

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ МОДЕЛЕЙ ПЛАСТИНЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТРЕХМЕРНОМ СЛОЕ

Болгова А. И.¹

ACTION OF PLATE MODELS ON ELASTIC WAVE PROPAGATION IN A THREE-DIMENSIONAL LAYER

Bolgova A. I.

The models of the plate situated on the elastic three-dimensional layer without friction and separation (taking into account the shift, inertia moment and both factors) were examined. The load in an arbitrary region oscillates on the surface of the plate. In case of the load, which is regularly distributed within the rectangular domain, asymptotic formulas were obtained to calculate wave fields and energy stream. In case of the load, which is given in an arbitrary domain, expressions were identified to calculate energy fields. Comparison of results obtained for the layer and for the layer with various models of plates has shown that the closest to one layer model is the model for the layer and the plate taking into account both the shift and inertia moment.

Введение

В работах [1–3] для акустического и изотропного слоев изложен метод решения задачи для определения асимптотических полей в случае действия на поверхности трехмерного слоя осциллирующей нагрузки, расположенной в произвольной области. Главные члены асимптотики были получены в случае действия нагрузки в прямоугольнике и по линии [4, 5]. В данной работе исследуются три известные модели для поперечных колебаний пластины [6], лежащей без отрыва и трения на трехмерном изотропном слое. На поверхности пластины осциллирует нагрузка, заданная в произвольной области. Изучается влияние на асимптотическое распространение волн и потока энергии в слое различных моделей пластины: с учетом сдвига (пластина ПС), с учетом момента инерции (пластина ПИ) и с учетом этих двух факторов (пластина ПСИ).

1. Постановка задачи

Уточненное уравнение поперечных колебаний пластины ПСИ, учитывающее влияние инерции вращения и деформации поперечного сдвига имеет вид [6]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\tilde{D}}{\rho_2 h} \nabla^2 \nabla^2 - \left(\frac{\tilde{D}}{k^2 \mu_2 h} + \frac{\tilde{I}}{h} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho \tilde{I}}{k^2 \mu_2 h} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right] \tilde{v} = \left[\frac{1}{\rho_2 h} + \frac{\tilde{I}}{k^2 \mu_2 h^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\tilde{D}}{k^2 \mu_2 \rho_2 h^2} \nabla^2 \right] [p(x, y, t) - q(x, y, t)]. \quad (1.1)$$

Из уравнения (1.1) вытекают как частные случаи уравнение колебаний пластины ПС

$$\left(\tilde{D} \nabla^2 \nabla^2 - \frac{\rho_2 \tilde{D}}{k^2 \mu_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \rho_2 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{v} = \left(1 - \frac{\tilde{D}}{k^2 \mu_2 h} \nabla^2 \right) [p(x, y, t) - q(x, y, t)]$$

и уравнение для пластины ПИ

$$\left(\tilde{D} \nabla^2 \nabla^2 - \rho_2 \tilde{I} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \rho_2 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{v} = p(x, y, t) - q(x, y, t).$$

Уравнения колебаний слоя имеют вид

$$(\lambda_1 + \mu_1) (\operatorname{div} \mathbf{u})_{,k} + \mu_1 \Delta u_k = \rho_1 \ddot{u}_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\lambda_1, \mu_1, \rho_1, H, \lambda_2, \mu_2, \rho_2, h, \nu_2$ — постоянные, соответственно характеризующие слой, Δ —

¹Болгова Анна Ипполитовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Южно-Российского государственного технического университета (НПИ); e-mail: bolgova@hotmail.ru.

оператор Лапласа в трехмерной области, Δ^2 — квадрат оператора Лапласа в двумерной области x, y ,

$$\tilde{D} = \frac{\mu_2 h^3}{6(1 - \nu_2)},$$

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \tilde{I} = \frac{h^3}{12}.$$

Граничные условия и условия сопряжения пластины и слоя имеют вид

$$p(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \begin{cases} f(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i\tilde{\Omega}t}, & (\tilde{x}, \tilde{y}) \in S, \\ 0, & (\tilde{x}, \tilde{y}) \notin S, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$q(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \sigma_{33}(\tilde{x}, \tilde{y}, H, t),$$

$$\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = u_3(\tilde{x}, \tilde{y}, H, t),$$

$$\sigma_{k3}(\tilde{x}, \tilde{y}, H, t) = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\sigma_{k3}(\tilde{x}, \tilde{y}, 0, t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (1.3)$$

$$u_3(\tilde{x}, \tilde{y}, 0, t) = 0,$$

где S — некоторая ограниченная область с кусочно-гладкой границей.

Далее рассматривается установившийся режим колебаний, при котором решение ищется в виде

$$\mathbf{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = \tilde{\mathbf{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) e^{i\tilde{\Omega}t},$$

$$\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i\tilde{\Omega}t}, \quad \sigma_{kl} = \tilde{\sigma}_{kl} e^{i\tilde{\Omega}t}$$

в системе безразмерных параметров

$$x = \frac{\tilde{x}}{H}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{H}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{H}, \quad I = \frac{\tilde{I}}{H^3},$$

$$\mathbf{U} = \frac{\tilde{\mathbf{U}}}{H}, \quad V = \frac{\tilde{V}}{H}, \quad \Omega = \frac{\tilde{\Omega}H}{c_1}, \quad \xi = \frac{h}{H},$$

$$D = \frac{\mu_2 h^3}{6H^3 \mu_1 (1 - \nu_2)},$$

$$c = \frac{c_2}{c_1}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}, \quad c_2^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1},$$

$$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

При построении решения задачи применяется принцип предельного поглощения, который фактически приводит к замене Ω на $\Omega_\varepsilon = \Omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$ и поиску решения в классе функций, убывающих на бесконечности, т.е. $\mathbf{u}(x, y, z, t) \rightarrow 0$, при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$.

Применяя к дифференциальным уравнениям движения и условиям (1.2), (1.3) преобразование Фурье по координатам x и y , найдем решение полученной системы уравнений с соответствующими граничными условиями

$$U_{1m\varepsilon} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha Q_m(\alpha, \gamma) \tilde{A}(\ell, \Omega_\varepsilon, z) \times \\ \times e^{-i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha d\gamma,$$

$$U_{2m\varepsilon} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\gamma Q_m(\alpha, \gamma) \tilde{A}(\ell, \Omega_\varepsilon, z) \times \\ \times e^{-i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha d\gamma,$$

$$U_{3m\varepsilon} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_{1\varepsilon} Q_m(\alpha, \gamma) \tilde{C}(\ell, \Omega_\varepsilon, z) \times \\ \times e^{-i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha d\gamma,$$

где

$$\tilde{A}(\ell, \Omega, z) = -E_1 \operatorname{sh} \beta_2 \operatorname{ch} \beta_1 z + 2\beta_1 \beta_2 \operatorname{sh} \beta_1 \operatorname{ch} \beta_2 z,$$

$$\tilde{C}(\ell, \Omega, z) = E_1 \operatorname{sh} \beta_2 \operatorname{sh} \beta_1 z - 2\ell^2 \operatorname{sh} \beta_1 \operatorname{sh} \beta_2 z,$$

$$\ell^2 = \alpha^2 + \gamma^2.$$

$$\beta_1 = \sqrt{\ell^2 - \Omega^2}, \quad \beta_2 = \sqrt{\ell^2 - \frac{\Omega^2}{c^2}},$$

$$E^1 = 2\ell - \frac{\Omega^2}{c^2} = \ell^2 - \beta_2^2.$$

Окончательное решение рассматриваемой краевой задачи получим с помощью предельного перехода [7]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{U}_\varepsilon = \mathbf{U}.$$

Выражения для контактных напряжений, преобразованных по Фурье, $Q(\alpha, \gamma)$ для трех рассматриваемых моделей, выраженные через заданную нагрузку, также преобразованную по Фурье, имеют вид

$$Q_m(\alpha, \gamma) = \Delta(\ell, \Omega) K_m(\ell, \Omega) \frac{F(\alpha, \gamma)}{\Delta_m(\ell, \Omega)},$$

$$m = 6, 7, 8,$$

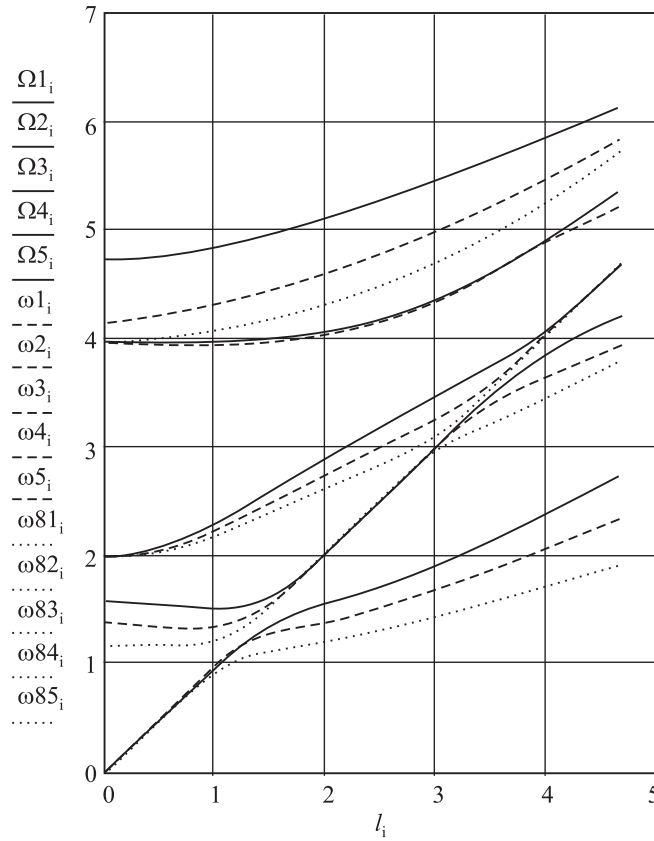


Рис. 1

где

$$K_7(\ell, \Omega) = 1 - \frac{D\ell^2}{k^2\mu\xi}, \quad K_8(\ell, \Omega) = 1.$$

$$\begin{aligned} \Delta_6(\ell, \Omega) = & \Delta(\ell, \Omega) \left(\frac{1}{\rho\xi} - \frac{I\Omega^2}{k^2\mu\xi^2c^2} + \frac{D\ell^2}{k^2\mu\rho\xi^2} \right) + \\ & + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \operatorname{sh} \beta_2 (E_1 - 2\ell^2) \left[\frac{Dc^2\ell^4}{\rho\xi} - \Omega^2 + \right. \\ & \left. + \frac{I\rho\Omega^4}{k^2\mu\xi c^2} - \left(\frac{D}{k^2\mu\xi} + \frac{I}{\xi} \right) \ell^2 \Omega^2 \right], \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_7(\ell, \Omega) = & \Delta(\ell, \Omega) \left(1 - \frac{D\ell^2}{k^2\mu\xi} \right) + \\ & + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \operatorname{sh} \beta_2 (E_1 - 2\ell^2) \times \\ & \times \left[D\ell^4 + \frac{\rho\Omega^2}{c^2} \left(\frac{D\ell^2}{k^2\mu} - \xi \right) \right], \quad (1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_8(\ell, \Omega) = & \Delta(\ell, \Omega) + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \operatorname{sh} \beta_2 (E_1 - 2\ell^2) \times \\ & \times \left[D\ell^4 - \frac{\rho\Omega^2}{c^2} (I\ell^2 + \xi) \right], \quad (1.6) \end{aligned}$$

$$\Delta(\ell, \Omega) = E_1^2 \operatorname{ch} \beta_1 \operatorname{sh} \beta_2 - 4\ell^2 \beta_1 \beta_2 \operatorname{sh} \beta_1 \operatorname{ch} \beta_2,$$

$$K_6(\ell, \Omega) = \frac{1}{\rho\xi} - \frac{I\Omega^2}{k^2\mu\xi^2c^2},$$

2. Численное исследование дисперсионных уравнений

В работе [8] показано, что на распространение потока энергии в слое, укрепленном пластиной без учета сдвига и инерции, более существенное влияние оказывает увеличение плотности пластины по сравнению со слоем, чем изменение отношения их жесткостей. Численный анализ соотношений (1.4)–(1.6) показал, что дисперсионные кривые для слоя, укрепленного пластиной, тем сильнее отличаются от дисперсионных кривых для изотропного слоя, чем более плотным является материал пластины по сравнению с материалом слоя, и чем больше толщина пластины. На рис. 1 приведены графики дисперсионных кривых для изотропного слоя (сплошные линии), для изотропного слоя, подкрепленного пластиной ПИ (мелкий пунктир) и пластиной ПСИ (крупный пунктир), коэффициент $k = \sqrt{5/6} = 0,913$. При исследовании трех различных моделей пластин выявлено, что для первой дисперсионной кри-

вой все модели пластин дают одинаковый результат до $\Omega = \Omega_0$, свыше Ω_0 дисперсионные кривые расходятся, что видно из рис. 1. В качестве материала слоя выбран плавленный кварц, а материал пластины — вольфрам: $\mu = 2,609$, $\rho = 3,858$, $\xi = 0,1$. В этом случае $\Omega_0 \approx 0,8$. Если перейти к размерным переменным, получим, например, что при толщине слоя $H = 100$ м частота колебаний $\tilde{\Omega}_0 \approx 0,042$ Гц, а если $H = 10$ м, то $\tilde{\Omega}_0 \approx 0,0042$ Гц.

Дисперсионные кривые для модели пластины ПС при равных значениях параметров примерно совпадают с дисперсионными кривыми для пластины ПИ.

3. Построение решения вне области действия нагрузки

Рассмотрим в качестве примера нагрузку, распределенную равномерно по прямоугольнику $|x| < a$, $|y| < b$, преобразование Фурье от которой имеет вид

$$F(\alpha, \gamma) = \frac{4p \sin \alpha a \sin \gamma b}{\alpha \gamma}.$$

Вычислим асимптотическое поведение решения вначале в области $x > a$, $y > b$. Учитывая, что подынтегральные выражения в этом случае являются аналитическими функциями, вычислим внутренний интеграл по теории вычетов, считая, что $x > a$. Не нарушая общности выводов рассматриваемой задачи, выбираем Ω таким, что есть только полюса $\pm \ell_{0\varepsilon}$ подынтегральной функции, лежащие вблизи вещественной оси α и при $\varepsilon \rightarrow 0$ принимающие вещественное значение. Остальные полюса, которые всегда остаются комплексными, дают экспоненциальное затухание перемещений при $x, y \rightarrow \infty$ и в расчет не принимаются. В результате, замыкая контур интегрирования в нижней комплексной полуплоскости параметра $\alpha = \xi + i\tau$, приходим к однократным интегралам, справедливым для $x > a$

$$\begin{aligned} U_{1m\varepsilon} &= A_m(\ell_{0\varepsilon}, \Omega_\varepsilon, z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha_{0\varepsilon} a \sin \gamma b}{\alpha_{0\varepsilon} \gamma} \times \\ &\quad \times e^{-i\alpha_{0\varepsilon} x} e^{-i\gamma y} d\gamma, \\ U_{2m\varepsilon} &= A_m(\ell_{0\varepsilon}, \Omega_\varepsilon, z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha_{0\varepsilon} a}{\alpha_{0\varepsilon}^2} \sin \gamma b \times \\ &\quad \times e^{-i\alpha_{0\varepsilon} x} e^{-i\gamma y} d\gamma, \quad (3.1) \end{aligned}$$

$$U_{3m\varepsilon} = -iC_m(\ell_{0\varepsilon}, \Omega_\varepsilon, z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha_{0\varepsilon} a \sin \gamma b}{\alpha_{0\varepsilon}^2 \gamma} \times \\ \times e^{-i\alpha_{0\varepsilon} x} e^{-i\gamma y} d\gamma,$$

$$m = 6, 7, 8, \quad x > a, \quad \text{Im } \alpha_{0\varepsilon} < 0,$$

где

$$\alpha_{0\varepsilon} = \sqrt{\ell_{0\varepsilon}^2 - \gamma^2},$$

$$A_m(\ell_0, \Omega, z) = \frac{2p \ell_0 K_m(\ell_0, \Omega) \tilde{A}(\ell_0, \Omega_\varepsilon, z)}{\pi \Delta_{m,\ell}(\ell, \Omega)|_{\ell=\ell_0}},$$

$$\begin{aligned} C_m(\ell_0, \Omega, z) &= \\ &= \frac{2p \ell_0 \beta_1(\ell_0, \Omega) K_m(\ell_0, \Omega) \tilde{C}(\ell_0, \Omega, z)}{\pi \Delta_{m,\ell}(\ell, \Omega)|_{\ell=\ell_0}}. \end{aligned}$$

Применим метод контурного интегрирования к однократным интегралам вида (3.1). Предполагая теперь $y > b$, контур интегрирования будем замыкать в нижней комплексной полуплоскости $\gamma = \sigma + i\eta$. Наличие в подынтегральной функции точки ветвления $\gamma = \ell_{0\varepsilon}$ при использовании в дальнейшем методов теории функции комплексного переменного приводит к необходимости проводить разрез в нижней комплексной полуплоскости. Контур интегрирования в этом случае принимает вид, изображенный на рис. 2а. Здесь сплошной линией выделен разрез, штрихпунктирной линией — петля L , причем как разрез, так и петля L стягиваются при $\varepsilon \rightarrow 0$ к осям σ и η . На рис. 2а также указаны знаки, которые принимает $\text{Im } \alpha_{0\varepsilon}$ вблизи соответствующих берегов разреза.

Чтобы везде внутри контура выполнить условие $\text{Im } \alpha_{0\varepsilon} < 0$, на правом берегу разреза выбирается

$$\alpha_{0\varepsilon} = -\sqrt{\ell_{0\varepsilon}^2 - (\sigma + i\eta)^2}.$$

При $R \rightarrow \infty$, а $\varepsilon \rightarrow 0$ перемещения (3.1) принимают вид

$$\begin{aligned} U_{1m\varepsilon} &= 4\pi A_m(\ell_0, \Omega, z) \times \\ &\times \left[i \int_0^\infty \frac{\sin \tilde{\alpha}_0 a \text{sh } \eta b}{\tilde{\alpha}_0 \eta} e^{-\eta y} \sin \tilde{\alpha}_0 x d\eta + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\ell_0} \frac{\sin \alpha_0 a \sin \gamma b}{\alpha_0 \gamma} e^{-i\gamma y} \sin \alpha_0 x d\gamma \right], \end{aligned}$$

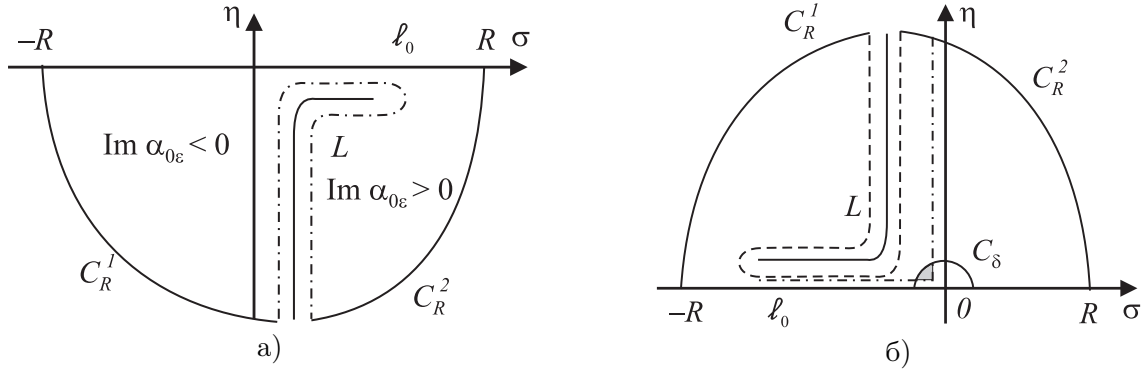


Рис. 2

$$U_{2m\varepsilon} = 4\pi i A_m(\ell_0, \Omega, z) \times \left[\int_0^\infty \frac{\sin \tilde{\alpha}_0 a}{\tilde{\alpha}_0^2} \operatorname{sh} \eta b e^{-\eta y} \cos \tilde{\alpha}_0 x d\eta + \int_0^{\ell_0} \frac{\sin \alpha_0 a}{\alpha_0^2} \sin \gamma b e^{-i\gamma y} \cos \alpha_0 x d\gamma \right], \quad (3.2)$$

$$U_{3m\varepsilon} = 4\pi C_m(\ell_0, \Omega, z) \times \left[i \int_0^\infty \frac{\sin \tilde{\alpha}_0 a}{\tilde{\alpha}_0^2} \frac{\operatorname{sh} \eta b}{\eta} e^{-\eta y} \cos \tilde{\alpha}_0 x d\eta + \int_0^{\ell_0} \frac{\sin \alpha_0 a}{\alpha_0^2} \frac{\sin \gamma b}{\gamma} e^{-i\gamma y} \cos \alpha_0 x d\gamma \right],$$

$$m = 6, 7, 8, \quad x > a, \quad y > b, \quad \tilde{\alpha}_0 = \sqrt{\ell_0^2 + \eta^2}.$$

Переходим к получению асимптотики для интегралов (3.2) методом стационарной фазы [9] при $x > a$, $y > b$. Введем полярную систему координат

$$x_1 = x - a = R \cos \theta, \quad y_1 = y - b = R \sin \theta,$$

и учтем, что интегралы с бесконечным верхним пределом убывают, стремясь к нулю не медленнее, чем R^{-1} , а, значит, не дают вклада в поток энергии при $R \rightarrow \infty$. Тогда выражения для перемещений при $R \rightarrow \infty$ примут вид

$$U_{1m\varepsilon} = \frac{i A_m(\ell_0, \Omega, z) S(R, \ell_0, \theta)}{\sin \theta} + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$U_{2m\varepsilon} = \frac{i A_m(\ell_0, \Omega, z) S(R, \ell_0, \theta)}{\cos \theta} + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$U_{3m\varepsilon} = \frac{2C_m(\ell_0, \Omega, z) S(R, \ell_0, \theta)}{\ell_0 \sin 2\theta} + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

где

$$S(R, \ell_0, \theta) = \sqrt{\frac{\ell_0 (2\pi)^3}{R}} \times \frac{\sin(\ell_0 a \cos \theta) \sin(\ell_0 b \sin \theta)}{\ell_0^2} \times e^{-i\ell_0(a \cos \theta + b \sin \theta)} e^{-i(R\ell_0 + \frac{\pi}{4})}.$$

Известно [10], что поток энергии в слое через цилиндрическую поверхность $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $R = \text{const}$ в направлении R при фиксированном θ и $R \rightarrow \infty$ имеет вид

$$P_{Rm} = \Omega^2 C_{gm} B_m(U, U) / 2, \quad (3.3)$$

где

$$C_{gm} = -\frac{\partial \Delta_m}{\partial \ell} / \frac{\partial \Delta_m}{\partial \Omega}, \quad m = 6, 7, 8,$$

$$B_m(U, U) =$$

$$= \int_0^1 (U_{1m} \overline{U_{1m}} + U_{2m} \overline{U_{2m}} + U_{3m} \overline{U_{3m}}) dz,$$

$\overline{U_{im}}$ — величина, комплексно сопряженная U_{im} . С учетом (3.3) $B_m(U, U)$ примет вид

$$B_m(U, U) = \frac{RS(R, \ell_0, \theta) \overline{S(R, \ell_0, \theta)}}{c^2 \ell_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \times \int_0^1 (\ell_0^2 A_m^2(\ell_0, \Omega, z) + C_m^2(\ell_0, \Omega, z)) dz.$$

Таким образом, получена расчетная формула для определения потока энергии в слое с пластиной в секторе $x > a$, $y > b$. Для получения

полного потока, уходящего на бесконечность, проинтегрируем формулу (3.3) по θ от нуля до $\pi/2$ и умножим на четыре

$$P_{Rm} = \frac{-16\pi\Omega^2 p^2 K_m^2(\ell_0, \Omega)}{c^2 \ell_0^3 \partial \Delta_m / \partial \ell \cdot \partial \Delta_m / \partial \Omega} I(\ell_0, \Omega) \times \\ \times \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(\ell_0 a \cos \theta) \sin^2(\ell_0 b \sin \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} d\theta,$$

$$I(\ell_0, \Omega) = \\ = \int_0^1 \left(\ell_0^2 \tilde{A}^2(\ell_0, \Omega, z) + \beta_1^2 \tilde{C}^2(\ell_0, \Omega, z) \right) dz.$$

4. Численное исследование потока энергии вне области действия нагрузки

Для различных моделей пластин построены графики потока энергии в слое при одинаковых значениях параметров $a = 2$, $b = 5$, μ , ρ , ξ и равномерно распределенной нагрузки $p = P/4ab$, $P = \iint_S f(x, y) dx dy$. В расчетах принято $P = 1$. Установлено, что различные модели пластин неодинаково влияют на распространение потока энергии: картины распространения потока энергии отличаются не только по величине, но и по направлениям. На рис. 3а приведены графики потока энергии для изотропного слоя без пластины (сплошная линия), слоя и пластины ПСИ (крупный пиксир), слоя и пластины ПС (мелкий пиксир). Графики потока энергии для пластины ПИ не приводятся, поскольку приближенно совпадают с графиками для пластины ПС. В качестве материала слоя выбран плавленный кварц, а материал пластины — сталь: $\mu = 2,609$, $\rho = 3,858$, $\xi = 0,1$; коэффициент $k = 0,913$; частота $\Omega = 1,1$. Из рис. 3а видно, что совпадают направления распространения потока энергии для изотропного слоя и для слоя с пластиной ПСИ, хотя по величине поток энергии больше для слоя, подкрепленного пластиной. В случае, когда рассматривается слой с пластиной ПИ или пластиной ПС, появляются направления (например, близкие к $\theta = \pi/2$), по которым поток энергии существенно больше по величине.

Проведены расчеты потоков энергии в зависимости от безразмерного параметра $\xi = h/H$. С уменьшением ξ потоки энергии

для различных пластин по направлениям приближаются к потоку энергии для одного изотропного слоя, однако даже при $\xi = 0,01$ совпадения потоков по величине не наблюдается.

Исследовано влияние частоты Ω на распространение потоков энергии для различных пластин. Поскольку с ростом Ω дисперсионные кривые для различных моделей пластин все более отклоняются друг от друга, соответственно отличаются значения ℓ_0 , то даже незначительное изменение Ω (рис. 3б, $\Omega = 1,15$, $\xi = 0,1$) вызывает существенное изменение в распространении потоков энергии.

Если в качестве материала пластины выбрать более плотный и жесткий, например, вольфрам ($\mu = 5,147$, $\rho = 8,743$, $\xi = 0,1$, $k = 0,913$, $\Omega = 1,1$), то сравнение потоков энергии для слоя и для слоя с пластиной ПИ или пластиной ПС показывает, что они близки по величине, но существуют направления распространения, по которым наблюдаются расхождения. Поток энергии для слоя и пластины ПСИ совпадает по направлениям распространения с потоком энергии для слоя без пластины, но значительно больше по величине.

С уменьшением ξ поток энергии для слоя и пластин ПИ и ПС увеличивается по величине и изменяется по направлениям: так, например, при $\xi = 0,05$ появляются направления близкие к $\theta = \pi/2$, по которым поток энергии существенно больше по величине, чем в слое без пластины. Уменьшение ξ приводит к тому, что графики потоков энергии приближаются к графику потока для слоя, не укрепленного пластиной.

Таким образом, проведенное исследование показало, что наличие пластины на поверхности трехмерного упругого слоя влияет на распространение потока энергии в слое. Причем рассмотренные модели при различных параметрах задачи влияют на поток энергии по-разному: учет только сдвига или инерции вращения приводит к существенным отличиям от потока для упругого слоя без пластины не только по величине, но и по направлениям. В то же время потоки энергии в слое с пластиной ПСИ отличаются от потоков энергии в изотропном слое по величине, но по направлениям всегда совпадают.

5. Построение решения в канале

$$\Pi : \{x > a, |y| \leq b\}$$

Из (3.1) следует, что для вычисления интегралов при $|y| \leq b$ методом контурного интегрирования, их необходимо разбить на два

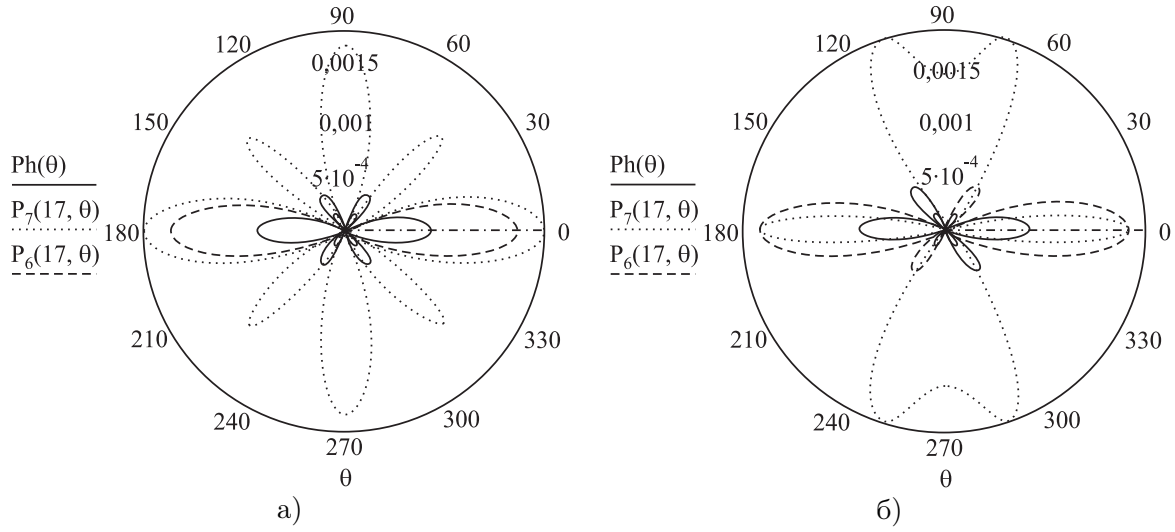


Рис. 3

слагаемых.

$$U_{km\varepsilon} = U_{km1\varepsilon} - U_{km2\varepsilon}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где, например,

$$U_{1m1\varepsilon} = \frac{A_m(\ell_{0\varepsilon}, \Omega_\varepsilon, z)}{2i} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha_{0\varepsilon} a}{\alpha_{0\varepsilon} \gamma} e^{-i\alpha_{0\varepsilon} x} e^{-i\gamma(y-b)} d\gamma,$$

$$U_{1m2\varepsilon} = \frac{A_m(\ell_{0\varepsilon}, \Omega_\varepsilon, z)}{2i} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha_{0\varepsilon} a}{\alpha_{0\varepsilon} \gamma} e^{-i\alpha_{0\varepsilon} x} e^{-i\gamma(y+b)} d\gamma.$$

Вычислим интегралы $U_{km1\varepsilon}$, $k = 1, 2, 3$, $m = 6, 7, 8$ при $y < b$, замыкая контур интегрирования в верхнюю комплексную полуплоскость. Контур интегрирования Γ , построенный с учетом проведенного выше исследования, изображен на рис. 2б.

Подынтегральные функции $U_{kml\varepsilon}$, $k = 1, 3$, $l = 1, 2$, $m = 6, 7, 8$ имеют особенность в точке $\gamma = 0$. Важно отметить, что эта точка не является изолированной особой точкой и ее нельзя окружить малой окрестностью C_δ такой, чтобы при достаточно малом ε функция была аналитической внутри области, ограниченной полуокружностью C_δ . Действительно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ разрез принимает вид, изображенный на рис. 2б штрихпунктирной линией. При этом в заштрихованной области $\alpha_{0\varepsilon}$ нужно выбирать в виде $\alpha_{0\varepsilon} = -\sqrt{\ell_{0\varepsilon}^2 - (\sigma + i\eta)^2}$, а в

остальной области соответственно со знаком «+», поскольку только в этом случае внутри всей области выполняется условие $\text{Im } \alpha_{0\varepsilon} < 0$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ заштрихованная область занимает всю левую часть полукруга C_δ . Учитывая это обстоятельство, интеграл по C_δ принимает вид

$$\int_{C_\delta} \frac{\sin \alpha_0 a}{\alpha_0 \gamma} e^{-i\alpha_0 x} e^{-i\gamma(y-b)} d\gamma = \pi \sin \ell_0 a \cos \ell_0 x / \ell_0.$$

Очевидно, точку $\gamma = 0$ при этом необходимо обходить сверху. При обходе точки $\gamma = 0$ снизу она попадала бы внутрь области, ограниченной контуром. Тогда нужно учесть вычет в этой точке, что невозможно, поскольку она не является изолированной. Вычислив интеграл по C_δ и следуя в остальном изложенной ранее схеме, легко получить представление для U_1 в виде

$$U_{1m} = A_m(\ell_0, \Omega, z) \times \left[I_1^1 + I_1^2 + \pi \frac{\sin \ell_0 a}{\ell_0} \cos \ell_0 x \right], \quad (5.1)$$

где

$$I_1^1 = -2 \int_0^\infty \frac{e^{-\tau b}}{\tau} \frac{\sin \sqrt{\ell_0^2 + \tau^2} a}{\sqrt{\ell_0^2 + \tau^2}} \times \sin \sqrt{\ell_0^2 + \tau^2} x \text{ch } \tau y d\tau,$$

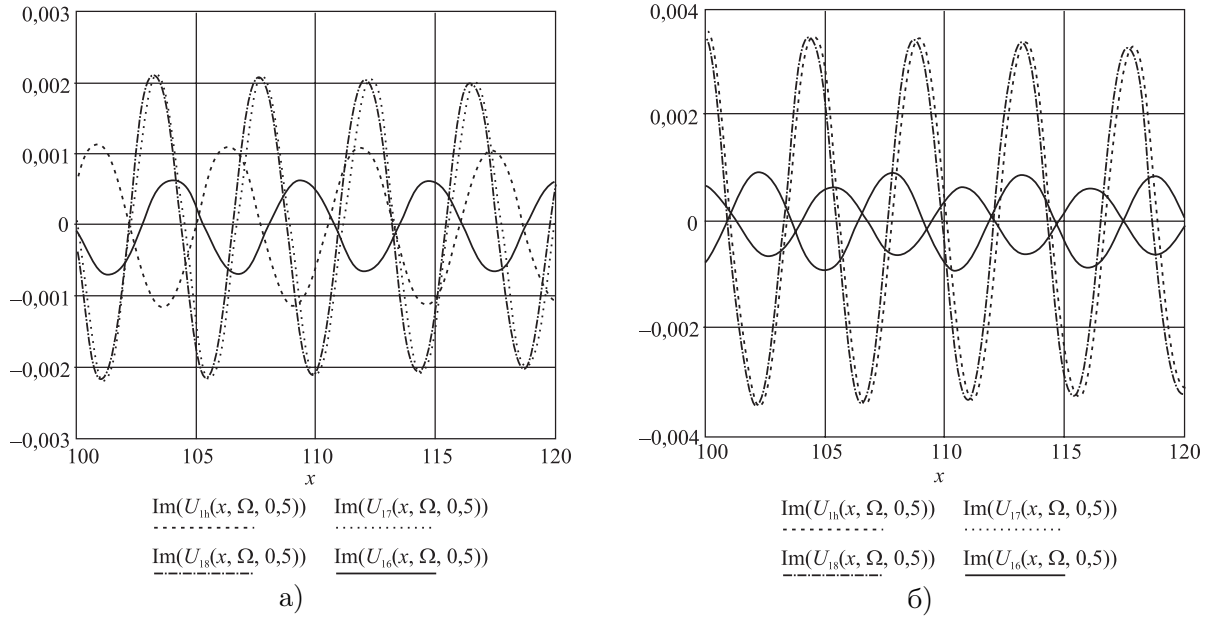


Рис. 4

$$I_1^2 = 2 \int_0^{\ell_0} \frac{e^{-i\gamma b}}{\gamma} \frac{\sin \alpha_0 a}{\alpha_0} \sin \alpha_0 x \cos \gamma y d\gamma.$$

Подынтегральные выражения в (5.1) имеют особенности в нуле. Однако при их совместном рассмотрении особенности в нуле взаимно уничтожаются. При этом подынтегральные выражения видоизменяются таким образом, что получившиеся интегралы дают такой же вклад, как интеграл по C_δ , только с противоположным знаком. С учетом этого обстоятельства, используя метод стационарной фазы, можно показать, что главные члены асимптотических разложений для исследуемых интегралов имеют вид

$$U_{1m} = A_m(\ell_0, \Omega, z) \sqrt{\frac{2\pi}{\ell_0 x}} b \sin \ell_0 a \cdot e^{-i(\ell_0 x - \frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$U_{2m} = O(1/x), \quad (5.2)$$

$$U_{3m} = C_m(\ell_0, \Omega, z) \sqrt{\frac{2\pi}{\ell_0 x}} \frac{b \sin \ell_0 a}{\ell_0} e^{-i(\ell_0 x + \frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Полученное решение (5.2) показывает, что рассмотренные интегралы вносят в асимптотические перемещения U_1 и U_3 волны, убывающие на бесконечности как $1/\sqrt{x}$, а перемещение U_2 убывает как $1/x$.

Из (5.2) также следует, что поток энергии, проходящий через сечение $x > a$, $|y| \leq b$, $0 < z < 1$ на бесконечность не распространяется. Аналогичные результаты могут быть получены для каналов $x < -a$, $|y| \leq b$; $|x| < a$, $y > b$; $|x| < a$, $y < -b$.

Сравним теперь графики мнимых частей перемещений U_1 (рис. 4а) и U_3 (рис. 4б) для трех изучаемых моделей пластин при следующих параметрах: $\mu = 2,609$, $\rho = 3,858$, $\xi = 0,1$; $k = 0,913$, $a = 2$, $b = 5$, $\Omega = 1,1$. Из приведенных графиков видно, что перемещения для слоя с различными моделями пластин в несколько раз отличаются друг от друга, причем наиболее близкими слою, не подкрепленному пластиной, являются перемещения для слоя с пластиной ПСИ.

6. Вычисление потока энергии вне области действия произвольной нагрузки

Формулы, полученные для нагрузки, заданной в прямоугольной области, можно обобщить на случай нагрузки, заданной в произвольной области D . Заключим область D в прямоугольник. Из результатов работы [11] следует, что однородное решение в каналах будет иметь асимптотику, аналогичную полученной для прямоугольника, а поток энергии в каналах, вычисляемый с их помощью, будет равен нулю при $x \rightarrow \infty$ или $y \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что поток энергии от произвольной

Фигура		Полный поток энергии			
		Ph	P6	P7	P8
1. Прямоугольник $ x < a, y < b$	$a=2, b=5$	$1,265 \cdot 10^{-3}$	$2,53 \cdot 10^{-3}$	$5,001 \cdot 10^{-3}$	$5,012 \cdot 10^{-3}$
	$a=2, b=2$	$5,57 \cdot 10^{-3}$	0,012	0,025	0,025
	$a=1, b=1$	0,028	0,065	0,495	0,498
	$a=0,5, b=0,5$	0,04	0,092	0,85	0,857
2. Кардиоида ($S_D=4,712$) $\rho = 1 + \cos \theta$		0,026	0,06	0,442	0,445
3. Лемниската ($S_D=1$) $\rho = \sqrt{\sin 2\theta}$		0,029	0,067	0,552	0,526
4. Окружность	$\rho = \cos \theta$	0,041	0,095	0,888	0,895
	$\rho = 0,5$	0,041	0,095	0,888	0,895
	$\rho = 1$	0,032	0,073	0,595	0,599

нию со слоем без пластины при $\rho > 1$; 7) меняя область действия нагрузки, можно управлять направлениями распространения потока энергии в слое.

Сравнение результатов, полученных для слоя и слоя с различными моделями пластин, показало, что наиболее близкой к одному слою является модель для слоя с пластиной ПСИ, следовательно при расчетах нужно использовать модель слоя с пластиной ПСИ.

Автор выражает признательность своему научному руководителю Белоконову Александру Владимировичу за помощь и внимание к работе.

Литература

1. Болгова А.И. Распространение волн в трехмерном изотропном слое // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2001. Спецвыпуск: Математическое моделирование. С. 36–37.
2. Белоконов А.В., Болгова А.И. Особенности распространения волн в изотропном трехмерном слое с тонкой накладкой // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2005. № 2. С. 31–35.
3. Белоконов А.В., Белоконов О.А., Болгова А.И. Влияние неравномерной нагрузки на характер распространения волн в изотропном трехмерном слое с тонкой накладкой // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2006. № 4. С. 3–8.
4. Белоконов О.А., Болгова А.И. Исследование волновых и энергетических характеристик в слое от действия неравномерной нагрузки // Численно-аналитические методы: Сб. науч. тр. / Юж.-Рос. гос. техн. ун-т, Новочеркасск: ЮРГТУ, 2007. С. 65–71.
5. Белоконов А.В., Белоконов О.А., Болгова А.И. Волны в трехмерном слое, подкрепленном тонкой пластиной // Вестник Самарского гос. ун-та. Естественнонаучная серия. 2007. № 6 (56). С. 30–45.
6. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973. 267 с.
7. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода // ДАН. 1951. Т. 80. № 3. С. 1011–1013.
8. Болгова А.И. Распространение волн и потока энергии в трехмерном изотропном слое, укрепленном пластиной // Численно-аналитические методы: Сборник научных трудов / Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. 2004. С. 3–9.
9. Фелсен Л., Маркувич Н. Излучение и рассеяние волн. М., 1978. Т. 2. 547 с.
10. Белоконов А.В., Болгова А.И. О распространении волн в изотропном трехмерном слое // Труды VIII Международной конференции. г. Ростов н/Д. 2003. Т. 2. Современные проблемы МСС. С. 30–35.
11. Белоконов А.В. Собственные и присоединенные собственные функции в задаче о распространении упругих волн в анизотропном неоднородном по глубине слое // Известия АН России. Механика твердого тела. 2000. № 3. С. 11–19.

Ключевые слова: слой, пластина, гармонические волны, асимптотика, поток энергии.

Статья поступила 14 мая 2008 г.

Южно-Российский государственный технический университет (НПИ), г. Новочеркасск

© Болгова А. И., 2008