

УДК 551.465.15

## ТУРБУЛЕНТНЫЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ВИНТ

Заволженский М. В.<sup>1</sup>

## A TURBULENT HYDRODYNAMIC SCREW

Zavolzhensky M. V.

The work describes the turbulent current of liquid in the vicinity (outside and inside) of two coaxial circular cylinders, which move forward with different constant linear velocities and rotate within regular intervals around the axis with different constant angular velocities. The problem about diffusion of a whirlwind in the liquid with isotropic turbulent resistance is solved. The Navier–Stokes equations with anisotropic turbulent resistance are used to model the whirlpool, which is formed in the liquid during expiration from an aperture. The problem concerning the stability of a hydrodynamic whirlpool is solved.

## 1. Напряжения Рейнольдса

В настоящее время для моделирования турбулентности используют вероятностные и статистические методы [1–3], методы математического эксперимента [4, 5] и методы напряжений Рейнольдса [6]. Последний метод не замкнут, не формализован и требует дополнительного экспериментального материала для определения напряжений Рейнольдса на основании гипотез, принимаемых авторами конкретного исследования. Строгих аналитических методов моделирования турбулентности в настоящее время не существует [7]. Обширный экспериментальный материал по исследованию турбулентных течений жидкости содержится в работе [8]. Дополнительную информацию о современных моделях турбулентных течений жидкости можно найти в [4, 9].

Для формализации метода напряжений Рейнольдса в настоящей работе используется гипотеза, согласно которой дивергенция тензора  $\mathbf{\Pi}$  напряжений Рейнольдса по принципу Галилея в первом приближении пропорциональна относительной скорости течения жидкости:  $\operatorname{div} \mathbf{\Pi} = \rho \kappa_{ij}(v_j - V_j)$ .  $V_j$  — составляющие вектора скорости сосуда или скорости жидкости на бесконечности,  $\kappa_{ij}$  — экспериментально определяемые компоненты тензора частот турбулентных сопротивлений,  $i, j = 1, 2, 3$ . После введения турбулентного сопротивления в уравнения Навье–Стокса, по-

следние превращаются в диссипативную систему, отягощённую анизотропным турбулентным сопротивлением. Свойства решений уравнений Навье–Стокса с турбулентным сопротивлением отличаются от свойств решений стандартных уравнений Навье–Стокса большей приближенностью решений к моделированию течений реальных жидкостей. На первый план выступают пограничные *слои и ядра* течений жидкостей. Переход от ламинарных течений ( $|\kappa_{ij}| < 1$ ) к течениям турбулентным связан с возникновением странных аттракторов и неустойчивых предельных циклов с диссипацией<sup>2</sup> энергии — этот процесс моделирует известное из наблюдений разрушение турбулентных флуктуаций со временем [1, 10]. Предлагаемый подход предпочтительнее классического, так как метод формализован, следовательно применим к моделированию любых течений и в качестве уточняемого решения при  $\kappa_{ij} \neq 0$  сразу выступают характеристики основного [1, 6] турбулентного потока. С учетом турбулентного сопротивления уравнения Навье–Стокса имеют вид [11–13]

$$v_{i,4} + v_i v_{i,j} = -\rho^{-1} p_{,i} + \nu v_{i,jj} - \kappa_{ij}(v_j - V_j) + f_i, \quad (1.1)$$

$$v_{i,i} = 0.$$

В уравнениях (1.1)  $\rho$  — плотность жидкости,  $p_{,i}$  — гидродинамическое давление,  $f_i$  —

<sup>1</sup>Заволженский Михаил Вадимович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Южного отдела ИВП РАН; e-mail: zavolzhensky@rambler.ru

<sup>2</sup>Доказательство опускается.

массовые силы. Заметим, что линейная аппроксимация тензора напряжений Рейнольдса постоянно используется в различных задачах атмосферы и океана [14], в том числе и для моделирования крупномасштабной турбулентности [15, 16]. Уравнения (1.1) используются в гидродинамике с 1987 г. [17].

## 2. Общий случай гидродинамического винта

В цилиндрических координатах  $(r, \theta, z)$  изучим установившееся винтовое течение жидкости в пространстве, вызванное движением в нем двух соосных круговых цилиндров равной длины с осью  $Oz$ . Длина цилиндров значительно превышает диаметры их поперечных сечений. Внутренний цилиндр движется вдоль оси  $Oz$  с постоянной скоростью  $V_1$  и вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ . Внешний цилиндр движется аналогично со скоростями  $V_2$  и  $\omega_2$ . Радиус внутреннего цилиндра равен  $a$ , внешнего —  $b$ . Радиальная скорость в течении равна нулю. Остальные характеристики зависят только от расстояния  $r$  от оси течения. Для описания течения используем уравнения (1.1) с изотропным турбулентным сопротивлением ( $\kappa_{ii} = \kappa > 0$ ,  $\kappa_{ij} = 0$ )

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \kappa (\mathbf{v} - \mathbf{V}),$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0.$$

Здесь  $\kappa$  — изотропное турбулентное сопротивление. Скорость  $\mathbf{V}$  на бесконечности в данном случае равна нулю, так как жидкость вдали от цилиндра неподвижна. Такие уравнения при условии прилипания жидкости к цилиндрам дают для определения азимутальной ( $v_\theta$ ) и осевой ( $v_z$ ) компонент скорости течения задачу

$$\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\theta}{dr} - \left( \frac{\kappa}{\nu} + \frac{1}{r^2} \right) v_\theta = 0; \quad (2.1)$$

$$v_\theta(a) = \omega_1 a, \quad v_\theta(b) = \omega_2 b,$$

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} - \frac{\kappa}{\nu} v_z = 0;$$

$$v_z(a) = V_1, \quad v_z(b) = V_2.$$

Давление определяется интегрированием по  $r$  центробежной инерции  $\rho v_\theta^2/r$ . Решение

задачи (2.1) выражается через функции Макдональда  $I_\nu(z)$  и  $K_\nu(z)$ . Для компонент скорости течения жидкости между цилиндрами находим

$$v_\theta = \frac{\omega_1 a}{D_1} \left[ K_1(\xi b) I_1(\xi r) - I_1(\xi b) K_1(\xi r) \right] + \frac{\omega_2 b}{D_1} \left[ K_1(\xi r) I_1(\xi a) - I_1(\xi r) K_1(\xi a) \right],$$

$$v_z = \frac{V_1}{D_0} \left[ K_0(\xi b) I_0(\xi r) - I_0(\xi b) K_0(\xi r) \right] + \frac{V_2}{D_0} \left[ K_0(\xi r) I_0(\xi a) - I_0(\xi r) K_0(\xi a) \right], \quad (2.2)$$

$$D_n = K_n(\xi b) I_n(\xi a) - K_n(\xi a) I_n(\xi b),$$

$$\xi = \sqrt{\kappa/\nu}, \quad n = 0, 1, \quad a \leq r \leq b.$$

Если течение жидкости происходит внутри одного цилиндра, который не вращается ( $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $V_1 = 0$ ), то  $v_\theta = 0$ . В таком случае, кроме решения (2.2), уравнения (2.1) допускают решение  $v_z = V_2$ ,  $p = p_0 - \rho \kappa V_2 z$ , т.е. турбулентное сопротивление в данном случае можно компенсировать перепадом давления так, что жидкость в трубе будет двигаться вместе с ней, как твердое тело.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

## 3. Турбулентное течение в скользящей трубе

Значения  $V_1 = 0$ ,  $a = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $V_2 = V$ , соответствуют установившемуся движению жидкости внутри круглого цилиндра, вызванному его поступательным перемещением вдоль своей оси с постоянной скоростью  $V$ ,

$$v_z = V I_0(\xi r) I_0^{-1}(\xi b), \quad v_\theta = 0; \quad (3.1)$$

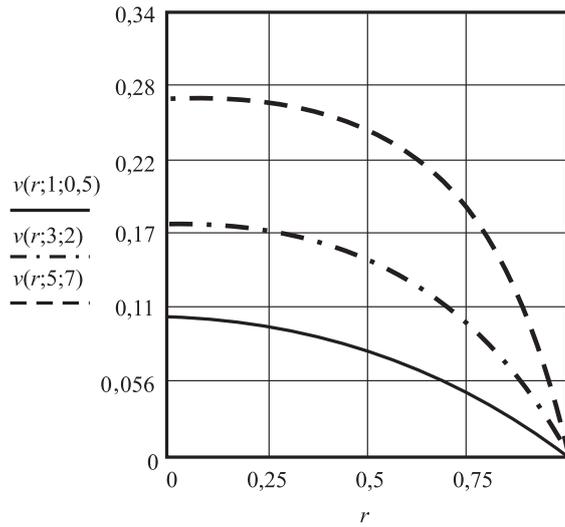
$$0 \leq r \leq b, \quad I_0^{-1}(z) = \frac{1}{I_0(z)}.$$

Течение (3.1) впервые рассматривается в гидромеханической литературе. Пусть

$$v = \frac{v_z}{V} = \frac{I_0(\lambda x)}{I_0(\lambda)}, \quad x = \frac{r}{b}, \quad \lambda = \xi b.$$

На рисунке изображено несколько профилей безразмерной скорости  $v$  течения (3.1) в зависимости от безразмерного расстояния  $x$  от оси трубы и турбулентного сопротивления  $\lambda$ .

Давление в потоке (3.1) постоянно. При  $\kappa = 0$  это решение описывает движение жидкости вместе с трубой, как твердого тела, при



Скорость турбулентного течения (снизу вверх) в движущейся трубе (поперечное сечение потока)

любой (сколь угодно малой) вязкости. При  $\kappa > 0$  жидкость отстаёт от трубы. На оси скорость (3.1) имеет

$$\min_r v_z = VI_0^{-1}(\xi b).$$

При больших радиусах трубы минимум мал. Внутри трубы образуется застойная зона, характерная для турбулентного течения [10]. В отличие от независящего от вязкости секундного расхода  $Q$  при движении вязкой жидкости в трубе, как твердого тела, секундный расход жидкости в течении (3.1)

$$Q = 2\pi\rho Vb\sqrt{\frac{\nu}{\kappa}}I_1(\xi b)I_0^{-1}(\xi b),$$

зависит от вязкости и исчезает при  $\nu = 0$  — труба скольжением невязкую жидкость не увлекает. Определим движение относительно трубы. Положим  $v_z = v_1 + V$ ,  $v_1$  — скорость в связанной с трубой системе. Тогда ( $V \neq 0$ ) для  $v_1$  из исходных уравнений получим граничную задачу

$$\nu \left( \frac{d^2 v_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_1}{dr} \right) - \kappa v_z = \kappa V;$$

$$v_1(b) = 0, \quad |v_1| < \infty \quad (0 \leq r \leq b).$$

Отсюда ( $p = \text{const}$ )

$$v_1 = V [1 - I_0(\xi r)I_0^{-1}(\xi b)], \quad (3.2)$$

$$0 \leq r \leq b.$$

По отношению к трубе жидкость отбрасывается в направлении, противоположном переносной скорости: профиль относительной скорости (3.2) служит дополнением профилю скорости абсолютного движения жидкости с трубой (3.1) до прямоугольника со сторонами  $V$  и  $b$ . Если на основании исходных уравнений решить задачу Пуазейля о движении жидкости в трубе под действием постоянного перепада давления, то профиль скорости жидкости относительно движущейся трубы совпадает с профилем скорости жидкости, текущей в такой же трубе под действием постоянного перепада давления, если градиент давления и скорость трубы связаны соотношением

$$(-dp/dz) = \rho\kappa V.$$

Поэтому, в отличие от вязкой жидкости без напряжений Рейнольдса, турбулентный поток обратим в том смысле, что вместо того, чтобы перемещать среду в трубе под действием постоянного перепада давления, можно соответствующим образом двигать трубу так, чтобы профиль скорости течения жидкости относительно трубы был в обоих случаях одинаков. Одинаковое действие ведет к одному и тому же следствию. Решение (3.1) задачи неединственно. При  $\kappa = 0$  решение (3.2) переходит в обычное движение вязкой жидкости с трубой, как твердого тела. Формула (3.1) описывает движение жидкости вдали от концов внутри длинной трубы без дна и крышки, перемещающейся вдоль своей оси в пространстве с жид-

<sup>3</sup>Рассматриваются одномерные течения вдали от концов длинных цилиндров. Поэтому на бесконечности по оси цилиндров жидкость неподвижна.

$R$	$\Lambda$	$\lambda$	$\zeta$	$R$	$\Lambda$	$\lambda$	$\zeta$
$2 \cdot 10^3$	0,0494	1,82	0,0066	$1 \cdot 10^5$	0,0180	13,9	0,0077
$5 \cdot 10^3$	0,03374	3,475	0,0097	$2 \cdot 10^5$	0,0156	18,7	0,0070
$6,25 \cdot 10^3$	0,0358	3,98	0,0101	$5 \cdot 10^5$	0,0131	27,6	0,0061
$7,50 \cdot 10^3$	0,03415	4,38	0,0102	$1 \cdot 10^6$	0,0116	37,1	0,0055
$8,75 \cdot 10^3$	0,0325	4,71	0,0101	$2 \cdot 10^6$	0,0104	50,0	0,0050
$1 \cdot 10^4$	0,0309	4,98	0,0099	$5 \cdot 10^6$	0,0090	75,0	0,0045
$2 \cdot 10^4$	0,0259	6,90	0,0095	$1 \cdot 10^7$	0,0081	101	0,0040
$2 \cdot 10^4$	0,0209	10,3	0,0085				

костью. В этом случае жидкость вдали от цилиндров неподвижна<sup>3</sup> и в уравнениях  $V = 0$ . Если жидкость находится в трубе, ограниченной дном и крышкой, а труба движется поступательно со скоростью  $\mathbf{V} = \text{const}$ , то уравнения имеют решение  $\mathbf{v} = \mathbf{V}$ . Жидкость движется с трубой, как твердое тело.

Заметим, что для экспериментального определения турбулентного сопротивления  $\kappa$  при течении жидкости в круглой трубе из формулы (3.2) определяем секундный расход  $Q$  жидкости через поперечное сечение трубы и вводим среднюю скорость  $\bar{v}$ , число Рейнольдса  $R$  и коэффициент сопротивления  $\Lambda$ :

$$Q = -\frac{\pi b^2 dp}{\kappa dz} \frac{I_2(\lambda)}{I_0(\lambda)}, \quad \lambda = \xi b,$$

$$R = \frac{2b\bar{v}}{\nu}, \quad \frac{\Lambda}{2b} \frac{\rho \bar{v}^2}{2} = -\frac{dp}{dz}, \quad \bar{v} = \frac{Q}{\pi \rho b^2}.$$

Эти величины связаны соотношением

$$\frac{64}{\Lambda R} = \frac{8}{\lambda^2} \frac{I_2(\lambda)}{I_0(\lambda)} = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda^2}{6} + O(\lambda^4), & \lambda \rightarrow 0, \\ \frac{8}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right), & \lambda \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.3)$$

которое служит для определения параметра  $\lambda$  (и, затем, турбулентного сопротивления  $\kappa$ ) для процесса течения жидкости в круглой трубе в зависимости от числа Рейнольдса. Действительно, зависимость коэффициента сопротивления  $\Lambda$  течению в круглой трубе от числа Рейнольдса хорошо известна из многочисленных экспериментов [10]. С другой стороны, функция параметра  $\lambda$  в правой части соотношения (3.3) монотонно убывает от единицы до нуля при увеличении  $\lambda$  от нуля до бесконечности. Доказательство опускаем. Поэтому при  $\Lambda R > 64$  уравнение (3.3) относительно  $\lambda$  имеет единственный корень, по которому

определяется частота  $\kappa$  при течении жидкости в круглой трубе. Неравенство  $\Lambda R > 64$  известно из экспериментов [10]. Случай  $\Lambda R = 64$  соответствует пуазейлевскому закону сопротивления течению в трубе. Ему отвечает нулевой корень уравнения (3.3). Это значит, что при ламинарном течении параметр  $\lambda$  в уравнении движения жидкости мал по сравнению с безразмерной вязкостью, т. е. с единицей. Точнее, для течения в круглой трубе из формулы (3.3) находим

$$\lambda = \sqrt{6 \left(1 - \frac{64}{\Lambda R}\right)}, \quad (\Lambda R \approx 64 + 0),$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\Lambda R}{8}} \quad (\Lambda R \gg 64).$$

Из формул (3.3), полагая  $\lambda^2 = \kappa b^2 / \nu$ , получаем ( $d$  — диаметр трубы)

$$\kappa = \zeta \frac{\bar{v}}{d}, \quad \zeta = \frac{4\lambda^2}{R} \quad (3.4)$$

$$\zeta = \frac{24}{R} \left(1 - \frac{64}{\Lambda R}\right) \quad (\Lambda R \approx 64 + 0),$$

$$\zeta = \frac{\Lambda}{8} \quad (\Lambda R \gg 64).$$

Промежуточные значения коэффициента  $\zeta$  в зависимости от числа Рейнольдса приведены в таблице. Первые два столбца таблицы иллюстрируют известную из экспериментов [10] связь коэффициента сопротивления  $\Lambda$  с числом Рейнольдса  $R$  для гладких круглых труб. В третьем столбце помещён корень  $\lambda$  уравнения (3.3). При определении максимального значения  $\zeta$  экспериментальная зависимость  $\Lambda$  от  $R$  [10] подвергалась линейной интерполяции.

Из таблицы (продолженной до малых чисел Рейнольдса) и из формул (3.4) следует,

что частота  $\kappa$  обращается в ноль при  $R \rightarrow 0$  ( $\bar{v} \rightarrow 0$ ) и при  $R \rightarrow \infty$  ( $\bar{v} \rightarrow \infty$ ).

Определение (3.4) частоты  $\kappa$  корректно только для гладких круглых труб. В общем случае коэффициент турбулентного сопротивления определяется не только внешним воздействием на поток (числом Рейнольдса), но и теми условиями, в которых происходит движение жидкости. Параметр  $\lambda$  следует находить из аналогичных (3.3) уравнений, составленных теоретически для исследуемого течения, на основе экспериментального определения соответствующего коэффициента сопротивления той или иной безразмерной характеристики потока (например, коэффициент подъёмной силы) в зависимости от числа Рейнольдса.

Соотношения (3.4) применительно к произвольным течениям жидкости должны рассматриваться только как грубые качественные оценки, например,  $\kappa = \zeta V/L$ , где  $L$  — характерный размер,  $V$  — характерная скорость рассматриваемого потока. Порядок безразмерного коэффициента  $\zeta$  определяется в каждой конкретной задаче числом Рейнольдса и условиями, в которых происходит течение жидкости.

После определения турбулентного сопротивления  $\kappa$  по формуле (3.4) и по таблице (для зависимости  $\zeta = \zeta(R)$ ), приведённый способ определения коэффициента сопротивления  $\Lambda$  течению жидкости в гладких круглых трубах в зависимости от числа Рейнольдса  $R$  на основе формулы (3.3) получен значительно проще, чем логарифмический закон сопротивления Прандтля, который больше основан на интуиции исследователя, чем на физике явления. Результат Прандтля до построения таблицы был необходим в гидравлике, но не в фундаментальных исследованиях турбулентных течений жидкости.

#### 4. Турбулентное течение вне скользящей трубы

Для установившегося движения жидкости вне трубы, вызванного ее поступательным скольжением вдоль своей оси со скоростью  $V$

$$\begin{aligned} V_2 = 0, \quad b = \infty, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad V_1 = V, \\ v_z = V K_0(\xi r) K_0^{-1}(\xi a), \quad (4.1) \\ v_\theta = 0; \quad 0 \leq a \leq \infty. \end{aligned}$$

При  $\kappa = 0$  это — движение всего пространства с вязкой жидкостью вне трубы вместе с

трубой, как твердого тела, с бесконечным расходом через поперечное сечение потока. При  $\kappa > 0$  течение экспоненциально исчезает с удалением от цилиндра. Вдали от цилиндра образуется застойная зона, у его поверхности — погранслои. Расход через поперечное сечение потока конечен и зависит от вязкости

$$Q = 2\pi\rho V a \sqrt{\frac{\nu}{\kappa}} K_1(\xi a) K_0^{-1}(\xi a).$$

При  $\nu = 0$  погранслои на цилиндре схлопываются и движется одна труба, оставляя в покое все невязкое жидкое пространство. Перейдя в (4.1) к относительному движению, получим решение задачи о продольном обтекании кругового цилиндра установившимся потоком со скоростью  $V$  на бесконечности, параллельной его образующим

$$v_z = V [1 - K_0(\xi r) K_0^{-1}(\xi a)].$$

При малых вязкостях  $\nu$  ( $\kappa \neq 0$ ) у цилиндра имеет место экспоненциально исчезающий с удалением от поверхности цилиндра погранслои. В остальной области течения (ядро) скорость практически постоянна и равна  $V$ . С точки зрения модели Навье-Стокса без напряжений Рейнольдса задача об установившемся продольном обтекании бесконечного цилиндра решения не имеет. Случай  $\kappa = 0$  означал бы отсутствие в окрестности цилиндра относительной скорости ( $v_z = 0$ ), т.е. описывал бы движение жидкости вместе с цилиндром как твердого тела. Такое описание неверно, так как никто еще не наблюдал, чтобы тело увлекало за собой жидкость таким образом, что сама жидкость движется как твердое тело [10]. Движение жидкости как твердого тела — исключительное явление, которое редко реализуется в природе и технике. Но уравнения Навье-Стокса как раз и записаны в окрестности твердотельного движения жидкости в том смысле, что такое движение описывается уравнениями Навье-Стокса всякий раз, когда это допускают граничные условия. В этом смысле уравнения с турбулентным сопротивлением точнее. Определим силу, действующую на единицу длины кругового цилиндра при его продольном обтекании (или, что то же, силу, препятствующую продольному движению единицы длины цилиндра в жидкости вдоль оси). На поверхности цилиндра действуют касательные напряжения  $p_{rz} = \mu(\partial v_z / \partial r)_{r=a}$  — на внутреннюю поверхность цилиндра и  $p_{rz} = -\mu(\partial v_z / \partial r)_{r=a}$  — на наружную поверхность. Вводя сюда  $v_z$  из (3.1) и (4.1) и интегрируя по поверхности единицы

длины цилиндра ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $ds = a d\theta$ ), получим, что изнутри движению единицы длины цилиндра препятствует сила

$$P_1 = 2\pi\rho Va\sqrt{\kappa\nu}I_1(\xi a)I_0^{-1}(\xi a),$$

а снаружи цилиндра — сила

$$P_2 = 2\pi\rho Va\sqrt{\kappa\nu}K_1(\xi a)K_0^{-1}(\xi a).$$

Общая сила, препятствующая движению в жидкости единицы длины открытого кругового цилиндра вдоль его оси,

$$P_1 + P_2 = 2\pi\mu VI_0^{-1}(\xi a)K_0^{-1}(\xi a).$$

В сильно вязких жидкостях  $P_1 + P_2 \sim \frac{\nu}{\ln \nu}$  ( $\nu \rightarrow \infty$ ). Сильно вязкая среда оказывает значительное сопротивление перемещению в ней цилиндра вдоль оси. В маловязких средах ( $\nu \rightarrow 0$ ) сила сопротивления движению цилиндра в жидкости убывает пропорционально  $\nu^{1/2}$ :  $P = 4\pi\rho Va\sqrt{\kappa\nu}$ ,  $\nu \rightarrow 0$ . При  $\nu = 0$  идеальная жидкость не оказывает силового воздействия на цилиндр. На основе обычных ( $\Pi = 0$ ) уравнений Навье-Стокса описать силу  $P$  сопротивления продольному установившемуся движению нельзя, так как обычная вязкая среда во всем пространстве движется вместе с цилиндром как твердое тело и не оказывает на него никакого воздействия. При больших значениях параметра  $\lambda = \xi a$  на движущийся в жидкости цилиндр действуют практически одинаковые силы сопротивления изнутри и снаружи:  $P_1 = P_2 = 2\pi\rho Va\sqrt{\kappa\nu}$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ . Аналогичное утверждение имеет место и относительно расхода:  $Q_1 = Q_2 = 2\pi\rho Va\sqrt{\nu/\kappa}$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ . Это значит, что в развитом турбулентном потоке цилиндр снаружи и изнутри увлекает за собой практически одинаковое количество жидкости. Это объясняется тем, что в развитых турбулентных потоках основные явления происходят в погранслоях, а не в застойных зонах и в ядрах течений [10]. В развитых турбулентных потоках погранслои сосредоточены у поверхности, и снаружи и внутри практически одинаковы (см. (4.1) и (3.1)). В этих слоях и происходит увлечение жидкости как внутри, так и снаружи цилиндра.

## 5. Течение внутри вращающейся трубы

$a = 0$ ,  $V_1 = V_2 = 0$ ,  $\omega_2 = \omega$  соответствуют движению жидкости внутри цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси,

$$v_\theta = \omega b I_1(\xi r) I_1^{-1}(\xi b), \quad (5.1)$$

$$v_z = 0, \quad 0 \leq r \leq b.$$

При  $\kappa = 0$  скорость  $v_\theta = 0$  — вязкая жидкость при любой, даже сколь угодно малой вязкости, вращается вместе с цилиндром, как твердое тело. При  $\kappa > 0$  у оси вращающегося цилиндра образуется застойная зона, которая расширяется с увеличением  $\kappa$  и уменьшением  $\nu$ , и при больших  $\kappa$  и (или) при малых  $\nu$  в движение вовлекается только узкий погранслои у стенки цилиндра. Такая картина характерна для турбулентного течения вращающейся жидкости [18]. При  $\nu = 0$  вращается один цилиндр. Идеальная жидкость внутри цилиндра остается в покое и не ощущает касательного азимутального влияния стенок. В отличие от простой вязкой модели, согласно которой не требуется приложения момента для равномерного вращения цилиндра с жидкостью [6], силы трения в жидкости, вращающейся по закону (5.1), за счет напряжений Рейнольдса передают на единицу длины этого цилиндра момент

$$M = 4\pi\mu\omega b^2 \left[ \frac{1}{2} \xi b I_0(\xi b) I_1^{-1}(\xi b) - 1 \right]. \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что придать затопленному в жидкость цилиндру заданную угловую скорость тем труднее, чем больше радиус цилиндра и вязкость заполняющей цилиндр жидкости. Увеличение турбулентного сопротивления  $\kappa$  тоже затрудняет вращение цилиндра. При  $\kappa = 0$  момент (5.2) равен нулю в соответствии с моделью обычной ( $\kappa = 0$ ) вязкой жидкости (так как  $I_0(0) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot I_1^{-1}(x) = 2$ ). При  $\nu = 0$  момент  $M = 0$  в соответствии с моделью идеальной жидкости, не ощущающей касательного воздействия (вращения). Выражение (5.1) описывает движение жидкости внутри открытого с двух сторон вращающегося цилиндра, затопленного в жидкость, неподвижную на бесконечности или в длинном цилиндрическом сосуде с неподвижными дном и крышкой и равномерно вращающейся боковой поверхностью. В последнем случае вблизи дна и крышки скорость жидкости равна нулю, и сосуд, в котором происходит движение жидкости, следует считать неподвижным (в исходных уравнениях  $\mathbf{V} = 0$ ). Если дно и крышка емкости вращаются вместе с боковой поверхностью с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , то скорость сосуда  $\mathbf{V} = \omega \times \mathbf{r}$ , и уравнения имеют решение  $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ . Жидкость вращается вместе с сосудом, как твердое тело. Подсчитаем секундный расход жидкости  $Q$  в течении

(5.1) через единицу длины продольной плоскости течения жидкости

$$Q = \rho \int_0^b v_\theta dr = \rho \omega b \xi^{-1} [I_0(\xi b) - 1] I_1^{-1}(\xi b).$$

При  $\kappa = 0$  расход равен  $\rho \omega b^2/2$  и совпадает с расходом жидкости при ее вращении вместе с цилиндром, как твердого тела. При  $\nu = 0$  (или  $\kappa = \infty$ )  $Q = 0$ . Это означает, что идеальная жидкость не ощущает азимутального касательного влияния вращающегося цилиндра.

## 6. Течение вне вращающейся трубы

$b = \infty$ ,  $V_1 = V_2 = 0$ ,  $\omega_1 = \omega$  соответствуют погранслою течения жидкости в окрестности наружной поверхности кругового цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси,

$$v_\theta = \omega a K_1(\xi r) K_1^{-1}(\xi a), \quad (6.1)$$

$$v_z = 0; \quad a \leq r \leq \infty.$$

Вязкая жидкость без учета напряжения Рейнольдса ( $\kappa = 0$ ) в таких условиях движется по закону  $v_\theta = \omega a^2/r$  [6]. Это не зависящее от вязкости безвихревое течение, исчезающее на бесконечности по степенному закону. При  $\kappa > 0$  течение (6.1) вихревое в каждой точке и экспоненциально исчезает с удалением от цилиндра. При больших  $\kappa$  или при малых  $\nu$  в движение вовлекается только узкий погранслой у цилиндра. При  $\nu = 0$  вращается один цилиндр, а жидкость неподвижна. Для вращения цилиндра в жидкости по закону (6.1) к единице длины цилиндра нужно прикладывать вращающий момент

$$M = 4\pi\mu\omega a^2 \left[ \frac{1}{2} \xi a K_0(\xi a) K_1^{-1}(\xi a) + 1 \right]. \quad (6.2)$$

Свойства этого момента аналогичны свойствам момента (5.2). При  $\kappa = 0$  получается выражение, соответствующее обычной вязкой модели жидкости без турбулентного сопротивления [6]. При  $\xi a \rightarrow \infty$  момент становится пропорциональным не квадрату, а кубу радиуса поперечного сечения цилиндра и не самой вязкости жидкости, а ее квадратному корню. Отличием течения (6.1) от безвихревого является то, что в единицу времени через единицу длины вдоль оси  $Oz$  сечения  $\theta = \text{const}$  потока

перемещается не бесконечное, а ограниченное количество жидкости

$$Q = \rho \int_a^\infty v_\theta dr = \rho \omega a \xi^{-1} K_0(\xi a) K_1^{-1}(\xi a).$$

При  $\xi \rightarrow 0$  ( $\nu \rightarrow \infty$ ) расход имеет логарифмический рост.

При  $\xi \rightarrow \infty$  ( $\nu \rightarrow 0$  или  $\kappa \rightarrow \infty$ ) расход идеальной жидкости исчезает. Из (5.2) и (6.2) вытекает, что если открытый круглый длинный цилиндр затоплен в жидкость, то для его вращения вокруг оси к единице длины нужно прикладывать момент

$$M = 2\pi\mu\omega a^2 I_1(\xi a) K_1^{-1}(\xi a).$$

В общем случае линии тока течения (2.2) определяются общим интегралом системы уравнений  $dr/v_r = r d\theta/v_\theta = dz/v_z$ , из которой  $r = C$ ,  $\theta = z v_\theta(r)/(r v_z(r)) + C_1$ , где  $C$ ,  $C_1 = \text{const}$ . Это — винтовые линии на цилиндрах  $r = C$ ,  $a < C < b$ . При  $\kappa = 0$  течение (2.2) переходит в не зависящее от вязкости течение вязкой жидкости без турбулентного сопротивления. При  $\kappa > 0$  течение (2.2) существенно зависит от вязкости. При  $\nu = 0$  движутся одни цилиндры, течение жидкости отсутствует, как и должно быть, ибо идеальная жидкость не реагирует на касательное воздействие. При больших  $\kappa$  асимптотика винта (2.2) имеет вид

$$v_\theta \sim \frac{\omega_1 a^2 \text{sh}[(b-r)\xi] + \omega_2 b^2 \text{sh}[(r-a)\xi]}{r \text{sh}[(b-a)\xi]},$$

$$\lambda = \xi a \gg 1,$$

$$v_z \sim \frac{V_1 a \text{sh}[(b-r)\xi] + V_2 b \text{sh}[(r-a)\xi]}{r \text{sh}[(b-a)\xi]},$$

$$a \leq r \leq b.$$

Отсюда следует, что при больших частотах  $\kappa$  или при малых вязкостях  $\nu$  в движение вовлекаются только узкие погранслои у поверхностей цилиндров. Эти слои имеют винтовой характер. Известны фотографии таких слоев [10, 18]. Остальная часть жидкости практически неподвижна. Происходит характерное для турбулентного потока выравнивание основной статистически средней скорости потока в его ядре [10, 18]. Сказанное относится и к предельным случаям  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $V_1 = V_2 = 0$  равномерного вращения цилиндров вокруг их общей оси с одинаковой угловой скоростью и  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $V_1 = V_2$  равномерного поступательного движения цилиндров вдоль общей оси с одинаковой линейной скоростью.

В первом случае, в отличие от классического, движение жидкости не является вращением с цилиндрами, как твердого тела, во втором — жидкость не движется с цилиндрами, как твердое тело, поступательно. И в том и в другом случаях между цилиндрами образуется застойная зона.

## 7. Турбулентная диффузия вихря

Как пример неустановившегося течения, описываемого уравнениями (1.1), решим осесимметричную задачу о диффузии вихря в жидкости — изучим влияние турбулентного сопротивления на вихревую нить с циркуляцией  $\Gamma$  [6]

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (t = 0), \quad (7.1)$$

расположенную в начальный момент по оси  $Oz$  жидкого пространства в прежних координатах. Исходные уравнения при  $\mathbf{V} = 0$  для описания течения при  $t > 0$  сводятся к задаче

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) - \kappa v_\theta$$

при начальном условии (7.1) и при исчезновении течения вдали от нити при  $r \rightarrow \infty$ . Эта задача решается средствами операционного исчисления

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right] e^{-\kappa t}. \quad (7.2)$$

Завихренность  $\Omega$  такого течения

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t} - \kappa t\right). \quad (7.3)$$

Из (7.2) и (7.3) следует, что турбулентное сопротивление на обычную вязкую диффузию вихря [6] накладывает его экспоненциальное затухание со временем в каждой точке пространства. На фиксированном цилиндре  $r = \text{const}$  вихрь возрастает со временем от нуля при  $t = 0$  до максимума

$$\Omega_{max} = \frac{\Gamma(1 + \lambda_*)}{2\pi r^2} e^{-\lambda_*}, \quad \lambda_* = \sqrt{1 + \xi^2}, \quad (7.4)$$

который достигается в момент  $t_* = \frac{\lambda_* - 1}{2\kappa}$ , а затем, при  $t \rightarrow \infty$  убывает до нуля. При  $\kappa = 0$  формулы (7.4) переходят в известные [6] для

вязкой жидкости:  $\Omega_{max} = \frac{\Gamma}{\pi e r^2}$ ,  $t_* = \frac{r^2}{4\nu}$ . При больших  $\kappa$

$$\Omega_{max} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \xi \exp(-\xi r),$$

$$t_* = \frac{r}{2\sqrt{\kappa\nu}}, \quad \lambda = \xi r \rightarrow \infty.$$

Вместо не зависящего от вязкости степенного (вдали от нити) затухания максимальной завихренности в данном месте в вязкой жидкости среда с турбулентным сопротивлением гасит вихри экспоненциально. Затухание максимальной завихренности зависит от вязкости: она убывает как при увеличении вязкости ( $\nu \rightarrow \infty$ ), так и при ее уменьшении ( $\nu \rightarrow 0$ ), причем в маловязких жидкостях максимальная завихренность убывает с уменьшением вязкости значительно быстрее, чем в сильно вязких средах при увеличении вязкости. Время для достижения максимальной завихренности в данном месте пространства пропорционально первой (а не второй, как в случае вязкой жидкости) степени расстояния от источника. На достаточном расстоянии от вихревой нити вихри в среде с турбулентным сопротивлением распространяются и гаснут быстрее, чем в обычной вязкой среде. Наоборот, вблизи от источника завихренности за счет малости  $r$  вихри распространяются медленнее. Среда с турбулентным сопротивлением обладает способностью быстрее и интенсивнее, чем обычная вязкая жидкость, выравнивать завихренность внутри потока (вдали от источника) и тормозить процесс ее выравнивания в окрестности источника вихрей. Ранее, на примере течения жидкости вне вращающегося цилиндра уже было показано, что вблизи стенок вихреобразующая способность среды при  $\kappa \neq 0$  выше, чем у обычной вязкой жидкости

## 8. Гидродинамическая воронка

Последний пример винтового течения — описание воронок на поверхности жидкости. Воронка, образуемая при истечении из отверстия в поле силы тяжести, при некотором удалении от горизонтальной поверхности и от расположенной в глубине вершины воронки, имеет форму цилиндра. Если глубина жидкости велика, то радиус  $a$  такого цилиндра длительное время (по отношению к времени истечения) практически не меняется, а течение у воронки установившееся и осесимметричное. В рассматриваемом слое жидкости в

окрестности цилиндрического участка поверхности воронки<sup>4</sup> гидродинамические характеристики течения зависят только от расстояния  $r$  от оси цилиндра-воронки. Тогда из уравнения неразрывности  $d(rv_r)/dr = 0$  и из кинематического условия на поверхности воронки  $r = a = \text{const}$ , которое принимает вид  $v_r = 0$  при  $r = a$ , вытекает, что  $v_r = 0$  во всем слое. Это значит, что радиальный дрейф к воронке значительно слабее азимутального и осевого течения в ее окрестности, что соответствует наблюдениям. Используем цилиндрические координаты  $(r, \theta, z)$ , в которых  $Oz$  направлена против силы тяжести  $\mathbf{g}$ . Для описания течения жидкости в окрестности воронки исходим из установившегося варианта уравнений Навье-Стокса с анизотропным турбулентным сопротивлением (1.1). Из этих уравнений на основе изложенных выше предположений о характере течения для описания его гидромеханических характеристик имеем уравнения

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \kappa_{r\theta} v_\theta - \kappa_{rz} v_z,$$

$$0 = \nu \left( \frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) - \kappa_{\theta\theta} v_\theta - \kappa_{z\theta} v_z, \quad (8.1)$$

$$0 = \nu \left( \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) - \kappa_{r\theta} v_\theta - \kappa_{zr} v_z - g.$$

При этом считаем, что

$$\kappa_{z\theta} = \kappa_{\theta z}, \quad \kappa_{\theta\theta} = \kappa_{zz}. \quad (8.2)$$

Граничные условия для системы (8.1) состоят в том, что на поверхности воронки  $r = a$  нормальные напряжения равны атмосферному давлению, а касательные отсутствуют

$$p = p_0 = \text{const},$$

$$\frac{dv_\theta}{dr} = v_\theta, \quad \frac{dv_z}{dr} = 0 \quad (r = a), \quad (8.3)$$

кроме того, принимаются условия ограниченности скоростей вдали от воронки

$$v_\theta = c'_1, \quad v_z = c'_2 \quad \text{при } r = \infty.$$

Постоянные  $c'_1$  и  $c'_2$  должны быть определены в процессе решения задачи. Радиус воронки  $a$  заранее не известен и в общем случае должен определяться заданным количеством

жидкости, которое пропускает сток в единицу времени. В принятой постановке не учитывается влияние вертикальных стенок емкости, объем жидкости бесконечен и расход задавать нельзя. Радиус воронки считается известным. В такой постановке диаметр емкости намного больше диаметра стока, а модель (8.1)–(8.3) пригодна для описания течения вдали от вершины воронки, от стенок емкости и от горизонтальной поверхности жидкости.

Из (8.1) и (8.3) интегрированием находим давление, которое не выписываем, так как ниже оно не требуется.

Особенность задачи состоит в том, что, несмотря на потенциальность внешней силы тяжести, ее нельзя включить в давление из-за условия (8.3) для нормальных напряжений на поверхности воронки. В данном процессе тяжесть — основной внешний динамический фактор, формирующий поле скоростей в окрестности воронки, ускорение  $g$  должно быть определяющим в выборе масштаба скорости течения

$$x = r \sqrt{\frac{\kappa_{zz}}{\nu}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\kappa_{zz} a^2}{\nu}},$$

$$\varepsilon = \frac{\kappa_{z\theta}}{\kappa_{zz}}, \quad v_z = \frac{g}{\kappa_{zz}} w(x), \quad (8.4)$$

$$v_\theta = \varepsilon \frac{g}{\kappa_{zz}} v(z).$$

В этих переменных соотношения (8.1)–(8.4) для определения  $w$  и  $v$  дают граничную задачу

$$v'' + \frac{v'}{x} - \frac{v}{x^2} - v = w,$$

$$w'' + \frac{w'}{x} - w = 1 + \varepsilon^2 v, \quad (8.5)$$

$$\lambda v' = v, \quad w' = 0 \quad (x = \lambda),$$

$$v = c_1, \quad w = c_2 \quad (x = \infty)$$

(скорости  $c_1$  и  $c_2$  при  $x \rightarrow \infty$  подлежат определению). Штрихом обозначена производная по  $x$ . Полагаем

$$v = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} + \psi(x),$$

$$w = -\frac{1}{1 - \varepsilon^2} + \varepsilon^2 \varphi(x). \quad (8.6)$$

<sup>4</sup>Течение в окрестности конической вершины воронки описано в [21] на основе точного решения классических уравнений Навье-Стокса.

Тогда соотношения (8.5) для определения функций  $\psi$  и  $\varphi$  дают

$$\psi'' + \frac{\psi'}{x} - \frac{\psi}{x^2} - \psi = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)x^2} + \varepsilon^2\varphi, \quad (8.7)$$

$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{x} - \varphi = \psi,$$

$$\lambda\psi' = \psi + \frac{1}{1-\varepsilon^2},$$

$$\varphi' = 0 \quad (x = \lambda), \quad \varphi = \psi = 0 \quad (x = \infty),$$

$$c_2 = -c_1 = \frac{1}{1-\varepsilon^2}.$$

Считаем, что лобовое турбулентное сопротивление превосходит касательное:  $\varepsilon^2 \ll 1$ . Тогда формулы (8.6) с учетом (8.4) означают, что вдали от воронки жидкость равномерно опускается с постоянной скоростью  $v_z = -g/\kappa_{zz}$  и совершает азимутальный дрейф с постоянной скоростью  $v_\theta = \varepsilon g/\kappa_{zz}$ . Вблизи воронки возмущения  $\psi$  на вращение имеют тот же порядок, что и само вращение ( $\sim \varepsilon$ ). Вблизи воронки они интенсивнее возмущений равномерного поступательного опускания жидкости у воронки ( $\sim \varepsilon^2$  по сравнению с единицей). Все это соответствует наблюдениям — равномерному опусканию и слабому вращению жидкости вдали от воронки и такому же опусканию при интенсивном вращении у ее поверхности (у этой поверхности жидкость опускается по винтовым линиям с малым шагом). Решение задачи (8.7) ищем в виде рядов по степеням  $\varepsilon^2$ . Для нулевых членов рядов получаем следующие уравнения и граничные условия:

$$\psi'' + \frac{\psi'}{x} - \frac{\psi}{x^2} - \psi = \frac{1}{x^2}, \quad \varphi'' + \frac{\varphi'}{x} - \varphi = \psi,$$

$$\lambda\psi'(\lambda) = \psi(\lambda) + 1,$$

$$\varphi'(\lambda) = \psi(\infty) = \varphi(\infty) = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \psi = & \int_{\lambda}^x [I_1(x)K_1(t) - I_1(t)K_1(x)] \frac{dt}{t} - \\ & - \frac{I_2(\lambda)K_1(x) + I_1(x)K_2(\lambda)}{K_2(\lambda)} \times \\ & \times \int_{\lambda}^{\infty} K_1(t) \frac{dt}{t} - \frac{K_1(x)}{\lambda K_2(\lambda)}, \quad (8.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \int_{\lambda}^x t[I_0(x)K_0(t) - I_0(t)K_0(x)]\psi(t)dt - \\ & - \frac{I_1(\lambda)K_0(x) + I_0(x)K_1(\lambda)}{K_1(\lambda)} \times \\ & \times \int_{\lambda}^{\infty} t\psi(t)K_0(t)dt. \quad (8.9) \end{aligned}$$

Из-за практически равномерного (при малых  $\varepsilon$ ) опускания жидкости и дифференцированного вращения в зависимости от  $x$ , в (8.8), (8.9) сначала исследуем величину  $\psi(\lambda)$ , характеризующую вращение в окрестности воронки  $x = \lambda$ , ибо вращение вдали от воронки описывается, с учетом  $\psi(\infty) = 0$ , соотношениями (8.6). Находим

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) = & -\frac{1}{\lambda K_2(\lambda)} \left[ K_1(\lambda) + \int_{\lambda}^{\infty} K_1(t) \frac{dt}{t} \right] = \\ = & -1 + \frac{1}{\lambda^2 K_2(\lambda)} \left\{ \lambda^2 K_0(\lambda) + \lambda K_1(\lambda) - \right. \\ & \left. - \frac{\pi}{2} \lambda^2 [K_1(\lambda)L_{-2}(\lambda) + K_2(\lambda)L_{-1}(\lambda)] \right\}, \quad (8.10) \end{aligned}$$

где  $L_\nu(\lambda)$  — функции Струве.

При  $\lambda \rightarrow 0$ , в случае узких воронок и слабой турбулентности, асимптотику функции  $\psi$  получим разложением функций Макдональда и Струве в ряды ( $\gamma$  — постоянная Эйлера)

$$\psi(\lambda) = -1 + \frac{\lambda}{2} \ln \frac{\lambda\gamma}{2} + O(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (8.11)$$

Теперь из (8.6) (с точностью  $O(\varepsilon^2)$ )  $v = \lambda/2 \ln(\lambda/2)$ . Уменьшение линейной азимутальной скорости в окрестности узкой воронки по сравнению с удаленными областями не противоречит наблюдениям. Угловая скорость  $\omega = v_\theta/r \sim v/x$  при этом убывает вдали от воронки ( $x \rightarrow \infty$ ) и возрастает  $\sim (1/2) \ln(\lambda\gamma/2)$  в ее окрестности ( $x \rightarrow \lambda \rightarrow 0$ ). Это соответствует наблюдениям: за один оборот, совершаемый жидкой частицей вдали от воронки, в окрестности узкой воронки частица совершает несколько оборотов. При  $\lambda \rightarrow \infty$  в широких воронках при развитой турбулентности исследование выражения (8.10) проводится разложением функций Макдональда для больших аргументов. Оценки показывают, что интеграл в квадратных скобках есть  $O(\lambda^{-1})$  по

сравнению со значениями  $K_1(\lambda)$  при больших  $\lambda$

$$\psi(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (8.12)$$

и  $v = 1 - 1/\lambda$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ . Это значит, что азимутальная циркуляция в окрестности широких воронок слабеет ( $\omega \sim \lambda^{-1}$ ), что тоже соответствует наблюдениям: обладая заметной циркуляцией вдали от широкой воронки, жидкость сразу проваливается в нее, попадая в ее окрестность. На вертикальной поверхности любой воронки нисходящее течение преобладает, так как из (8.4) и (8.6)  $v_\theta/v_z = O(\varepsilon)$ .

Численные расчёты подтверждают теоретические выводы. При увеличении радиуса воронки и турбулентного сопротивления воды вращение в воронке снижается. Отметим ещё значение  $\psi(0) = -1$ , вытекающее из формулы (8.10).

Характеристика  $\varphi(\lambda)$  осевой скорости на поверхности воронки из (8.9)

$$\varphi(\lambda) = -\frac{1}{\lambda K_1(\lambda)} \int_{\lambda}^{\infty} t \psi(t) K_0(t) dt. \quad (8.13)$$

Из (8.11) и (8.12) следует, что при больших и малых значениях  $\lambda$  интеграл (8.13) положителен. По (8.6) это означает добавку порядка  $O(\varepsilon^2)$  в осевую скорость в сторону увеличения. Воронка в своей окрестности стимулирует опускание жидкости. И это соответствует наблюдениям.

## 9. Устойчивость гидродинамических воронок

Для исследования устойчивости воронок учтем в исходных уравнениях оператор  $\partial/\partial t$  ( $t = t' \kappa_{zz}$ ), линеаризуем полученные уравнения на построенном выше решении и опустим величины порядка  $O(\varepsilon^2)$ . Тогда для описания возмущений этого решения получим спектральную задачу

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\Psi}{x^2};$$

$$\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi \quad (x = \lambda), \quad \Psi = 0 \quad (x \rightarrow \infty),$$

где  $\Psi$  — возмущения характеристики  $\psi$  азимутальной скорости. Рассматривая возмущения,

пропорциональные  $e^{\omega t}$ , из последнего уравнения и условия на бесконечности находим  $\Psi = A e^{\omega t} K_1(x \sqrt{1 + \omega})$ ,  $|\arg \sqrt{z}| < \pi$ . Условие при  $x = \lambda$  дает для определения  $\omega$  спектральное уравнение

$$\lambda \sqrt{1 + \omega} K_2(\lambda \sqrt{1 + \omega}) = 0.$$

Уравнение  $K_2(z) = 0$  в области  $|\arg \sqrt{z}| < \pi$  имеет два комплексных корня  $z_{1,2} = -\alpha \pm i\beta$ , где  $\alpha = -1, 29$ ,  $\beta = 0, 44$  [19, 20]. Поэтому спектр задачи в указанной области состоит из двух точек, определяемых из уравнений  $\lambda \sqrt{1 + \omega} = -\alpha \pm i\beta$ , т. е.

$$\omega_{2,3} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\lambda^2} - 1 \pm 2i \frac{\alpha\beta}{\lambda^2}.$$

Таким образом, воронка устойчива при  $\lambda > \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 1, 21$ , т. е. когда радиус воронки  $a > 1, 21 \sqrt{\nu/\kappa_{zz}}$ , и неустойчива при  $\lambda < 1, 21$ . Неустойчивость узкой воронки легко наблюдать в ванне с крестообразным стоком. Вначале образуется узкая воронка со стоком в одном из квадрантов стока. По мере истечения вертикальные токи в других квадрантах разрушают воронку и она сменяется другой с противоположным вращением. Разрушения воронки не происходит до полного истечения, если начальный ее радиус достаточно велик.

Итак, описан целый ряд явлений, сопровождающих процесс истечения жидкости из отверстия. Хотя начальная фаза зарождения воронок осталась неописанной<sup>5</sup>, выяснен механизм взаимодействия гравитации с вязким и турбулентным сопротивлениями, который поддерживает развитую цилиндрическую часть воронки в динамическом равновесии. Этот механизм работает следующим образом. Сила тяжести и сток побуждают жидкость в его окрестности к ускоренному опусканию. Однако этого не происходит, так как установившийся характер течения и малая величина скорости радиального дрейфа обращают практически в ноль полное ускорение жидкой частицы в окрестности цилиндрической части воронки. (За исключением центростремительного ускорения  $v_\theta^2/r$ , которое входит в давление). Наличие воронки ограничивает скорость радиального дрейфа, так как из уравнения неразрывности и кинематического условия на поверхности жидкости при  $\partial/\partial \theta = 0$ ,  $\partial/\partial z = 0$  вытекает  $v_r = 0$  во всей области течения. (Каков бы ни был механизм образования течения в окрестности воронки,

<sup>5</sup>Некоторые результаты в этом направлении получены в [21]. Например, установлено, что начальная стадия воронки — конус с углом при вершине не менее  $86^\circ 10'$  и др.

действие этого механизма, как это следует из наблюдений, таково, что движение жидкости установившееся ( $\partial/\partial t = 0$ ), осесимметричное ( $\partial/\partial\theta = 0$ ) и не зависит от вертикальной координаты ( $\partial/\partial z = 0$ ). В отсутствии воронки на оси  $z = 0$  было бы  $v_z = \text{const}/r = \infty$ , так что воронка нужна, чтобы исключить окрестность  $r = 0$ ). Антагонизм между стремлением жидкости к ускоренному падению в сток и невозможностью падения из-за ограниченности радиального притока игрой лобового и касательного турбулентных сопротивлений рождает саму воронку и спонтанную азимутальную циркуляцию в ее окрестности таким образом, что обеспечивается баланс вязких, турбулентных и гравитационных сил в исходных уравнениях. При этом жидкость опускается не ускоренно, а равномерно.

### Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, М: Гостехиздат, 1954. 795 с.
2. Струмминский В. В. К теоретическим основам турбулентных течений // ДАН СССР. 1984. Т. 208. № 3. С. 570–574.
3. Фридман Б. А. Турбулентность водных потоков. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 239 с.
4. Белоцерковский О. М., Опарин А. М., Чечеткин В. М. Турбулентность. Новые подходы. М.: Наука, 2002, 287 с.
5. Этюды о турбулентности. М.: Наука, 1994. 291 с.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматлит. Т. 1, 1955, 560 с. Т. 2, 1963. 727 с.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.
8. Трёхмерные турбулентные пограничные слои / Под ред. Х. Фернхольца, Е. Краузе. М.: Мир, 1985. 383 с.
9. Нелинейные динамические процессы (к 80-летию со дня рождения Уно Копвиллема). Владивосток, РАН, Дальнаука, 2004, 260 с.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
11. Заволженский М. В., Руткевич П. Б. Большие числа Рейнольдса: обтекание контуров. Препринт Пр-2117. М.: ИКИ РАН, 2006. 60 с.
12. Кондратьев К. Я., Никаноров А. М., Пантюхин Я. В., Заволженский М. В. Некоторые турбулентные течения в водоемах // ДАН. 1992. Т. 324. № 3. С. 676–680.
13. Никаноров А. М., Заволженский М. В., Трунов Н. М. Винтовые турбулентные течения в угловых областях // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2007. № 1. С. 50–59.
14. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. Т. 2 М.: Мир, 1986, 415 с.
15. Сагдеев Р. З. Моисеев С. С., Руткевич П. Б., Тур А. В., Яновский В. В. О возможном механизме возбуждения крупномасштабных вихрей в атмосфере // Тропическая метеорология. Труды III Международного симпозиума. Ленинград: Гидрометеиздат, 1987. С. 18–28.
16. Моисеев С. С., Руткевич П. В., Тур А. В., Яновский В. В. Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // ЖЭТФ. Т. 94. 1988. № 2. С. 144–153.
17. Заволженский М. В. Учёт турбулентного сопротивления при моделировании некоторых физических процессов в пресноводных экосистемах. В сб.: Состояние и перспективы развития методологических основ химического и биологического мониторинга поверхностных вод суши. Тез. докл. XXIX Всес. гидрохим. совещ. Ростов-на-Дону: Госкомгидромет, 1987. Т. 2. С. 127.
18. Брэдшоу П. Введение в турбулентность и её измерение. М.: Мир, 1974, 278 с.
19. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. Т. 1. М., Иностранная литература, 1949.
20. Заволженский М. В., Терсков А. Х. О нулях цилиндрических функций  $K_n(x)$  // Журнал вычислительной математики и математической физики. АН СССР. 1977. № 3. С. 759–762.
21. Заволженский М. В. Нелинейные возмущения вязкой среды с поверхностью разрыва плотности. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1987. 188 с.

**Ключевые слова:** турбулентное течение, диффузия вихря, гидродинамическая воронка, устойчивость