

УДК 532.5+534.1

**ГИДРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ НА СЛОЕ НЕСЖИМАЕМОЙ
ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ***Ефремов И. И.¹, Лукащик Е. П.²***HYDROELASTIC OSCILLATIONS OF A PLATE ON THE LAYER OF INCOMPRESSIBLE
PONDEROUS LIQUID**

Efremov I. I., Lukashchik E. P.

To investigate hydroelastic characteristics of a plate floating on the free surface of ponderous liquid, the integral equations method is used, which is different from previous approaches by other authors. The present approach to consideration of this problem is based on the method of hydrodynamic singularities (vortexes) and the Green's functions method used to solve a differential equation of the cylinder bend of a plate on the elastic foundation. The numerical results obtained prove the efficiency of the offered approach for a wide range of parameters.

Введение

Исследованию гидроупругого поведения незакрепленной пластины, плавающей на свободной поверхности несжимаемой весомой жидкости, посвящен ряд работ российских и зарубежных авторов, довольно обширные обзоры которых содержатся в [1–4]. Большинство работ носят теоретический характер. Из работ, содержащих экспериментальные данные, отметим [5]. Интерес к данной проблеме обусловлен необходимостью прогнозирования поведения различных видов платформ для исследования шельфа, мелководных аэродромов, искусственных островов.

В большинстве работ [5–8], посвященных данной проблеме, использовалось представление решений в виде суммы мод колебаний упругой пластины в вакууме. Однако такой подход, будучи достаточно строго обоснован теоретически, может привести к заметным погрешностям при вычислениях или потребовать неоправданно больших выкладок и затрат времени. В частности, приведение рассматриваемой задачи к краевой задаче с высоким порядком производных потенциала скорости за счет уравнения колебаний пластины [9, 10] и применение сложной процедуры метода Винера-Хопфа [11] являются, на наш

взгляд, необязательным усложнением, чреватым дополнительными погрешностями.

Моделирование рассматриваемого процесса требует привлечения уравнений и методов теории упругости и гидродинамики. Отмеченный выше подход разложения искомых функций по счетным модам более характерен для задач теории пластин. В данной работе принят за основу гидродинамический подход, а именно, задача изгиба пластины считается вспомогательной для определения возмущений скорости точек пластины, формирующих распределение давления жидкости на пластину. Сама пластина моделируется вихревым слоем, интенсивность которого определяется из интегрального уравнения, выражающего условие непротекания колеблющейся упругой пластины.

Важным обстоятельством при построении расчетной методики является учет того факта, что пластина на поверхности весомой жидкости при реальных параметрах является пластиной на упругом основании. Для исследования динамики ледяного покрова эффективный численный метод решения задач колебаний пластины на упругом основании предложен в [12]. В данной работе применен один вариант точного решения уравнения цилиндрического изгиба пластины на упругом основании с использованием обобщенных балочных

¹Ефремов Ион Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: i.efremov@math.kubsu.ru.

²Лукащик Елена Павловна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета.

функций, аналогичных функциям А.Н. Крылова [13].

В пользу гидродинамического подхода говорит и то обстоятельство, что, несмотря на все процессы, происходящие с пластиной, в жидкости распространяется только одна волна с волновым числом, не зависящим от упругих свойств пластины, но от которых зависит амплитуда волны. В результате изложенного подхода получены простые расчетные формулы и показано, что в расчетах дифракции точно выполняется закон сохранения энергии в его классическом варианте [14].

1. Постановка задачи

Распределение перепада давления вдоль упругой пластины, которое определяет ее гидрорупругое поведение, формируется течением жидкости. Будем рассматривать безвихревое течение несжимаемой весомой жидкости в линейаризованной постановке в предположении о слабой искривленности тонкой пластины и малости амплитуд волн, вызываемых колебаниями пластины.

Для исключения возможности появления волн, приносящих энергию к пластине, применим метод предельного поглощения.

Глубину жидкости принимаем конечной, хотя для применения метода такое ограничение не принципиально. В случае бесконечной глубины соответствующие формулы будут выписаны без дополнительных выкладок.

Вертикальную составляющую скорости точек пластины считаем состоящей из заданного возмущения (кинематическое возмущение) и составляющей, вызванной упругими перемещениями пластины.

Перемещения пластины определяются гидродинамическими силами и, возможно, возмущающей силой (динамическое возмущение). Линеаризованные краевые условия переносятся на канонические границы.

В результате приходим к следующей совместной постановке задачи для потенциала скорости $\varphi(x, y, t) = \bar{\varphi}(x, y)e^{-i\omega t}$ и прогибов пластины $w(x, t) = \bar{w}(x)e^{-i\omega t}$ (черточки над комплексными амплитудами опускаются

$$\Delta\varphi = 0 \text{ для } y < 0,$$

$$-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\varphi + g\varphi_y = 0 \text{ при } y = 0, \quad |x| > a,$$

$$\varphi_y = V_y = V_{y0} - i\omega w, \quad y = 0, \quad |x| \leq a,$$

$$\varphi_y = 0, \quad y = -H,$$

$$\begin{aligned} -\rho_0 h_0 \omega^2 w + D \frac{d^4 w}{dx^4} = \\ = i\rho\omega\varphi_- - Q_0\delta(x - s_0) - q(x) - \rho g w, \\ |s_0| < a, \\ w''(-a) = w''(a) = w'''(-a) = w'''(a) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $w(x)$ — упругие перемещения точек пластины, a — полудлина пластины, $\rho_0 h_0$ — масса единицы ширины пластины, D — изгибная жесткость пластины, V_{y0} — амплитуда заданного возмущения вертикальной скорости, H — глубина канала, Q_0 — амплитуда заданной сосредоточенной в точке $x = s_0$ силы внешнего воздействия, $q(x)$ — плотность распределения внешнего давления, g — ускорение свободного падения, $\varepsilon > 0$ — коэффициент диссипации в выражении для избыточного давления $p = -\rho(-i\omega + \varepsilon)\varphi_-$, φ_- — значения протенциала скорости при подходе к пластине снизу, Δ — оператор Лапласа, δ — плотность жидкости, ω — частота колебаний. В окончательном решении следует перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Решение гидродинамической задачи

Течение жидкости, вызванное колебаниями профиля, будем моделировать как течение, вызванное воздействием вихревого слоя с интенсивностью $\gamma = -\varphi_{-x}$ (φ_{-x} — производная потенциала $\varphi(x, y)$ по x при $y \rightarrow 0^-$), связанной с избыточным гидродинамическим давлением вдоль пластины

$$p = -i\rho\omega \int_{-a}^x \gamma(s) ds.$$

Применив преобразование Фурье к краевой задаче для потенциала скорости и вводя функции

$$\Gamma(\alpha) = \int_{-a}^a \gamma(x) e^{i\alpha x} dx = F[\gamma](\alpha),$$

$$V(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(x, 0) e^{i\alpha x} dx = F[\varphi_y(x, 0)](\alpha),$$

приходим к функциональному уравнению

$$\Gamma(\alpha) \frac{\text{sign}(\alpha)}{i} \frac{(\omega^2 + i\varepsilon\omega) \text{th } \alpha H}{\omega^2 + i\varepsilon\omega - g\alpha \text{th } \alpha H} = V(\alpha).$$

Применение обратного преобразования Фурье приводит к интегральному уравнению

$$\int_{-a}^a \gamma(s) k_h(x - s) ds = V_{y0}(x) - i\omega w,$$

$$\begin{aligned}
|x| &\leq a, \\
k_h(x) &= F^{-1}[K(\alpha)](x), \\
K(\alpha) &= \frac{\operatorname{th} \alpha H}{i} \frac{\omega^2 + i\varepsilon\omega}{\omega^2 + i\varepsilon\omega - g\alpha \operatorname{th} \alpha H}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

На основе теории вычетов в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим следующее выражение для ядра $k_h(x)$

$$\begin{aligned}
k_h(x) = \operatorname{sign}(x) &\left[\frac{-i\nu^2 e^{i\alpha_0|x|}}{\nu + H(\alpha_0^2 - \nu^2)} + \right. \\
&\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-\nu^2 e^{-\beta_m|x|}}{\nu - H(\beta_m^2 - \nu^2)} \right],
\end{aligned}$$

где α_0 и $i\beta_m$, $m = 1, 2, \dots$ — один положительный действительный и счетное множество положительных чисто мнимых корней уравнения

$$\alpha \operatorname{th} \alpha H = \nu.$$

Для бесконечно глубокой жидкости ядро интегрального уравнения (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
k_h(x) &= \nu \operatorname{sign}(x) \left(e^{i\nu|x|} - \frac{\nu}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{\nu^2 + \beta^2} d\beta \right) = \\
&= \nu \operatorname{sign}(x) \left[e^{i\nu|x|} - \frac{1}{\pi} f(x) \right], \tag{2.2}
\end{aligned}$$

$$\nu = \frac{\omega^2}{g},$$

$$f(x) = \operatorname{ci}(\nu|x|) \sin(\nu|x|) + \operatorname{si}(\nu|x|) \cos(\nu|x|).$$

Функция $f(x)$ исследована в [15], где показано, что $f(x) \rightarrow \nu|x|^{-1}$ при $\nu|x| \rightarrow \infty$, и тогда ядро (2.2) при больших значениях ν становится сингулярным. Данное обстоятельство необходимо учитывать при выборе вариантов дискретизации задачи.

Интегральное уравнение (2.1) должно решаться при дополнительном условии

$$\int_{-a}^a \gamma(s) ds = 0, \tag{2.3}$$

что соответствует бесциркуляционности течения жидкости и ограниченности давления на краях пластины. Условие (2.3) обеспечивает также условие отсутствия потока энергии от острых кромок пластины [16].

В некоторых частных случаях ядро $k_h(x)$ удастся выразить в конечной форме. Так, для

пластины на мелководье при умеренных приведенных частотах

$$k_h(x) = \frac{\nu}{2} \operatorname{sign}(x) e^{i\alpha_0|x|}, \quad \alpha_0 = \sqrt{\nu/H}.$$

Для невесомой жидкости конечной глубины

$$k_h(x) = \frac{-1}{2H \operatorname{sh}(\frac{\pi x}{2H})}.$$

Данное ядро является сингулярным типа Коши.

В случае весьма длинных волн интегральное уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\nu \int_{-a}^x \gamma(\xi) d\xi = V_{y0}(x) - i\omega w(x),$$

или в эквивалентной форме

$$\nu \varphi_-(x) = -V_{y0}(x) + i\omega w(x).$$

Для гидродинамического давления в таком приближении получается явное выражение

$$p(x) = -\rho g \left[w(x) + \frac{i}{\omega} V_{y0}(x) \right].$$

Область применимости такого приближения расширяется в сторону больших частот с уменьшением глубины жидкости.

Для умеренных длин волн лучшее приближение можно получить, сохраняя в ядре $k_h(x)$ только вклад действительных полюсов

$$k_h(x) = \operatorname{sign}(x) \frac{-i\nu^2 e^{i\alpha_0|x|}}{\nu + H(\alpha_0^2 - \nu^2)}.$$

Такое приближение для бесконечно глубокой жидкости было рассмотрено ранее в работе [17].

В другом предельном случае $\nu \rightarrow \infty$, что соответствует невесомой жидкости конечной глубины, полученные решения хорошо согласуются с известным решением, полученным в работе [18].

3. Определение упругих перемещений

Дифференциальное уравнение для определения упругих перемещений под действием гидродинамических сил является уравнением цилиндрического изгиба упругой пластины и в безразмерном виде записывается так

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{f}}{d\bar{x}^4} - \frac{(\rho_0 h_0 \omega^2 - \rho g) a^4}{D} \bar{f} = \\ = \frac{\rho \omega^2 a^5}{D} (-i) \int_{-1}^{\bar{x}} \bar{\gamma}(\bar{s}) d\bar{s} - \frac{\rho \omega^2 a^5}{D} \bar{q}(\bar{x}) - \\ - \frac{\rho \omega^2 a^5}{D} \bar{Q}_0 \delta(x - s_0). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{f} = \frac{f}{a}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{s}_0 = \frac{s_0}{a}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\omega a}, \\ \bar{\nu} = \nu a, \quad \bar{q} = \frac{q}{\rho \omega^2 a^2}, \quad \bar{Q}_0 = \frac{Q_0}{\rho \omega^2 a^3}. \end{aligned}$$

В отношении значений числителя коэффициента при $\bar{f}$ возможны 3 случая, соответствующих его знаку и нулевому значению. Рассмотрим вначале случай

$$\rho g > \rho_0 h_0 \omega^2,$$

более распространенный в расчетах и, видимо, соответствующий большинству реальных случаев пластин с малой осадкой.

Обозначим

$$\frac{(\rho g - \rho_0 h_0 \omega^2) a^4}{D} = \mu^4, \quad \frac{\rho_0 h_0}{\rho a} = m.$$

Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{f}}{d\bar{x}^4} + \mu^4 \bar{f} = \frac{\mu^4}{m - \nu^{-1}} \left(i \int_{-1}^{\bar{x}} \bar{\gamma}(s) ds + \right. \\ \left. + \bar{q}(\bar{x}) + \bar{Q}_0 \delta(x - s_0) \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Черточки над безразмерными величинами в дальнейшем будут опущены.

Уравнение (3.2) совпадает по виду с уравнением колебаний пластины на упругом основании [19]. Отмеченное обстоятельство в значительной мере определяет специфику гидроупругого поведения плавающей пластины и методику расчета.

Для решения уравнения (3.2) применим аналоги функций Крылова для пластин на упругом основании

$$S(x) = \operatorname{ch} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

$$T(x) = \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{2}}$$

$$U(x) = \operatorname{sh} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

$$V(x) = \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{2}}.$$

Указанные функции связаны соотношениями

$$S'(x) = V(x), \quad V'(x) = -U(x),$$

$$U'(x) = T(x), \quad T'(x) = S(x).$$

Решения уравнения (3.2) при условии незагруженности кромок

$$w''(-1) = w'''(-1) = w''(1) = w'''(1) = 0$$

имеют вид

$$w(x) = w_\gamma + w_q + w_Q.$$

Здесь

а) первое слагаемое обусловлено возмущениями гидродинамического давления

$$\begin{aligned} w_\gamma(x) = \frac{i}{m - \nu^{-1}} \left\{ \int_{-1}^x \gamma(\xi) [1 - S(\mu(x - \xi))] d\xi + \right. \\ + \frac{2S[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) A_\gamma(\mu, \xi) d\xi + \\ \left. + \frac{2T[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) B_\gamma(\mu, \xi) d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$C(\mu) = \operatorname{sh}^2(\mu\sqrt{2}) - \sin^2(\mu\sqrt{2}),$$

$$A_\gamma(\mu, \xi) = U(2\mu)U[\mu(1 - \xi)] + V(2\mu)T[\mu(1 - \xi)],$$

$$B_\gamma(\mu, \xi) = U(2\mu)T[\mu(1 - \xi)] - T(2\mu)U[\mu(1 - \xi)].$$

б) второе — распределенной внешней нагрузкой

$$w(x)_q = \frac{-\mu}{m - \nu^{-1}} \left\{ \int_1^x q(\xi) V[\mu(x - \xi)] d\xi - \frac{2S[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} q(\xi) A_q(\mu, \xi) d\xi - \frac{2T[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} q(\xi) B_q(\mu, \xi) d\xi \right\},$$

$$A_q(\mu, \xi) = U(2\mu)T[\mu(1 - \xi)] + V(2\mu)S[\mu(1 - \xi)],$$

$$B_q(\mu, \xi) = U(2\mu)S[\mu(1 - \xi)] - T(2\mu)T[\mu(1 - \xi)].$$

в) третье — сосредоточенной внешней силой

$$w_Q(x) = \frac{-\mu Q_0}{m - \nu^{-1}} \left\{ \Psi(x - s_0) V[\mu(x - s_0)] - \frac{2S[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} A_q(\mu, s_0) - \frac{2T[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} B_q(\mu, s_0) \right\}.$$

Здесь $\phi(x)$ — единичная функция Хевисайда.

В дальнейшем будем рассматривать сосредоточенную силу как частный случай распределенной $q_Q(x) = Q_0 \delta(x - s_0)$.

Случай $\rho_0 h_0 \omega^2 > \rho g$ также может быть проанализирован используемыми в данной работе методами.

4. Численное решение интегрального уравнения

Интегральное уравнение перепишем в безразмерном виде

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) k_h(x - \xi) d\xi + i w_\gamma = V_{y0} - i w_q.$$

С учетом выражения для прогибов пластинки под действием гидродинамического давления получим интегральное уравнение, содержащее только интенсивность вихревого слоя

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) k(x, \xi) d\xi = V_{y0} - i w_q, \quad (4.1)$$

$$k(x, \xi) = k_h(x - \xi) + k_e(x, \xi),$$

$$k_e(x, \xi) = \frac{\phi(x - \xi)}{m - \nu^{-1}} \{1 - S[\mu(x - \xi)]\} + \frac{2S[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} A_\gamma(\mu, \xi) + \frac{2T[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} B_\gamma(\mu, \xi).$$

Заметим, что ядро интегрального уравнения (4.1) в целом не является разностным, представляет собой комплекснозначную функцию действительных переменных.

Для решения интегрального уравнения (4.1) применим один из методов решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ), например, метод дискретных вихрей (МДВ) [20], хотя уравнение (4.1) сингулярно только для невесомой жидкости. Такой выбор обусловлен двумя моментами:

1) близостью ядер уравнения (4.1) к сингулярным начинает проявляться уже при умеренных частотах ($\nu \sim 10$).

2) методы решения СИУ пригодны для решения уравнений Фредгольма. Соответствующая система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \gamma_j k(x_\ell, \xi_j) = V_{y0}(x_\ell) - i w_q(x_\ell), \quad (4.2)$$

$$\ell = 1, \dots, n - 1,$$

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j = 0, \quad x_\ell = -1 + \frac{4\ell - 1}{2n - 1},$$

$$\xi_j = -1 + \frac{4j - 3}{2n - 1}.$$

При применении квадратур наивысшей алгебраической степени точности [19] система (4.2) заменяется системой

$$\frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j k(x_\ell, \xi_j) = V_{y0}(x_\ell) - i w_q(x_\ell),$$

$$\ell = 1, \dots, n - 1,$$

$$\sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j = 0, \quad \tilde{\gamma}_j = \gamma \sin \theta_j,$$

$$\theta_j = \pi \left(1 - \frac{2j - 1}{2n} \right),$$

$$\xi_j = \cos \theta_j, \quad x_\ell = \cos \varphi_\ell, \quad \varphi_\ell = \pi \left(1 - \frac{\ell}{n} \right).$$

После решения интегрального уравнения (4.1) находим распределение избыточного гидродинамического давления $p(x)$, прогибы пластины $w(x)$, изгибающий момент $M(x)$ и перерезывающую силу $N(x)$, действующие на пластину

$$\begin{aligned}
 p(x) &= i \int_{-1}^x \gamma(\xi) d\xi, \\
 w(x) &= i \left[\int_{-1}^1 \gamma(\xi) k_h(x - \xi) ds - V_{y0}(x) \right], \\
 \frac{2m\mu^2}{a^2 i} M(x) &= \int_{-1}^x \gamma(\xi) U(\mu(x - \xi)) d\xi - \\
 &\quad - \frac{2U[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) A_\gamma(\mu, \xi) d\xi + \\
 &\quad + \frac{2V[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) B_\gamma(\mu, \xi) d\xi - \\
 &\quad - i\mu \left\{ \int_{-1}^x q(\xi) T(\mu(x - \xi)) d\xi - \right. \\
 &\quad - \frac{2U[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} q(\xi) A_q(\mu, \xi) d\xi + \\
 &\quad \left. + \frac{2V[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} q(\xi) B_q(\mu, \xi) d\xi \right\}, \\
 \frac{2m\mu}{ai} N(x) &= \int_{-1}^x \gamma(\xi) T(\mu(x - \xi)) d\xi - \\
 &\quad - \frac{2T[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) A_\gamma(\mu, \xi) d\xi - \\
 &\quad - \frac{2U[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) B_\gamma(\mu, \xi) d\xi - \\
 &\quad - i\mu \left\{ \int_{-1}^x q(\xi) S(\mu(x - \xi)) d\xi - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2T[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} q(\xi) A_q(\mu, \xi) d\xi - \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{2U[\mu(x + 1)]}{C(\mu)} \int_{-1}^{+1} q(\xi) B_q(\mu, \xi) d\xi \right\}.$$

Представляют также интерес суммарные характеристики

$$\begin{aligned}
 c_n &= \int_{-1}^1 p(x) dx = - \int_{-1}^1 \xi \gamma(\xi) d\xi, \\
 c_m &= \int_{-1}^1 x p(x) dx = - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi^2 \gamma(\xi) d\xi,
 \end{aligned}$$

а также средние симметричные и антисимметричные смещения пластины

$$w_s = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 w(x) dx, \quad w_{as} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sign}(x) w(x) dx.$$

Интегралы, содержащие $\gamma(\xi)$, при применении МДВ заменяются интегральными суммами по формуле прямоугольников, а от заданной функции нагрузки $q(\xi)$ — вычисляются аналитически или численно по формулам приближенных квадратур более высокого порядка точности.

Применение квадратур с распределением узлов квадратурной формулы и точек коллокации по закону косинуса приводит к незначительному изменению расчетных формул и изменению результатов на доли процентов [21].

В качестве контроля построенного решения гидродинамической задачи приведем графики зависимости коэффициентов отражения r и прохождения t поверхностных волн от приведенной частоты (рис. 1а), а также коэффициентов нормальной силы c_n и момента гидродинамических сил c_m (рис. 1б), действующих на пластину при относительной глубине канала $h = \frac{H}{a} = 0,22$, соответствующей эксперименту [5].

5. Анализ результатов

Расчеты проводились для пластины с параметрами: $E = 103$ МПа, $h_0 = 38$ мм, $d = 8,36$ мм, $a = 5$ м, $H = 1,1$ м, для которых имеются экспериментальные данные [5].

Здесь E — модуль объемной упругости, d — осадка пластины.

В этом случае $\mu = 10,68 \sqrt[4]{1 - mv}$, $m \approx 0,0016$.

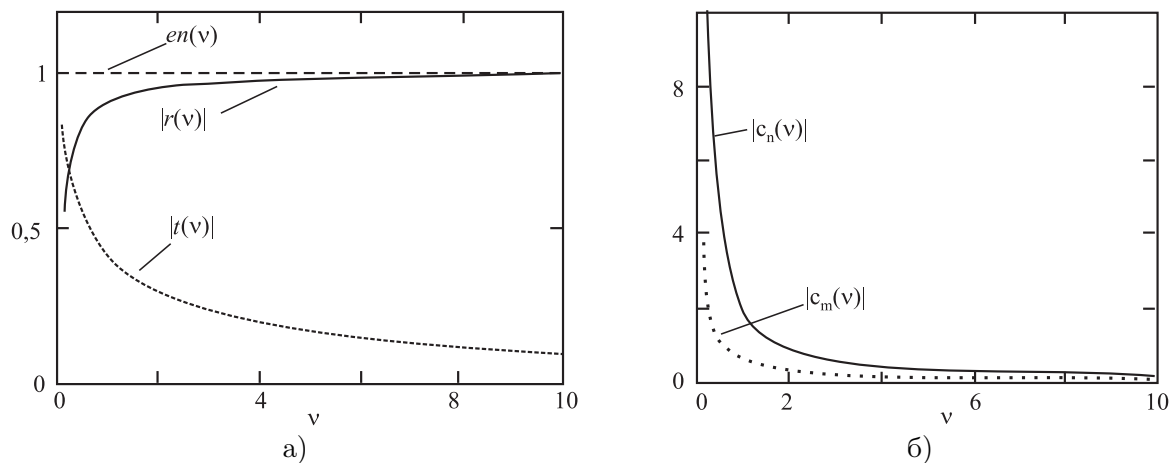


Рис. 1

Рассмотрим задачу дифракции. В этом случае, поскольку распространяющейся волной является только волна с волновым числом α_0 , должно выполняться классическое соотношение [14] закона сохранения энергии

$$en = |r|^2 + |t|^2 = 1,$$

$$r = -\frac{\nu^2}{\nu + h(\alpha_0^2 - \nu^2)} \int_{-1}^1 \gamma(\xi) e^{i\alpha_0 \xi} d\xi,$$

$$t = 1 + \frac{\nu^2}{\nu + h(\alpha_0^2 - \nu^2)} \int_{-1}^1 \gamma(\xi) e^{-i\alpha_0 \xi} d\xi.$$

В проведенных расчетах данное условие выполнялось точно (рис. 2).

На рис. 3 показано сравнение полученных численных результатов при $\nu = 41,06$ с экспериментальными данными [5].

Рис. 4 воспроизводит результаты расчетов при $\nu = 9,85$.

На рис. 5 дано сравнение результатов расчетов по «полной» теории данной работы (рис. 5а) и по приближению длинных волн (рис. 5б).

Следует отметить заметное различие в результатах вычислений по изложенной теории и расчетов [5] при малых частотах или больших периодах набегающих волн. Возможно, это связано с использованием в [5] при вычислениях прогибов и моментов суммирования рядов, в то время как в данной работе используется точное решение уравнения изгиба пластины на упругом основании.

Заключение

В работе реализован метод решения задачи гидроупругости для пластины, плавающей на свободной поверхности весомой жидкости, основанный на точном решении уравнения колебаний пластины. При этом учтено, что в большинстве практических случаев следует считать пластину лежащей на упругом основании. Это обстоятельство, а также отсутствие частот отсечки для поверхностных волн в слое несжимаемой весомой жидкости, видимо, практически исключают возможность появления изолированных бесконечных резонансов [22, 23] при рассматриваемых параметрах.

Литература

1. Squire V. Of ocean waves and sea-ice revisited // Gold Regions Science and Technology. 2007. Vol. 49. P. 110–133.
2. Chen Xu-jun, Wu You-sheng, Cui Wei-cheng, Jensen J. Juncher. Review of hydroelasticity theories for global response of marine structures // Ocean Engineering, 2006. Vol. 33. P. 439–457.
3. Watanabe E., Utsunomiya T., Wang C.M. Hydroelastic analysis of pontoon-type VLFS: a literature survey // Engineering Struct. 2004. Vol. 26. P. 245–256.
4. Andrianov A.I., Hermans A.J. Diffraction of surface waves by VLFP on Infinite, finite and shallow water. Proc. of the International Seminar Day on Diffraction. 2002. Saint Petersburg, P. 13–23.
5. Wu C., Watanabe E., Utsunomiya T. An eigenfunction expansion-matching method for analyzing the wave-induced responses of an elastic floating plate // Appl. Ocean Res. 1995. Vol. 17. No. 5. P. 301–310.

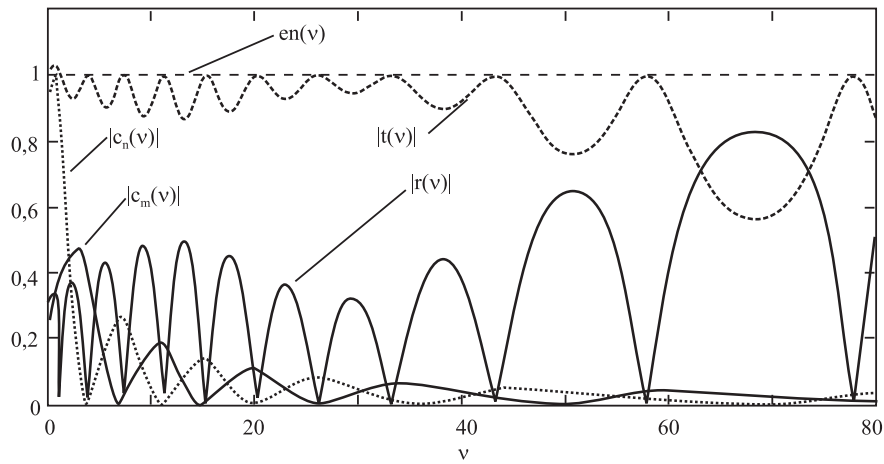


Рис. 2

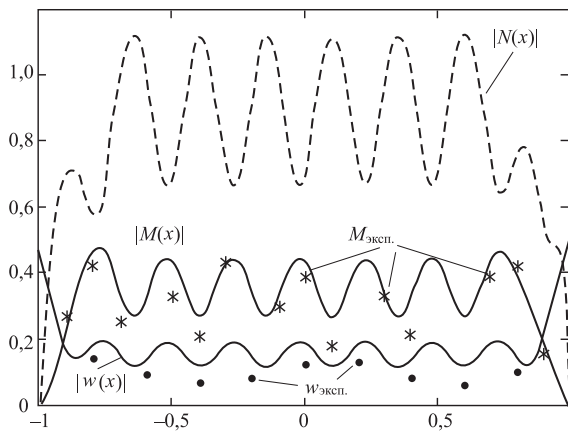


Рис. 3

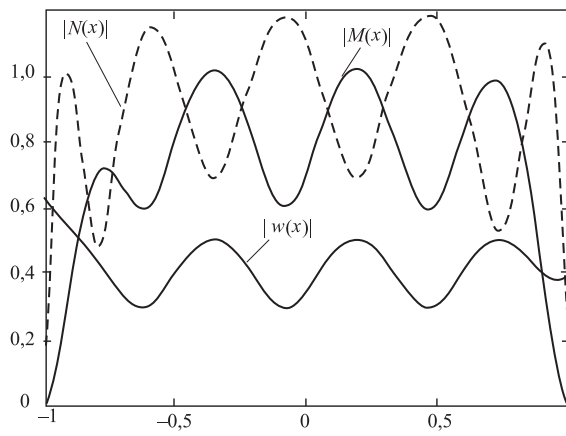
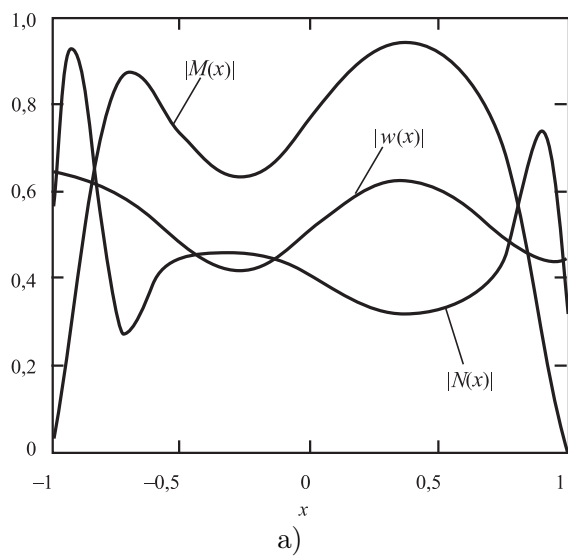
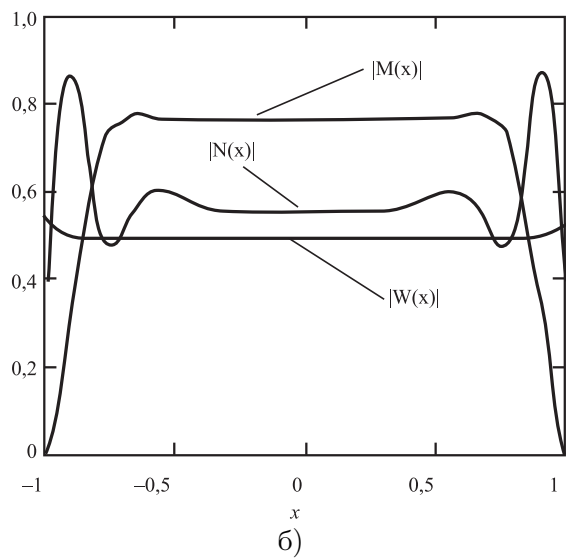


Рис. 4



а)



б)

Рис. 5

6. Коробкин А. А. Численное и асимптотическое исследование плоской задачи о гидроупругом поведении плавающей пластины на волнах // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 2. С. 90–96.
7. Стурова И. В. Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 75–86.
8. Хабазпашева Т. И. Связь гидродинамических и упругих параметров при дифракции поверхностных волн на плавающей пластине // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 101–110.
9. Ткачёва Л. А. Плоская задача о дифракции поверхностных волн на упругой плавающей пластине // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 3. С. 131–149.
10. Ткачёва Л. А. Воздействие периодической нагрузки на плавающую упругую пластину // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 2. С. 132–146.
11. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Иностран. лит., 1962. 279 с.
12. Кулешов А. А. О численном методе решения задачи поперечных колебаний тонких упругих пластин // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 4. С. 10–26.
13. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
14. Keller J. B., Weitz M. Reflection and transmission coefficients for waves entering or leaving an icefield // Commun. Pure Appl. Math. 1953. Vol. 6. P. 414–417.
15. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовитца и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.
16. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
17. Потетюнко Э. Н. Вибрация пластины на поверхности идеальной жидкости бесконечной глубины // ДАН. 1994. Т. 334. № 6. С. 712–715.
18. Келдыш М. В. Удар пластинки о воду конечной глубины // Труды ЦАГИ. 1935. Вып. 152. С. 13–20.
19. Тимошенко С. П., Войновски-Кригер С. А. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 636 с.
20. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.
21. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // В кн. «Численные методы решения диф. и инт. уравнений и квадратурные формулы». М.: Наука, 1964. С. 64–74.
22. Ворович И. И., Бабешко В. А., Прягина О. Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
23. Алексеев В. В., Индейцев Д. А., Мочалова Ю. А. Колебания упругой пластины, контактирующей со свободной поверхностью тяжелой жидкости // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 5. С. 15–21.

Ключевые слова: гидроупругие колебания, незакрепленная пластина, несжимаемая весомая жидкость.