Механика

УДК 539.3

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ МЕТОДЕ ФАКТОРИЗАЦИИ В ПРИЛОЖЕНИЯХ[1]

Бабешко В. А.[2], Бабешко О. М.[3], Евдокимова О. В.[4], Зарецкая М. В.[5], Павлова А. В.[6], Федоренко А. Г.[7]

ABOUT DIFFERENTIAL FACTORIZATION METHOD IN APPLICATIONS

Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V., Zaretskaya M. V., Pavlova A. V., Fedorenko A. G.

The differential factorization method is used to solve some specific problems. The algorithm of its application is demonstrated, and its universal character is proved. Some results are obtained, which make it possible to use the method for solving boundary-value problems from various fields of mechanics, physics, Earth sciences.

Дифференциальный метод факторизации, развитый в работах [1–3], имеет широкий круг применения в самых различных областях механики, физики, экологии, науках о Земле. Это обусловлено с тем, что метод не связан с типом систем дифференциальных уравнений в частных производных краевых задач. Однако в связи с использованием методов внешнего анализа его применение требует строгого следования определенным алгоритмам. Поэтому имеются основания изложить его применение к уже известным краевым задачам для сплошных сред, и как первое приложение — к динамическим задачам теории упругости. Последнее позволяет увидеть преимущества метода по сравнению с другими подходами и одновременно демонстрирует алгоритм его применения к целому ряду отмеченных выше краевых задач. Краевые задачи теории упругости удобны для сопоставления различных методов их решения и демонстрируют широкие возможности дифференциального метода факторизации. Они удобны и по той причине, что охватывают основные случаи типов нулей характеристических уравнений дифференциальных уравнений краевых задач — однократные и многократные. Применение метода к анизотропным материалам уже не представляет труда.

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (06-01-00295, 08-08-00468, 06-08-00671, 08-08-00669), РФФИ_р_юг (08-01-99012, 08-01-99013, 08-01-99016, 08-08-99090, 08-08-99091, 07-01-12028, 06-01-96634–06-01-96638), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

[3]Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат.наук, гл. научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

[4]Евдокимова Ольга Владимировна, канд. физ.-мат. наук, заведующая кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета.

[5]Зарецкая Марина Валерьевна, канд. физ.-мат.наук, ст. научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

[6]Павлова Алла Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

[7]Федоренко Алексей Григорьевич, научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

Ценность дифференциального метода факторизации заключается в его применимости к исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений по одному и тому же алгоритму, независимо от типа уравнений. Однако его конкретная реализация на практических задачах освящена не достаточно. Ниже метод излагается для выпуклой области. В случае областей более сложной формы достаточно ввести блочную структуру, разбивая области сеткой на выпуклые блоки и применяя подход, изложенный в [4]. Этот подход позволяет также исследовать краевые задачи для уравнений с переменными коэффициентами [1, 4], для чего вводится достаточно частая сетка, в пределах ячейки которой коэффициенты дифференциальных уравнений можно считать постоянными. Отметим также важное достоинство метода, состоящее в возможности представления решений краевых задач в интегральной форме [1, 4].

1. Будем считать, что область Ω, занятая изотропным линейно деформируемым телом, является выпуклой, а граница $\partial\Omega$ — гладкой. В случае невыпуклых областей для решения краевой задачи имеются две возможности: либо переход к обобщенной факторизации, либо разбиение области на блочные структуры и исследование простой факторизацией краевых задач в выпуклых областях [1, 4]. Отметим, что последняя означает введение прямоугольных декартовых координат при касательном расслоении границы $\partial\Omega$, что и применяется ниже.

Однородные дифференциальные уравнения Ламе рассмотрим в традиционной форме [1–4]

$$\begin{gathered}(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}-\delta\mathbf{u}=0,\\ \mathbf{u}=\{u_1,u_2,u_3\}.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\delta=-\rho\omega^2$ в задачах вибрации и $\delta=\rho p^2$ в нестационарных задачах, ω — частота колебаний, p — параметр преобразования Лапласа, ρ — плотность материала.

В краевой задаче ставятся некоторые граничные условия, которые будут обсуждаться позже.

После применения к (1) преобразований Фурье [1–4] по всем параметрам, подстановки вместо соответствующих производных значений $-i\alpha_k$ — параметров преобразования Фурье и умножения на -1 система уравнений принимает вид

$$\mathbf{KU}=\int\limits_{\partial}\int\limits_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\omega},\quad \mathbf{U}=\{U_1,U_2,U_3\}, \tag{2}$$

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{23}&k_{33}\end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered}k_{11}=(\lambda+2\mu)\,\alpha_1^2+\mu\alpha_2^2+\mu\alpha_3^2+\delta,\\ k_{12}=k_{21}=(\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_2,\\ k_{13}=k_{31}=(\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_3,\\ k_{23}=k_{32}=(\lambda+\mu)\,\alpha_2\alpha_3,\\ k_{22}=\mu\alpha_1^2+(\lambda+2\mu)\,\alpha_2^2+\mu\alpha_3^2+\delta,\\ k_{33}=\mu\alpha_1^2+\mu\alpha_2^2+(\lambda+2\mu)\,\alpha_3^2+\delta,\\ \mathbf{U}=\mathbf{F}_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mathbf{u}.\end{gathered}$$

Здесь $\mathbf{F}_3=\mathbf{F}_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ — оператор трехмерного преобразования Фурье в области Ω по переменным x_1, x_2, x_3, а α_1, α_2, α_3 — параметры этого преобразования.

Осуществим касательное расслоение границы $\partial\Omega$ и введем локальные прямоугольные декартовы координаты $\mathbf{x}^\nu$, координаты x_1^ν, x_2^ν которых лежат в касательной плоскости, а x_3^ν — на внешней нормали к границе. Соответствующие им параметры преобразования Фурье имеют обозначения $\boldsymbol{\alpha}^\nu$. Формулы перехода от одной локальной системы к другой даются известными соотношениями

$$\begin{gathered}\mathbf{x}^\nu=\mathbf{c}_\nu^\tau\mathbf{x}^\tau+\mathbf{x}_0^\tau,\\ \boldsymbol{\alpha}^\nu=\mathbf{c}_\nu^\tau\boldsymbol{\alpha}^\tau.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{x}_0^\tau$ — координаты начала новой системы координат в старой.

Осуществим по аналогичным формулам переход к новым неизвестным по формулам

$$\mathbf{u}^\nu=\mathbf{c}_\nu^\tau\mathbf{u}^\tau. \tag{4}$$

Легко доказывается, что при переходе к новым локальным координатам образы и прообразы преобразования Фурье в уравнениях (1) изменяются по формулам (3), (4). Это производится непосредственной подстановкой преобразования в уравнения (1).

После этого дифференциальные уравнения (1) необходимо записать в каждой локальной системе координат $\mathbf{x}^\nu$, т.е. в виде

$$\begin{gathered}(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}^\nu+\mu\Delta\mathbf{u}^\nu-\delta\mathbf{u}^\nu=0,\\ \mathbf{u}^\nu=\{u_1^\nu,u_2^\nu,u_3^\nu\}.\end{gathered} \tag{5}$$

Далее, необходимо применить дифференциальный метод факторизации, алгоритм которого изложен в [1, 4].

С целью упрощения формул здесь и ниже индекс ν будет опущен. Последнее связано с тем, что в изотропном случае вид матрицы-функции $\mathbf{K}$ одинаков в любой системе координат $\boldsymbol{\alpha}^\nu$. В случае анизотропной задачи этого делать нельзя.

2. С учетом сделанного замечания, для построения функциональных уравнений для изотропных динамических уравнений Ламе, перепишем их, опустив индекс ν, в форме

$$K_1\mathbf{u} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3} - \delta u_1 = 0,$$

$$K_2\mathbf{u} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3} - \delta u_2 = 0, \quad (6)$$

$$K_3\mathbf{u} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3} - \delta u_3 = 0.$$

Воспользовавшись формулами внешних форм [1–4], будем иметь

$$\omega_{sk} = R_{sk}dx_1\Lambda dx_2 + Q_{sk}dx_1\Lambda dx_3 + P_{sk}dx_2\Lambda dx_3, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\omega}_= \{\omega_{s1}, \omega_{s2}, \omega_{s3}\}.$$

Здесь s указывает группу внешних форм, k — номер оператора K_k.

Имеем

$$R_{31} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_1\right) + \mu\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - i\alpha_1\lambda u_3\right] \times e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}dx_1\Lambda dx_2,$$

$$-Q_{31} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_1\right) - i\alpha_1(\lambda+\mu)u_2\right] \times e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}dx_1\Lambda dx_3,$$

$$P_{31} = \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_1\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i\mu\alpha_1 u_3 + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}dx_2\Lambda dx_3,$$

$$R_{32} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_2\right) + \mu\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \lambda i\alpha_2 u_3\right] \times e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}dx_1\Lambda dx_2,$$

$$-Q_{32} = \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_2\right) - i\alpha_1 u_1(\lambda+\mu) + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - i\mu\alpha_3 u_3\right] e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}dx_1\Lambda dx_3,$$

$$P_{32} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_2\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right] \times e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}dx_2\Lambda dx_3,$$

$$R_{33} = \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_3\right) + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) - \mu i(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)\right] e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}dx_1\Lambda dx_2,$$

$$-Q_{33} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_3\right) - \lambda i\alpha_3 u_2 + \mu\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right] \times e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}dx_1\Lambda dx_3;$$

$$P_{33} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_3\right) - \lambda i\alpha_3 u_1 + \mu\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right] \times e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}dx_2\Lambda dx_3.$$

Примем во внимание выражения для напряжений σ_{mn}, $m,n = 1,2,3$, следующие из закона Гука в каждой локальной системе координат

$$\sigma_{nn} = \lambda\operatorname{div}\mathbf{u} + 2\mu\frac{\partial u_n}{\partial x_n},$$

$$\sigma_{mn} = \mu \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right), \quad m \neq n.$$

Анализируя компоненты R_{3k}, $k = 1, 2, 3$ полученной внешней формы, имеем следующие представления вектора $\mathbf{R}_3 = \{R_{31}, R_{32}, R_{33}\}$

$$R_{31} = [\sigma_{13} - i\mu\alpha_3 u_1 - i\lambda\alpha_1 u_3]\, e^{i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle},$$

$$R_{32} = [\sigma_{23} - i\mu\alpha_3 u_2 - i\lambda\alpha_2 u_3]\, e^{i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}, \qquad (8)$$

$$R_{33} = \big[\sigma_{33} - i\,(\lambda + 2\mu)\,\alpha_3 u_3 - \\ - i\mu\,(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)\big] e^{i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}.$$

Учитывая, что элемент касательного расслоения описывается ориентированной площадью $dx_1 \Lambda dx_2$, видим, что на границе могут задаваться различные комбинации неизвестных — либо напряжения, либо перемещения, либо смешанные условия.

Таким образом, функциональные уравнения задачи для изотропного тела имеют вид

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{U} = \iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}. \qquad (9)$$

Заметим, что в силу изотропии вид внешних форм для элементов разбиения единицы или, что то же самое, для элементов касательного расслоения границы в каждой введенной локальной системе координат $\mathbf{x}^\nu$ не изменяется. Меняться будут лишь коэффициенты в связи с изменениями начала координат локальных систем при переходе от одной к другой. В связи с этим будем рассматривать функциональное уравнение

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{U} = \iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\omega} = \sum_\tau \iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \varepsilon_\tau \boldsymbol{\omega}. \qquad (10)$$

в одной из локальных систем координат, опустив индекс ν. Здесь ε_τ — элементы разбиения единицы [5].

Перепишем функциональное уравнение в виде

$$\mathbf{K}_\nu(\boldsymbol{\alpha}^\nu)\mathbf{U}^\nu = \iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\omega}^\nu = \\ = \sum_\tau \iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \varepsilon_\tau \boldsymbol{\omega}^\nu(\xi^\tau, \boldsymbol{\alpha}^\nu). \qquad (11)$$

Последовательно будем перебирать все локальные системы и записывать в них функциональное уравнение. Как доказано выше, при этом будут меняться как матрица-функция $\mathbf{K}_\nu(\boldsymbol{\alpha}^\nu)$, так и неизвестная $\mathbf{u}^\nu$. Неизменными останутся лишь значения неизвестной и ее производных на $\partial\Omega$, записанных в локальных координатах при интегрировании по элементу разбиения. Таким образом, умножив для ε_ν (11) на факторизующие матрицы-функцию и вычислив необходимые формы-вычеты Лере, имеем

$$\iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}_\nu} \boldsymbol{\omega}_0^\nu(\xi^\tau, \alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)) = 0, \qquad (12)$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots, R.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_0^\nu$, $\boldsymbol{\omega}_0^\tau$ уже не внешние формы, а выражения, получившиеся после умножения на факторизующие матрицы-функции и вычисления форм-вычетов Лере в полюсах $\alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)$. $\partial\Omega_\tau$ — окрестность локальной системы координат касательного расслоения, для которой проектором является ε_τ.

R — число корней $\alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)$, из нижней комплексной полуплоскости при вещественных $\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu$.

Анализируя с этих позиций предыдущие построения (12), констатируем, что получили представление для псевдодифференциального уравнения лишь для одной локальной системы координат и элемента разбиения в ее окрестности, т.е. в принятых обозначениях для $\tau = \nu$.

3. Для применения дифференциального метода факторизации, вычисления форм-вычетов Лере, произведем некоторые исследования матрицы-функции $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$.

С учетом сделанного замечания изучим нули ее определителя. Положим

$$B = \mu(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \delta.$$

Представим матрицу-функцию $\mathbf{K}$ в виде

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} \\ k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} \\ k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} \end{pmatrix}.$$

$$k'_{11} = (\lambda + \mu)\,\alpha_1^2 + B, \quad k'_{12} = k'_{21} = (\lambda + \mu)\,\alpha_1\alpha_2,$$

$$k'_{13} = k'_{31} = (\lambda + \mu)\,\alpha_1\alpha_3,$$

$$k'_{22} = (\lambda + \mu)\,\alpha_2^2 + B, \quad k'_{23} = k'_{32} = (\lambda + \mu)\,\alpha_2\alpha_3,$$

$$k'_{33} = (\lambda + \mu)\,\alpha_3^2 + B.$$

Легко видеть, что

$$\Delta = \det \mathbf{K} = B^2\,[B + (\lambda + \mu)A]\,.$$

Здесь приняты обозначения

$$A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad B = \mu A + \delta.$$

Таким образом, определитель имеет двукратный ноль $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = -\delta\mu^{-1}$ и однократный $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = -\delta(\lambda + 2\mu)^{-1}$.

Исследования показывают, что ранг матрицы-функции $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$ равен 1. Отсюда следует, что матрица-функция $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$, будучи приведенной к диагональному виду, будет иметь следующую структуру:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) \sim \begin{pmatrix} B & & 0 \\ & B & \\ 0 & & B + (\lambda + \mu) A \end{pmatrix}.$$

При $B = 0$ имеем $\mu\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right) + \delta = 0$, что дает корни

$$\begin{aligned} \alpha_{31+} &= i\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_1^2 + \frac{\delta}{\mu}}, \\ \alpha_{31-} &= -i\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_1^2 + \frac{\delta}{\mu}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Знаки около индексов обозначают принадлежность корней верхней (плюс) и нижней (минус) полуплоскостям комплексной плоскости.

Очевидно, эти корни двукратные.

При $B + (\lambda + \mu) A = 0$ имеем однократные корни вида

$$\alpha_{32+} = i\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_1^2 + \frac{\delta}{\lambda + 2\mu}},$$

$$\alpha_{32-} = -i\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_1^2 + \frac{\delta}{\lambda + 2\mu}}.$$

В соответствии с дифференциальным методом факторизации выделим только те составляющие, которые будут связаны с корнями из нижней полуплоскости. Для построения псевдодифференциальных уравнений для матрицы-функции используем подход работы [6]. В результате факторизующие матрицы-функции принимают вид

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_3 - \alpha_{31-}} & \frac{-\alpha_1}{\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_{31-})} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_3 - \alpha_{31-}} & 0 & \frac{-\alpha_2}{\alpha_{31-}(\alpha_3 - \alpha_{31-})} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_{32-}(\alpha_3 - \alpha_{32-})} & \frac{\alpha_2}{\alpha_{32-}(\alpha_3 - \alpha_{32-})} & \frac{1}{\alpha_3 - \alpha_{32-}} \end{pmatrix}.$$

Для получения псевдодифференциальных уравнений необходимо приравнять нулю формы-вычеты Лере. В результате их вычисления в избранной окрестности локальной системы координат приходим к соотношениям вида

при $m = 1, 2$

$$\lim_{\alpha_3 \to \alpha_{31-}} (\alpha_3 - \alpha_{31-}) \mathbf{Q}_m \mathbf{F}_2 \mathbf{R_3} = 0, \tag{14}$$

при $m = 3$

$$\lim_{\alpha_3 \to \alpha_{32-}} (\alpha_3 - \alpha_{32-}) \mathbf{Q}_m \mathbf{F}_2 \mathbf{R_3} = 0.$$

Здесь $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ — двумерное преобразование Фурье по параметрам x_1, x_2 от функций, заданных в окрестностях локальных систем координат.

После несложных вычислений получаем псевдодифференциальные уравнения (12) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & 2i\mu\alpha_1\alpha_{32-}\mathbf{F}_2 u_1 + 2i\mu\alpha_2\alpha_{32-}\mathbf{F}_2 u_2 + \\ & + (2i\mu\alpha_1\alpha_{32-}^2 - i\lambda\delta(\lambda + 2\mu)^{-1})\mathbf{F}_2 u_3 = \mathbf{F}_2 T_1^0, \end{aligned}$$

$$i\mu\alpha_2\alpha_{31-}\mathbf{F}_2 u_1 - i\mu\alpha_1\alpha_{31-}\mathbf{F}_2 u_2 = \mathbf{F}_2 T_2^0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} & i\mu(\alpha_{31-}^2 - \alpha_1^2)\mathbf{F}_2 u_1 - \\ & \quad - i\mu\alpha_1\alpha_2\mathbf{F}_2 u_2 i\mu\alpha_1\alpha_{31-}\mathbf{F}_2 u_3 = \mathbf{F}_2 T_3^0. \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_2 T_1^0 = \alpha_1 \mathbf{F}_2 \sigma_{13} + \alpha_2 \mathbf{F}_2 \sigma_{23} + \alpha_{32-} \mathbf{F}_2 \sigma_{33},$$

$$\mathbf{F}_2 T_2^0 = \alpha_2 \mathbf{F}_2 \sigma_{13} - \alpha_1 \mathbf{F}_2 \sigma_{23},$$

$$\mathbf{F}_2 T_3^0 = \alpha_{31-} \mathbf{F}_2 \sigma_{13} - \alpha_1 \mathbf{F}_2 \sigma_{33}.$$

Определитель системы Δ_1 равен

$$\Delta_1 = -4i\mu^3\alpha_{31-}\upsilon^2 \left[(\upsilon^2 + \frac{\delta}{2\mu})^2 + \upsilon^2\alpha_{31-}\alpha_{32-} \right],$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \upsilon^2.$$

Очевидно, в число его сомножителей входит уравнение Релея для изотропного полупространства. Таким образом, полученное псевдодифференциальное уравнение отвечает телу в форме полупространства, если не наложены ограничения на носители искомых функций.

В матричном виде систему (15) можно представить в форме

$$\mathbf{L}\mathbf{F}_2\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{F}_2\mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\}, \\ t_1 = \sigma_{13}, \quad t_2 = \sigma_{23}, \quad t_3 = \sigma_{33}. \tag{16}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \alpha_1\sqrt{\tau_1^2 - \upsilon^2} \\ \alpha_2\sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2} \\ 2s + \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2\sqrt{\tau_1^2 - \upsilon^2} \\ -\alpha_1\sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2} \\ -\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -2\alpha_1\sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \frac{i}{\mu} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2}{2} & \frac{\sqrt{\tau_1^2 - \upsilon^2}}{2} \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2} & 0 & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

$$\tau_1 = -\frac{\delta}{\lambda + 2\mu}, \quad \tau_2 = -\frac{\delta}{\mu},$$

$$\upsilon = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad s = 0,5\tau_2^2 - \upsilon^2.$$

Вычислив определитель матрицы $\mathbf{L}$, находим

$$\det \mathbf{L} = 2\alpha_1\sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2} \times \\ \times \left[\upsilon^2\sqrt{\tau_1^2 - \upsilon^2}\sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2} + s^2\right] = \Delta_2.$$

Обратная матрица $\mathbf{L}^{-1}$ после вычисления принимает вид

$$\mathbf{L}^{-1} = \Delta_2^{-1} \begin{pmatrix} 2\alpha_1^2\alpha_{320}^2 \\ 2\alpha_1\alpha_2\alpha_{320}^2 \\ 2\alpha_1\alpha_{320}^2 s \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2\left(2\alpha_{310}\alpha_{320} - s\right) \\ \alpha_{320}^2 - \alpha_1^2 \\ \alpha_2\alpha_{320}\alpha_{320}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_{320}s \\ \alpha_2\alpha_{320}s \\ -\alpha_{310}\alpha_{320}\upsilon^2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{310} = -i\sigma_1 = \sqrt{\tau_1^2 - \upsilon^2},$$

$$\alpha_{320} = -i\sigma_2 = \sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2},$$

$$\operatorname{Im}\alpha_{3n0} \leqslant 0, \quad n = 1, 2.$$

Подействовав матрицей $\mathbf{L}^{-1}$ слева на систему (16), получим представление вида

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}, \quad \mathbf{U}_0 = \mathbf{F}_2\mathbf{u}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{F}_2\mathbf{t}.$$

Образовавшаяся в результате перемножения матрица функция $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{D}$ после упрощения принимает вид

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{Y} = \frac{i\alpha_1}{\mu\Delta_2} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}.$$

$$y_{11} = \alpha_1^2\alpha_{320}^2 + 2\alpha_2^2\alpha_{310}\alpha_{320} - (\alpha_2^2 - \alpha_{320}^2)s,$$

$$y_{12} = y_{21} = \alpha_1\alpha_2(\alpha_{320}^2 - 2\alpha_{310}\alpha_{320}),$$

$$y_{13} = -y_{31} = \alpha_1\alpha_{320}(2\alpha_{310}\alpha_{320} - s),$$

$$y_{22} = \alpha_2^2\alpha_{320}^2 + 2\alpha_1^2\alpha_{310}\alpha_{320} - (\alpha_1^2 - \alpha_{320}^2)s,$$

$$y_{23} = -y_{32} = \alpha_2\alpha_{320}(2\alpha_{310}\alpha_{320} - s),$$

$$y_{33} = 0,5\alpha_{310}\alpha_{320}\tau_2.$$

Последнее для избранной окрестности можно представить также в форме известной системы интегральных уравнений [7, 8]

$$\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{F}_2\mathbf{t} = \mathbf{u}, \tag{17}$$

с матрицей-функцией вида

$$\mathbf{Y} = -\frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 M + \alpha_2^2 N & \alpha_1\alpha_2(M - N) & i\alpha_1 P \\ \alpha_1\alpha_2(M - N) & \alpha_1^2 N + \alpha_2^2 M & i\alpha_2 P \\ -i\alpha_1 P & -i\alpha_2 P & R \end{pmatrix},$$

$$M(\upsilon) = \frac{-0,5\tau_2^2\sigma_2}{\upsilon^2\Delta_0}, \quad N(\upsilon) = \frac{2}{\upsilon^2\sigma_2},$$

$$P(\upsilon) = \frac{\upsilon^2 - 0,5\tau_2^2 - \sigma_1\sigma_2}{\Delta_0},$$

$$R(\upsilon) = \frac{-0,5\tau_2^2\sigma_1}{\Delta_0},$$

$$\Delta_0 = (\upsilon^2 - 0,5\tau_2^2)^2 - \upsilon^2\sigma_1\sigma_2.$$

По аналогичным формулам производится вычисление форм-вычетов Лере в окрестностях соседних локальных системах координат правой части функциональных уравнений (11) для остальных τ, предварительно осуществив замену переменных $\boldsymbol{\alpha}^\tau = \mathbf{c}_\tau^\nu\boldsymbol{\alpha}^\nu$.

Анализируя (17), заключаем, что полученные формулы, совпадают с тем случаем, когда тело является полупространством. Однако надо помнить о существенном различии, состоящем в том, что носителями $\mathbf{u}$, $\mathbf{t}$ являются окрестности локальных систем координат, порожденных касательным расслоением границы. Учитывая, что разбиение единицы привело к покрытию границы непересекающимися окрестностями, отсюда получаем, что система псевдодифференциальных уравнений в качестве заданных и неизвестных функций будет иметь такие, которые имеют носителями окрестности локальных систем координат.

4. Для дальнейшего исследования перепишем систему (10) псевдодифференциальных уравнений, построенных после вычисления форм-вычетов Лере, в следующем виде:

$$\iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}_\nu} \boldsymbol{\omega}_0^\nu(\xi^\nu, \alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)) +$$

$$+ {\sum_\tau}' \iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}_\tau} \boldsymbol{\omega}_0^\tau(\xi^\tau, \alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)) = 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, T.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_0^\nu$, $\boldsymbol{\omega}_0^\tau$ уже не внешние формы, а выражения, получившиеся после умножения на факторизующие матрицы-функции и вычисления форм-вычетов Лере, как это выполнено в (14).

Штрих у символа суммы означает, что член с параметром $\tau = \nu$ в сумме отсутствует. Эту систему уравнений можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)) \times \\
\times \mathbf{U}_0^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)) - \\
- \mathbf{D}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)) \times \\
\times \mathbf{T}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)) + \\
+ \sum_{\tau=1}^{\mathbf{T}} \Big[\mathbf{L}^\tau(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)) \times \\
\times \mathbf{U}_0^\tau(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)) - \\
- \mathbf{D}^\tau(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)) \times \\
\times \mathbf{T}^\tau(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)) \Big] = 0. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Построенные псевдодифференциальные уравнения позволяют формулировать краевые задачи для упругого тела в различных постановках. Например, допустим, на границе задан вектор перемещений $\mathbf{u}^\nu$. Тогда систему уравнений можно переписать в виде

$$(\mathbf{L}^\nu)^{-1}\mathbf{D}^\nu\mathbf{T}^\nu + \sum_\tau (\mathbf{L}^\nu)^{-1}\mathbf{D}^\tau\mathbf{T}^\tau = $$

$$= \mathbf{U}_0^\nu + \sum_\tau (\mathbf{L}^\nu)^{-1}\mathbf{L}^\tau\mathbf{U}_0^\tau. \qquad (19)$$

Получили систему интегральных уравнений относительно напряжений.

Система уравнений становится более обозримой, если ввести, например, в (19) обозначения

$$\mathbf{K}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu) = (\mathbf{L}^\nu)^{-1}\mathbf{D}^\nu,$$

$$\mathbf{K}^{\nu\tau}(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu) = (\mathbf{L}^\nu)^{-1}\mathbf{D}^\tau,$$

$$\mathbf{B}^{\nu\tau}(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu) = (\mathbf{L}^\nu)^{-1}\mathbf{L}^\tau.$$

В результате, применяя обращение Фурье $\mathbf{F}_2^{-1}(x_1^\nu, x_2^\nu)$ по параметрам α_1^ν, α_2^ν, приходим к системе интегральных уравнений вида

$$\iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}_\nu} \mathbf{k}^\nu(x_1^\nu - \xi_1^\nu, x_2^\nu - \xi_2^\nu) t^\nu(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu) d\xi_1^\nu d\xi_2^\nu +$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{T} \iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}_\tau} \mathbf{k}^{\nu\tau}(x_1^\nu, \xi_1^\tau, x_2^\nu, \xi_2^\tau) \mathbf{t}^\tau(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau)) d\xi_1^\tau d\xi_2^\tau =$$

$$= \mathbf{u}^\nu(x_1^\nu, x_2^\nu) +$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{T} \iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}_\tau} \mathbf{b}^{\nu\tau}(x_1^\nu, \xi_1^\tau, x_2^\nu, \xi_2^\tau) \mathbf{u}^\tau(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau) d\xi_1^\tau \xi_2^\tau, \qquad (20)$$

$$x_1^\nu, x_2^\nu \in \partial\boldsymbol{\Omega}_\nu, 1 \leqslant \nu \leqslant T,$$

$$\mathbf{k}^\nu(x_1^\nu, x_2^\nu) = \mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{K}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu),$$

$$\mathbf{k}^{\nu\tau}(x_1^\nu, \xi_1^\tau, x_2^\nu, \xi_2^\tau) = \\ = \mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{K}^{\nu\tau}(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu) \exp i\langle \mathbf{c}_\tau^\nu \boldsymbol{\alpha}^\nu, \xi^\tau \rangle,$$

$$\mathbf{b}^{\nu\tau}(x_1^\nu, \xi_1^\tau, x_2^\nu, \xi_2^\tau) = \\ = \mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{B}^{\nu\tau}(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu) \exp i\langle \mathbf{c}_\tau^\nu \boldsymbol{\alpha}^\nu, \xi^\tau \rangle.$$

Здесь T — число локальных систем координат касательного расслоения границы. Аналогично выводится система интегральных уравнений когда задаются напряжения.

В системе (20) оператор с символом $\mathbf{K}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)$ является главным, он соответствует краевой задаче для полупространства; остальные операторы подчиненные, вполне непрерывные в пространствах, в которых обратим главный оператор. Из этого вытекает богатый арсенал методов аналитического и численного исследования такого типа систем интегральных уравнений.

Литература

1. *Евдокимова О. В.* Дифференциальный метод факторизации в неоднородных и нестационарных задачах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. №2. С. 51–55.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. №2. С. 168–172.

3. *Евдокимова О. В.* Дифференциальный метод факторизации в механике разрушения, материаловедении и сейсмологии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №4. С. 32–42.
4. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и наноструктурах // ДАН. 2007. Т. 415. № 5. С. 596–599.
5. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ: В 2 ч. М.: Наука, 1985. Ч. 1–2.
6. *Евдокимова О. В.* О факторизации матриц-функций, возникающих в проблеме прочности материалов сложного строения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. №2. С. 8–11.
7. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
8. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

Ключевые слова: интегральные уравнения, дифференциальные уравнения, матрицы-функции, факторизация, внешние формы, функциональные уравнения, корни уравнений, формы-вычеты Лере

Статья поступила 11 июня 2008 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар