} - \xi = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Здесь $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля.

При принятых допущениях на геометрию поверхности (2.1)–(2.4), необходимо, чтобы внешняя нагрузка не имела компонент, направленных вдоль координатной линии $q^2 = \text{const}$. Полученная система (2.5) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 3. Цилиндрическая оболочка под давлением тяжёлой жидкости

Рассмотрим замкнутую цилиндрическую оболочку и введём декартовы координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$ так, чтобы образующая цилиндра была параллельна оси координат $x_3$. Будем считать сечение оболочки выпуклым и симметричным относительно оси $Ox_2$. В выбранной системе координат положение точки поверхности оболочки до деформации представится в виде

$$\mathbf{r} = x_1(q^1)\mathbf{i}_1 + x_2(q^1)\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3. \tag{3.1}$$

Здесь через $q^1$ и $q^2 = x_3$ обозначаются гауссовы координаты оболочки.

Считаем, что толщина недеформированной цилиндрической оболочки постоянна вдоль образующей, т. е. удовлетворяет условию (2.2).

Пусть оболочка лежит на гладкой горизонтальной плоскости $Ox_1x_3$ и нагружена давлением тяжёлой жидкости. Действием массовых сил на саму оболочку пренебрегаем, тогда влияние массовых сил будет проявляться изменением интенсивности давления жидкости на

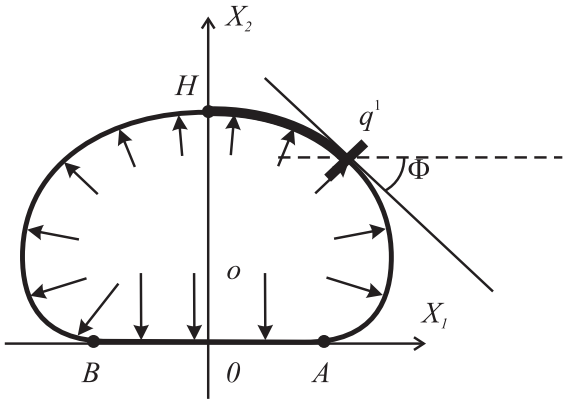



Рис. 1. Сечение цилиндрической оболочки в текущей конфигурации

оболочку. Вектор массовых сил направлен в сторону, противоположную направлению оси $x_2$.

Будем считать, что после деформации поверхность оболочки остается симметричной и задается уравнениями

$$\mathbf{R} = X_1(q^1)\mathbf{i}_1 + X_2(q^1)\mathbf{i}_2 + \alpha x_3\mathbf{i}_3, \quad \alpha = \text{const}. \tag{3.2}$$

Основной и взаимный базисы, связанные с поверхностью оболочки до и после деформации (1.1), (1.3), примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= x_1'(q^1)\mathbf{i}_1 + x_2'(q^1)\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{R}_1 &= X_1'(q^1)\mathbf{i}_1 + X_2'(q^1)\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{R}_2 = \alpha\mathbf{i}_3. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по переменной $q^1$.

Вектор нормали к срединной деформированной поверхности (3.2) определяется соотношением

$$\mathbf{N} = \frac{X_2'\mathbf{i}_1 - X_1'\mathbf{i}_2}{\sqrt{X_1'^2 + X_2'^2}}. \tag{3.4}$$

Зададим внешнюю нагрузку в виде переменного давления по поверхности оболочки, пренебрегая силами трения на поверхности контакта оболочки с плоскостью $Ox_1x_3$

$$\xi(q^1) = p + \gamma(H - X_2). \tag{3.5}$$

Здесь $p$ — величина давления без учета тяжести жидкости (сверхдавление [1]), $\gamma = g\rho$ — удельный вес жидкости, $\rho$ — плотность, $g$ — ускорение свободного падения, $H$ — максимальная высота оболочки. На рис. 1 поперечное сечение деформированной оболочки условно изображено выпуклым, однако никакие требования выпуклости пока не накладываются. Следует отметить, что в области контакта с плоскостью $Ox_1x_3$ на оболочку также действует сила реакции опоры.

Такую задачу о деформации оболочки можно разделить на две: задачу о деформации в области контакта $AB$ (рис. 1) и задачу о деформации остальной части оболочки. Для безмоментной оболочки, пренебрегая силами трения, задача в области контакта сведется к растяжению плоского листа с кратностями удлинения $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Кратность удлинения $\lambda_1$ будет определяться отношением длины $L$ области контакта $AB$ оболочки с поверхностью к длине $l$ соответствующей дуги в отсчетной конфигурации. Величина $\lambda_2$ задается из условий задачи ($\lambda_2 = \alpha$). Решение задачи о деформации остальной части оболочки должно сопрягаться в точках $A$ и $B$ с решением в области контакта, т. е. значения функций $X_1(q^1)$ и $X_2(q^1)$ и их производных должны совпадать для обоих решений.

Компоненты первого фундаментального тензора срединной поверхности до и после деформации (1.2), (1.4) удовлетворяют условиям (2.1) и (2.3) и выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_1'^2 + x_2'^2, \\ g_{12} &= 0, \quad g_{22} = 1, \\ G_{11} &= X_1'^2 + X_2'^2, \\ G_{12} &= 0, \quad G_{22} = \alpha^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Компоненты тензора кривизны $\mathbf{B}$ с помощью (3.3) и (3.4) выразятся соотношениями

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{X_1''X_2' - X_2''X_1'}{\sqrt{X_1'^2 + X_2'^2}}, \\ B_{12} &= 0, \quad B_{22} = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Главные кратности удлинений (1.7) примут вид

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{X'^2_1 + X'^2_2}{x'^2_1 + x'^2_2}}, \quad \lambda_2 = \alpha.$$

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{gathered} \Omega(q^1) = \frac{X'_2(q^1)}{X'_1(q^1)}, \\ \omega(q^1) = \frac{X'_1(q^1)}{X'_2(q^1)} = \frac{1}{\Omega(q^1)}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Тогда ненулевую компоненту кривизны (3.7) можно представить в форме

$$B_{11} = -\frac{\sqrt{g_{11}}\lambda_1}{1+\Omega^2}\frac{\partial \Omega}{\partial q^1}. \tag{3.9}$$

Единственный ненулевой символ Кристоффеля выразится через главные кратности удлинений (1.7) с помощью соотношения

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial q^1}.$$

Таким образом, ограничения (2.1)–(2.4) удовлетворяются, что позволяет представить уравнения равновесия (2.5) следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L^{11}}{\partial q^1} + 2\Gamma^1_{11}L^{11} = 0, \\ L^{11}B_{11} - \xi = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

При помощи определяющих соотношений (1.8) и представлений компонент метрических тензоров (3.6), (3.7) и (3.9) уравнения равновесия (3.10) преобразуются к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2}\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial q^1}\dfrac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \dfrac{1}{1+\Omega^2}\dfrac{\partial W}{\partial \lambda_1}\dfrac{\partial \Omega}{\partial q^1} + \dfrac{\xi}{h}\sqrt{g_{11}}\lambda_1\lambda_2 = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Граничными условиями будут непрерывность и гладкость решения в точке $H$ и условия сопряжения с решением для области контакта в точках $A$ и $B$, которые могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered} X_1(0) = X_1(q^1_H) = 0, \\ X_2(0) = X_2(q^1_H), \\ X'_1(0) = X'_1(q^1_H), \\ X'_2(0) = X'_2(q^1_H) = 0, \\ X'_2(q^1_A) = X'_2(q^1_B) = 0, \\ X'_1(q^1_A) = X'_1(q^1_B) = \lambda_1, \\ X_2(q^1_A) = X_2(q^1_B) = 0, \\ X_1(q^1_A) = -X_1(q^1_B) = L/2, \\ \lambda_1(q^1_A) = \lambda_1(q^1_B) = L/l. \end{gathered} \tag{3.12}$$

## 4. Круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины $h$, для которой функции $x_1(q^1)$ и $x_2(q^1)$ из уравнений (3.1) заданы в форме

$$x_1(q^1) = r_0\sin(q^1), \quad x_2(q^1) = r_0(1+\cos(q^1)),$$

$$0 \leqslant q^1 \leqslant 2\pi,$$

где $r_0 = \text{const}$ — радиус цилиндра.

В силу симметрии задачи исследоваться будет только одна половина решения на отрезке $0 \leqslant q^1 \leqslant \pi$.

Кратность удлинений $\lambda_2 = \alpha = \text{const}$ задаётся из условий задачи. В силу постоянства начальной толщины из первого уравнения системы (3.11) следует, что и $\lambda_1 = \text{const}$. Следовательно, удельная энергия $W(\lambda_1, \lambda_2)$ постоянна по координате $q^1$. Второе уравнение системы (3.11) примет вид[2]

$$\begin{gathered} \frac{\Omega'}{1+\Omega^2} = -C\xi, \\ C = \frac{\sqrt{g_{11}}\lambda_1\lambda_2}{h}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^{-1} = \text{const}. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Введем в рассмотрение угол $\Phi \in [0; -\pi]$ (рис. 1), являющийся углом наклона касательной к графику функции $X_2 = X_2(X_1)$. Тогда из геометрического смысла производной, с учетом соотношения (3.8), имеем

$$\Omega(q^1) = \frac{X'_2(q^1)}{X'_1(q^1)} = \frac{dX_2}{dX_1} = \operatorname{tg}\Phi(q^1). \tag{4.2}$$

[2]Средняя кривизна поверхности деформированной оболочки равна $\mathrm{H} = \frac{1}{2}\frac{B_{11}}{G_{11}}$. Тогда с точностью до обозначений из второго уравнения системы (3.10) получим одномерное уравнение равновесной капиллярной поверхности [3] $2H = \frac{p}{L^{11}G_{11}} - \frac{\gamma X_2}{L^{11}G_{11}}$. Таким образом, с учетом граничных условий, задача о равновесии эластичной трубы под действием тяжелой жидкости может быть сведена к частному случаю одномерной задачи о равновесии капиллярной поверхности [3] с углом контакта, равным $\pi$.

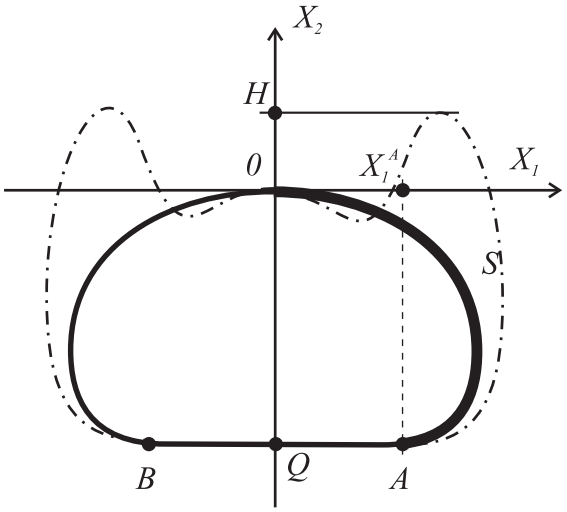



Рис. 2. Сечение цилиндрической оболочки в текущей конфигурации

Учитывая вид нагрузки (3.5), уравнение (4.1) преобразуем к виду

$$\frac{d\Phi}{dq^1} = -C\left(p + \gamma\left(H - X_2(q^1)\right)\right).$$

Для удобства начало системы координат в текущей конфигурации разместим в точке $[X_1(0); X_2(0)]$. В этом случае величина максимальной высоты оболочки над осью $OX_1$, участвующая в выражении величины давления (3.5), удовлетворяет неравенству $H \geqslant 0$. Таким образом, не исключается возможность существования решения, представленного на рис. 2 штрих-пунктирной линией.

Используя соотношения (1.7) и (4.2), получим следующую зависимость между функциями $X_2(q^1)$ и $\Phi(q^1)$:

$$X_2' = -\sqrt{\frac{g_{11}\lambda_1^2\Omega^2}{(1+\Omega^2)}} = \sqrt{g_{11}}\lambda_1 \sin\Phi.$$

Уравнения равновесия относительно неизвестных функций $X_1(q^1)$, $X_2(q^1)$ и $\Phi(q^1)$ примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\Phi}{dq^1} = -Cp + C\gamma(X_2(q^1) - H), \\ &\frac{dX_2}{dq^1} = E\sin\Phi(q^1), \\ &\frac{dX_1}{dq^1} = E\cos\Phi(q^1), \quad E = \sqrt{g_{11}}\lambda_1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

В принятой системе координат из соотношений (3.12) начальные условия для системы (4.3) будут однородными

$$X_1(0) = 0, \quad X_2(0) = 0, \quad \Phi(0) = 0. \tag{4.4}$$

Задача Коши (4.3), (4.4) имеет параметр $\lambda_1$, подлежащий определению из условия сопряжения решений в области контакта и на остальной части оболочки. Эти условия сформулируем следующим образом: существует некоторая координата $q_A^1 \in (0; \pi]$ такая, что справедливы соотношения

$$\begin{gathered} X_1(q_A^1) = L/2, \quad X_1'(q_A^1) = \lambda_1, \\ X_2'(q_A^1) = 0, \quad \lambda_1 = L/l, \\ l = 2(\pi r_0 - q_1^A). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Здесь $L$ — длина области контакта $AB$ в отсчетной конфигурации. Для определения $\lambda$ и $q_A^1$ условия (4.5) примут вид

$$\begin{gathered} X_1(q_A^1) = \lambda_1(\pi r_0 - q_A^1), \quad \Phi(q_A^1) = n\pi, \\ n \in Z. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Решение задачи о равновесии горизонтальной цилиндрической оболочки кругового сечения под действием давления тяжелой жидкости сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.3), (4.4) с параметрами $\lambda_1$ и $q_A^1$, определяемыми из соотношений (4.6). Для заданных параметров $p$, $\rho$, $\lambda_1$ и $\lambda_2$ система (4.3), (4.4) является задачей Коши на отрезке $q^1 \in [0; q_A^1]$.

Из физических соображений искомые функции $X_1(q^1)$, $X_2(q^1)$ и $\Phi(q^1)$ должны быть непрерывно дифференцируемыми на рассматриваемом отрезке. В таком случае правые части системы (4.3) будут непрерывно дифференцируемыми. Это означает, что если гладкое решение существует, то оно будет единственным на рассматриваемом отрезке [5].

Первые два уравнения системы (4.3) и начальные данные (4.4) позволяют выразить аналитически связь между функциями $X_2(q^1)$ и $\Phi(q^1)$ следующим образом

$$\cos\Phi = 1 - \frac{C\gamma}{2E}(X_2 - H)^2 + \\ + \frac{Cp}{E}(X_2 - H) + \frac{Cp}{E}H + \frac{C\gamma}{2E}H^2. \quad (4.7)$$

По определению тригонометрической функции необходимо, чтобы правая часть выражения (4.7) была ограничена по величине единицей. Это приводит к ограничениям на значения координаты $X_2$:

$$\tilde{H} - \sqrt{\tilde{H}^2 + \frac{4E}{C\gamma}} \leqslant X_2 \leqslant 0, \\ 2\tilde{H} \leqslant X_2 \leqslant \tilde{H} + \sqrt{\tilde{H}^2 + \frac{4E}{C\gamma}}, \quad (4.8) \\ \tilde{H} = \frac{p}{\gamma} + H.$$

Второй отрезок области определения (4.8) не удовлетворяет начальным данным (4.4). Поэтому для существования решения необходимо, чтобы координата $X_2$ имела отрицательное или равное нулю значение. Это возможно только в том случае, когда максимальная высота деформированной оболочки над осью $OX_1$ равняется нулю ($H = 0$). Это приводит к строго отрицательному значению производной угла $\Phi(q^1)$ по переменной $q^1$ (4.3). Следовательно, $\Phi(q^1)$ — монотонно убывающая и однозначная функция. Кроме этого отметим, что значения $X_2$ и $\Phi'(q^1)$ ограничены снизу.

Из монотонного убывания угла $\Phi(q^1)$ и начального значения $\Phi(0) = 0$ следует, что $\Phi(q^1) < 0$, для всех $q^1 > 0$. По теореме о существовании обратной функции [6] монотонность и непрерывность функции $\Phi(q^1)$ означают, что существует однозначное монотонное отображение $q^1 = q^1(\Phi)$. Таким образом, вместо независимой переменной $q^1$ в задаче можно использовать в качестве независимой переменной угол наклона касательной $\Phi$, который будет однозначно определять точку поверхности оболочки. В силу непрерывности функции $\Phi(q^1)$ на замкнутом промежутке $q^1 \in [0; q^1_A]$, по первой теореме Вейерштрасса [6] следует ограниченность функции на этом интервале. Из вышеизложенного, а также условия сопряжения в точке касания с опорной поверхностью (4.6), следует, что $\Phi \in [0; -n\pi]$ ($n \in N$). Очевидно, что при $n$, отличных от единицы, форма поперечного сечения деформированной оболочки $X_2 = X_2(X_1)$ будет иметь точки самопересечения, что неприемлимо с физической точки зрения. Таким образом, нас интересует такое решение, при котором функция $\Phi : q^1 \in [0; q^1_A] \to [0; -\pi]$. Из первых двух уравнений системы (4.3) получим дифференциальное уравнение второго порядка с начальными данными[3]:

$$\Phi''(q^1) = EC\gamma\sin\Phi(q^1), \\ \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = A. \quad (4.9)$$

Решение уравнения (4.9) определяет обратную функцию в виде [7]:

$$q^1(\Phi) = -\int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2EC\gamma(1-\cos\varphi) + A^2}}. \quad (4.10)$$

Из соотношений (4.2), (4.3), (4.4) и (4.10) получим следующую зависимость для функции $X_1$ от переменной $\Phi$

$$X_1(\Phi) = \pm\int_0^{\Phi} \frac{E\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{2EC\gamma(1-\cos\varphi) + (Cp)^2}}.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (4.3) для функций $X_1(q^1)$, $X_2(q^1)$ и $\Phi(q^1)$ по переменной $q^1 \in [0; q^1_A]$ с начальными данными (4.4) и соотношением (4.6) для определения параметров $q^1_A$ и $\lambda_1$ преобразуется к следующей системе уравнений для определения параметров и восстановления значений $X_1(\Phi)$ и $X_2(\Phi)$, как функций угла наклона касательной $\Phi \in [0; -\pi]$:

$$X_1(\Phi) = -\int_0^{\Phi} \frac{E\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{2EC\gamma(1-\cos\varphi) + (Cp)^2}}, \\ X_2 = \frac{p}{\gamma} - \sqrt{\frac{p^2}{\gamma^2} + \frac{2E}{C\gamma}(1-\cos\Phi)}, \\ X_1(-\pi) = \lambda_1(\pi r_0 - q^1_A), \\ q^A_1 = -\int_0^{-\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2EC\gamma(1-\cos\varphi) + C^2p^2}}, \\ \Phi \in [0; -\pi], \quad E = \sqrt{g_{11}}\lambda_1,$$

[3]Это уравнение может быть преобразовано, заменой $\Phi = \pi - \Psi$, к уравнению математического маятника $\Psi'' + EC\gamma\sin\Psi = 0$.

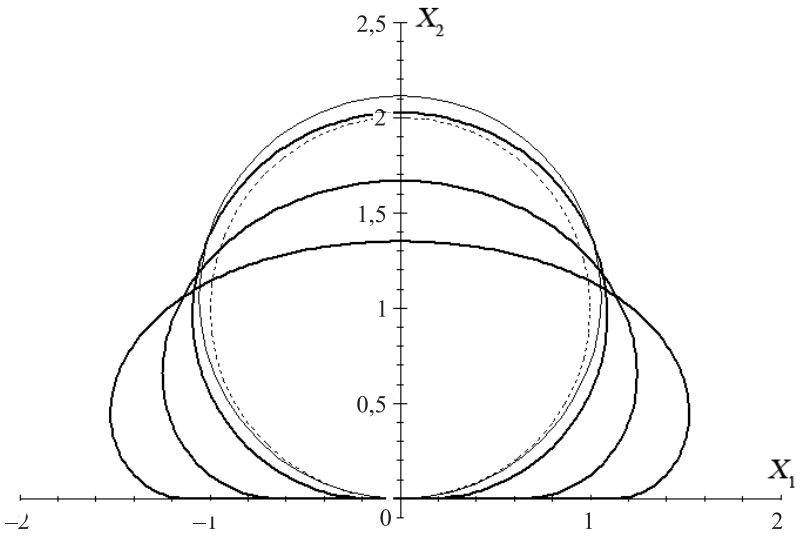



Рис. 3. Сечения деформированной оболочки

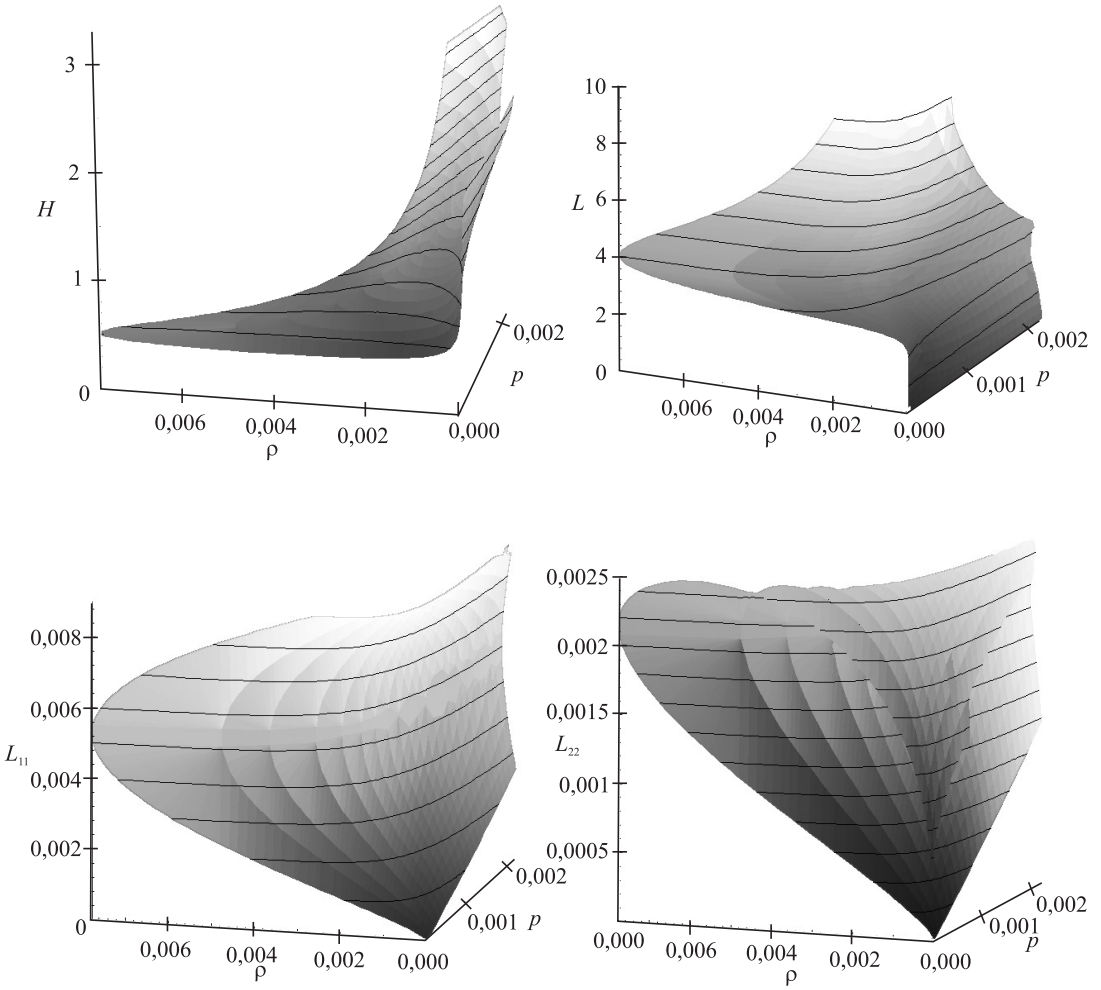



Рис. 4. Высота деформированной оболочки, ширина области контакта, напряжение вдоль меридиана, напряжение вдоль образующей

$$C = \frac{\sqrt{g_{11}}\lambda_1\lambda_2}{h}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^{-1}.$$

Из анализа свойств системы (4.3) и геометрических соображений очевидно, что в области $\Phi \in [0; -\pi]$ функция $X_2$ убывает и достигает своего максимума и минимума на концах отрезка, а функция $X_1$ имеет максимум при $\Phi = -\pi/2$.

Функции $X_1(\Phi)$ и $X_2(\Phi)$ непрерывны на отрезке $\Phi \in [0; -\pi]$, а $\Phi(q^1)$ непрерывна на отрезке $q^1 \in [0; q^1_A]$. Суперпозиция непрерывных функций является непрерывной функцией [6], т. е. $X_1(q^1)$, $X_2(q^1)$ — непрерывные по переменной $q^1 \in [0; q^1_A]$. В этом случае правые части системы (4.3) непрерывно дифференцируемые на рассматриваемом отрезке. Следовательно, полученное решение (в рамках семейства симметричных решений) системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.3) с начальными данными (4.4) будет единственным для заданных параметров $p$, $\rho$, $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Однако, единственность решения задачи Коши (4.3), (4.4) не означает единственности решения начальной задачи о равновесии цилиндрической оболочки. Система (4.3) зависит от четырёх параметров, только три из которых независимые $p$, $\rho$ и $\lambda_2$. Параметр $\lambda_1$ определяется из условий сопряжения (4.6). Численные расчеты показали, что определение параметра $\lambda_1$ неоднозначно. То есть, возможна неединственность решения исходной задачи о деформации цилиндрической оболочки при заданных $p$, $\rho$ и $\lambda_2$. Аналогичные результаты были получены в работе [2], в которой рассматривается задача о равновесии и устойчивости эластичной трубы, наполненной газом и жидкостью.

## 5. Численные результаты

Численные результаты представлены для модели материала Бартенева-Хазановича [8]

$$W^* = 2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3).$$

Приняты следующие геометрические и материальные параметры оболочки

$$r_0 = 1, \quad h = 0,01, \quad \mu = 0,5.$$

Длина цилиндрической оболочки не изменяется, т. е. $\alpha = 1$.

Пунктирной линией на рис. 3 представлено сечение недеформированной оболочки. Тонкой сплошной линией изображено сечение круговой цилиндрической оболочки нагруженной равномерно распределенной нагрузкой[4] интенсивности $p = 0{,}001$. Сплошные жирные линии соответствуют решениям с величиной давления $p = 0{,}001$ и плотностями $\rho = 0{,}00001;\ 0{,}0001;\ 0{,}0005$.

На рис. 4 представлены зависимости высоты деформированной оболочки ($H$), длины области контакта ($L$) и напряжения в оболочке ($L_{11}, L_{22}$) в зависимости от давления $p$ и плотности жидкости $\rho$.

Зависимость геометрических параметров и напряжений от параметров внешней нагрузки, к которым относятся давление $p$ и плотность жидкости $\rho$, может иметь немонотонный характер. Такое явление обычно связывают с неустойчивостью деформации. Более полное исследование данной проблемы можно найти в работе [2].

В силу постоянства кратностей удлинений напряжения в оболочке постоянны. На рис. 4. построены графики зависимости истинных напряжений в оболочке от давления $p$ и плотности жидкости $\rho$.

## Заключение

В работе исследуется влияние силы тяжести на деформацию цилиндрической оболочки под давлением тяжёлой жидкости. Для оболочки постоянной толщины кругового поперечного сечения уравнения равновесия сведены к задаче Коши с параметром для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с однородными начальными данными. Решение задачи получено в интегральном (сводящемся к эллиптическим интегралам) виде через новую независимую переменную. Исследование задачи для материала Бартенева–Хазановича указывает на возможность неединственности решения для заданных величин давления и плотности жидкости. Результаты исследования показали, что учёт веса жидкости может оказать существенное влияние на деформацию тонкостенной трубы из высокоэластичного материала.

### *Литература*

1. *Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И.* Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

[4] В этом случае решение можно представить в виде $X_1(q^1) = R_0\sin(q^1)$, $X_2(q^1) = R_0(1+\cos(q^1))$, $0 \leqslant q^1 \leqslant 2\pi$. Система уравнений равновесия (2.5) сведётся к единственному уравнению для определения деформированного радиуса $R_0 - \alpha^2 R_0^3 p - 2\mu h\left(\alpha R_0^2 - r_0^2\right) = 0$.

2. *Antman S., Schagerl M.* Slumping instabilities of elastic membranes holding liquids and gases // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2005. Vol. 40. P. 1112–1138.
3. *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 312 с.
4. *Зубов Л.М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1982. 144 с.
5. *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.-Л.: ГТТИ, 1933. Ч. 2. 287 с.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 1. 608 с.
7. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. М.: Физ.-мат. лит. 1961. 620 с.
8. *Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н.* О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. 1960. Т. 2. №1. С. 20–26.

**Ключевые слова:** эластичная труба, давление тяжелой жидкости, деформированное сечение

Статья поступила 20 января 2008 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
© Колесников А. М., 2008