УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ЖЕСТКО СЦЕПЛЕННОЙ С ПАКЕТОМ ИЗ ДВУХ ПОЛУСЛОЕВ[1]

***Ляпин А. А.*[2], *Селезнёв Н. М.*[3], *Шиляева О. В.*[4]**

DYNAMIC CONTACT PROBLEM FOR A HALF-PLANE RIGIDLY COUPLED WITH A PACKAGE CONSISTING OF TWO HALF-LAYERS

Lyapin A. A., Seleznev N. M., Shilyaeva O. V.

The solution of the contact problem for layered media of irregular structure is considered based on the approximation approach and the method of boundary integral equations. The solutions superposition for the half-plane is used to develop fundamental solutions for layered media.

Проблемы расчета характеристик динамического воздействия распространяющихся в грунте колебаний от техногенных или сейсмических источников на расположенные вблизи склонов здания и сооружения, задачи контакта массивных тел с деталями, часть плоской поверхности которых подкреплена одной или несколькими полуограниченными накладками, приводят к постановке динамических контактных задач для слоистых полуограниченных областей типа полупространства или бесконечного слоя, жестко сцепленного с одним или несколькими полуслоями. В частности, береговые склоны практически всегда подрезают грунтовый массив и характеризуются выходами на дневную поверхность слоев различной толщины с различными механическими характеристиками. Подобная структура определяет сложную картину напряженно-деформированного состояния грунтового массива и сложный характер взаимодействия колебаний с массивным поверхностным объектом, недостаточно изученных из-за ограниченности возможностей использования аналитических и прямых численных методов. В силу этого в настоящей работе для решения указанного класса задач предлагается развитие метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) [1, 2]. В первом приближении считаем, что объект заданной массы M контактирует с поверхностью грунта без отрыва и трения, совершая смещение только в вертикальном направлении. Для определенности рассмотрена задача в плоской постановке для структуры, включающей два полубесконечных слоя, жестко сцепленных между собой и с подстилающим полупространством (рис. 1).

Упругое полупространство, характеризуемое плотностью ρ и постоянными Ламе λ, μ, занимает в декартовой системе координат область $y \leqslant 0$, вдоль части границы ($x \leqslant a$) заданы условия жесткого сцепления с лежащим выше полуслоем, остальная часть границы свободна от усилий. Средний полуслой имеет толщину h_1, характеризуется плотностью ρ_1 и постоянными Ламе λ_1, μ_1. Движение упругой среды описывается уравнениями Ламе [3]. Верхняя плоская граница слоя $x \leqslant a_1 \leqslant a$ для $x \leqslant a_2 < a_1$ жестко сцеплена с поверхностным полуслоем (толщина h_2, плотность ρ_2 и постоянные Ламе λ_2, μ_2), на остальной части — свободна от усилий. Верхняя грань поверхностного слоя $x \leqslant a_3$ в области $x \in [-b, b]$ жестко сцеплена с плоской поверхностью жесткого массивного штампа, в области $x \in [c_1, c_2]$ действует осциллирующая с частотой ω нагрузка интенсивности $\mathbf{P}(x)$, остальная часть поверхности свободна от усилий. Вдоль наклонных торцов полуслоев напряжения отсутствуют.

Для построения приближенного решения сформулированной контактной задачи на базе

[1]Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (1.1.03).

[2]Ляпин Александр Александрович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Ростовского военного института ракетных войск; e-mail: lyapin@aaanet.ru

[3]Селезнев Николай Михайлович, аспирант кафедры информационных систем в строительстве Ростовского государственного строительного университета.

[4]Шиляева Ольга Викторовна, ассистент кафедры информационных систем в строительстве Ростовского государственного строительного университета.

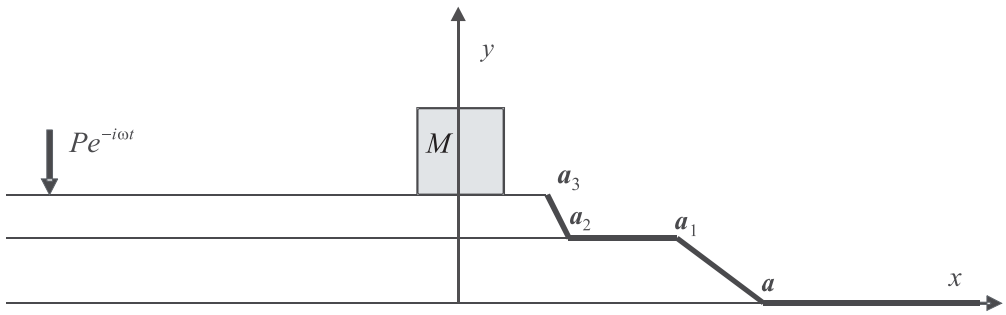

Рис. 1. Схематичное строение участка берегового склона, на котором расположено здание

МГИУ используем следующий алгоритм. Аппроксимируем закон распределения контактных напряжений под штампом $\mathbf{q}(x) = \{q_x, q_y\}$ отрезком ряда следующей структуры:

$$q_x(x) = \frac{C_0^{(x)}}{\sqrt{b^2 - x^2}} + \sum_{i=1}^{N} C_i^{(x)} \varphi_i(x),$$
$$q_y(x) = \frac{C_0^{(y)}}{\sqrt{b^2 - x^2}} + \sum_{i=1}^{N} C_i^{(y)} \varphi_i(x), \qquad (1)$$

где $C_k^{(x,y)}$, $k = 0, 1, \ldots, N$ — неопределенные постоянные, $\varphi_i(x)$ — ортогональные на $[-b, b]$ функции или многочлены [4]. Подобное представление точным образом учитывает особенность контактных напряжений вдоль кромки штампа. Для каждого слагаемого правой части (1) реализуем схему решения ГИУ задачи с однородными граничными условиями. Воздействие, генерирующее колебания и распределенное по закону

$$q_{iy}(x) = \varphi_i(x), \; i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$q_{0y}(x) = \left(b^2 - x^2\right)^{-1/2},$$

аналогично для $q_{ix}(x)$) — осциллирующее усилие на отрезке $x \in [-b, b]$. Решению каждой такой задачи соответствуют векторы перемещений

$$\mathbf{u}_k^{(x)}, \quad \mathbf{u}_k^{(y)},$$

$$\mathbf{u}_k^{(x)} = \left\{u_{kx}^{(x)}, u_{ky}^{(x)}\right\}, \quad \mathbf{u}_k^{(y)} = \left\{u_{kx}^{(y)}, u_{ky}^{(y)}\right\}.$$

Итоговое представление для вектора смещения получаем в виде

$$u_y(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[C_k^{(x)} u_{ky}^{(x)}(x) + C_k^{(y)} u_{ky}^{(y)}(x)\right],$$

$$u_x(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[C_k^{(x)} u_{kx}^{(x)}(x) + C_k^{(y)} u_{kx}^{(y)}(x)\right].$$

Для нахождения постоянных $C_k^{(x)}$, $C_k^{(y)}$ приравниваем компоненты вектора смещения поверхности среды в узлах x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$; $x_0 = -b$, $x_N = b$ смещению соответствующих точек плоской поверхности массивного штампа с учетом уравнения его движения.

Например, для самого простого случая, когда трение под штампом отсутствует ($q_x(x) = 0$), а угол поворота массивного объекта пренебрежимо мал (что имеет место при воздействии длинных волн малой амплитуды), основной вклад в распределение контактных напряжений вносят вертикальные смещения жесткого массивного объекта

$$u_y(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^{(y)} u_{ky}^{(y)}(x).$$

Уравнения движения в первом приближении для этого случая становятся одномерными и амплитуда вертикальных смещений плоской подошвы штампа $u_y(x) = u_0 = \text{const}$ определяется уравнением

$$-\omega^2 M u_0 = \sum_{k=0}^{n} C_k^{(y)} \int_{-b}^{b} q_{ky}(x) dx,$$

где

$$q_{ky}(x) = \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

$$q_{0y}(x) = \left(b^2 - x^2\right)^{-1/2}.$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{N} C_j^{(y)} u_{jy}(x_k) = -\frac{\sum\limits_{j=0}^{N} C_j^{(y)} \int\limits_{-b}^{b} q_{jy}(x) dx}{\omega^2 M}, \qquad (2)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Последнее представление соответствует системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $C_j^{(y)}$, определяющих по

соотношению (1) закон распределения вертикальных контактных напряжений.

Для практической реализации этого подхода необходимо построить решение систем ГИУ для представленной структуры с однородными граничными условиями в напряжениях.

В результате использования подхода, разработанного в [5, 6], приводим задачу к системе ГИУ по полубесконечному контуру Φ (на рис. 1 выделен жирной линией), конечная часть которого является кривой или ломаной линией, а полубесконечная — частью прямолинейной границы полуплоскости

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) + \int\limits_{\Phi} \mathbf{T}^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r})ds = \\ = \int\limits_{c_1}^{c_2} \mathbf{U}^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})|_{y=h_1+h_2}\,\mathbf{P}(x)dx + \\ + \int\limits_{-b}^{b} \mathbf{U}^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})|_{y=h_1+h_2}\,\mathbf{q}(x)dx. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)$ — вектор перемещений в точке $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0\}$ рассматриваемой области; $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ — внешняя нормаль к контуру Φ; $\mathbf{U}^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$, $\mathbf{T}^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$ — матрицы фундаментальных решений от действия точечного источника в точке $\mathbf{r}_0$ для трехслойной полуплоскости с бесконечными по x поверхностными слоями.

Построение фундаментальных решений $\mathbf{U}^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$, $\mathbf{T}^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$ может быть эффективно реализовано с помощью метода полуплоскостей [2]. В основе данного построения решения для многослойной среды лежит вывод определяющих соотношений для одного слоя с заданными на его гранях векторами напряжений.

Пусть в локальной системе координат (x, y) для j-го слоя $y \in (0, h_j)$, $x \in (-\infty, \infty)$ амплитудные функции перемещений при действии сосредоточенного в $\mathbf{r}_0$ источника имеют вид

$$\mathbf{U}^{(*)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}) = \left\{U_1^{(j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}), U_2^{(j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\right\} = \\ = \left\{U_x^{(j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}), U_y^{(j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\right\}.$$

Функции $U_k^{(j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$, удовлетворяющие уравнениям движения, согласно предлагаемому методу будем разыскивать в виде

$$U_k^{(j)} = U_k^{(j,1)} + U_k^{(j,2)} + U_k^{(j,3)}.$$

(При аналогичном рассмотрении полуплоскости считаем $U_k^{(j,1)} \equiv 0$). Слагаемые $U_k^{(j,n)}(x, y)$, $n = 1, 2$ данного представления являются решениями уравнений Ламе для однородной полуплоскости с удовлетворением граничных условий

$$\mathbf{t}^{(j,1)}(x, 0) = \mu_j\,\mathbf{X}^{(j,1)}(x),$$

$$\mathbf{t}^{(j,2)}(x, h_j) = \mu_j\,\mathbf{X}^{(j,2)}(x).$$

Вектор перемещений $\mathbf{U}^{(j,1)}(x, y)$ представим в виде интеграла Фурье через трансформанты вектора напряжений $\mathbf{X}^{(j,1)}(y)$

$$\mathbf{U}^{(j,1)}(x, y) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mathbf{P}^{(j,1)}(\alpha, y)\tilde{\mathbf{X}}^{(j,1)}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha. \quad (4)$$

Контур Γ определен принципом предельного поглощения: обходит положительные полюса подынтегральной функции снизу, отрицательные — сверху, а на остальной части совпадает с вещественной осью. Элементы матрицы $\mathbf{P}^{(j,1)}$ имеют вид

$$P_{11}^{(j,1)}(\alpha, y) = \frac{\sigma_{j1}}{\Delta_R}\left\{-\zeta_j^2 e_{j1} + 2\alpha^2 e_{j2}\right\},$$

$$P_{12}^{(j,1)}(\alpha, y) = \frac{i\alpha}{\Delta_R}\left\{-2\sigma_{j1}\sigma_{j2}e_{j1} + \zeta_j^2 e_{j2}\right\},$$

$$P_{21}^{(j,1)}(\alpha, y) = \frac{i\alpha}{\Delta_R}\left\{-\zeta_j^2 e_{j1} + 2\sigma_{j1}\sigma_{j2}e_{j2}\right\},$$

$$P_{22}^{(j,1)}(\alpha, y) = \frac{\sigma_{j2}}{\Delta_R}\left\{2\alpha^2 e_{j1} - \zeta_j^2 e_{j2}\right\},$$

$$\Delta_R = -4\alpha^2\sigma_{j1}\sigma_{j2} + \varsigma_j^4,$$

$$e_{jk} = e^{-\sigma_{jk}y},$$

$$\zeta_j^2 = \alpha^2 + \sigma_{j2}^2, \quad \sigma_{jk}^2 = \alpha^2 - \theta_{jk}^2,$$

$$\theta_{j1} = \frac{\omega}{V_{pj}}, \quad \theta_{j2} = \frac{\omega}{V_{sj}}.$$

V_{pj}, V_{sj} — скорости распространения волн в соответствующей среде.

Аналогично формуле (4) определяются перемещения для полуплоскости $y \leqslant h_j$ через векторы $\tilde{\mathbf{X}}^{(j,2)}(\alpha)$, где для элементов $P_{nm}^{(j,2)}(\alpha, y)$ справедливы соотношения

$$P_{nm}^{(j,2)}(\alpha, y) = (-1)^{\delta_{nm}} P_{nm}^{(j,1)}(\alpha, h_j - y),$$

$$n, m = 1, 2,$$

δ_{nm} — символ Кронекера.

Определяя напряженное состояние слоя в виде суммы соответствующих решений для двух полуплоскостей, получим

$$col\left\{\sigma_x,\tau_{xy}\right\}^{(j,1)}(x,y)= \\ =\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\mathbf{W}^{(j,1)}(\alpha,y)\tilde{\mathbf{X}}^{(j,1)}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad (5)$$

где

$$W_{11}^{(j,1)}(\alpha,y)=\frac{1}{\Delta_R}\left(\zeta_j^4 e_{j1}-4\sigma_{j1}\sigma_{j2}\alpha^2 e_{j2}\right),$$

$$W_{12}^{(j,1)}(\alpha,y)=\frac{2i\alpha\sigma_{j2}\zeta_j^2}{\Delta_R}\left(e_{j1}-e_{j2}\right),$$

$$W_{21}^{(j,1)}(\alpha,y)=\frac{2i\alpha\sigma_{j1}\zeta_j^2}{\Delta_R}\left(e_{j1}-e_{j2}\right),$$

$$W_{22}^{(j,1)}(\alpha,y)=\frac{1}{\Delta_R}\left(-4\sigma_{j1}\sigma_{j2}\alpha^2 e_{j1}+\zeta_j^4 e_{j2}\right).$$

Для второй группы слагаемых найдем

$$W_{nm}^{(j,2)}(\alpha,y)=(-1)^{\delta_{nm}+1}W_{nm}^{(j,1)}(\alpha,h_j-y).$$

Функции $U_k^{(j,3)}$ определяют перемещения в однородной плоскости с параметрами рассматриваемого слоя от действия сосредоточенного источника колебаний $\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)=\{p_1(x_0,y_0),p_2(x_0,y_0)\}$ в виде набора цилиндрических волн [1]

$$U_k^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)= \\ =\sum_{l=1}^{2}U_{kl}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)p_l(x_0,y_0),$$

$$k=1,2.$$

С помощью формул переразложения они могут быть записаны в преобразованном по Фурье виде

$$\tilde{U}_{kl}^{(j,3)}(x_0,y_0,\alpha,y)=F_x[U_{kl}^{(j,3)}]= \\ =\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U_{kl}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)\exp(i\alpha x)\,dx,$$

$$U_{kl}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)=F_\alpha^{-1}[\tilde{U}_{kl}^{(j,3)}]= \\ =\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\tilde{U}_{kl}^{(j,3)}(x_0,y_0,\alpha,y)\exp(-i\alpha x)\,dx,$$

$$k,l=1,2,$$

где

$$\tilde{U}_{11}^{(j,3)}(x_0,y_0,\alpha,y)=A_j\left(-\sigma_{j1}E_{j1}^{+}\alpha^2 E_{j2}^{/}\sigma_{j2}\right),$$

$$\tilde{U}_{12}^{(j,3)}(x_0,y_0,\alpha,y)=\tilde{U}_{21}^{(j,3)}(x_0,y_0,\alpha,y)= \\ =i\alpha A_j\left(E_{j1}-E_{j2}\right)\operatorname{sign}(y-y_0),$$

$$\tilde{U}_{22}^{(j,3)}(x_0,y_0,\alpha,y)=A_j\left(-\sigma_{j2}E_{j2}^{+}\alpha^2 E_{j1}^{/}\sigma_{j1}\right),$$

$$E_{jk}=\exp(-\sigma_{jk}\left|y_0-y\right|),\quad k=1,2;$$

$$A_j=\frac{\exp(i\alpha x_0)}{2\theta_{j2}^2}.$$

Аналогично для фундаментальных решений по напряжениям получим

$$T_{kn}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)= \\ =\sum_{l=1}^{2}T_{lkn}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)p_l(x_0,y_0),$$

$$k,n=1,2.$$

Или в преобразованиях Фурье

$$\tilde{T}_{111}^{(j,3)}(x_0,y_0,\alpha,y)= \\ =A_j\left(\varsigma_j^2 E_{j1}-2\alpha^2 E_{j2}\right)\operatorname{sign}(y-y_0),$$

$$\tilde{T}_{211}^{(j,3)}(x_0,y_0,\alpha,y)= \\ =\frac{i\alpha A_j}{\sigma_{j1}}\left(\varsigma_j^2 E_{j1}-2\sigma_{j1}\sigma_{j2}E_{j2}\right),$$

$$\tilde{T}_{112}^{(j,3)}(x_0,y_0,\alpha,y)= \\ =\frac{i\alpha A_j}{\sigma_{j2}}\left(2\sigma_{j1}\sigma_{j2}E_{j1}-\varsigma_j^2 E_{j2}\right),$$

$$\tilde{T}_{212}^{(j,3)}(x_0,y_0,\alpha,y)= \\ =A_j\left(-2\alpha^2 E_{j1}+\varsigma_j^2 E_{j2}\right)\operatorname{sign}(y-y_0),$$

$$\tilde{T}_{122}^{(j,3)}(x_0,y_0,\alpha,y)= \\ =A_j\left(-\eta_j^2 E_{j1}+2\alpha^2 E_{j2}\right)\operatorname{sign}(y-y_0),$$

$$\eta_j^2=2\alpha^2+\frac{\lambda_j}{\mu_j}\theta_{j1}^2,$$

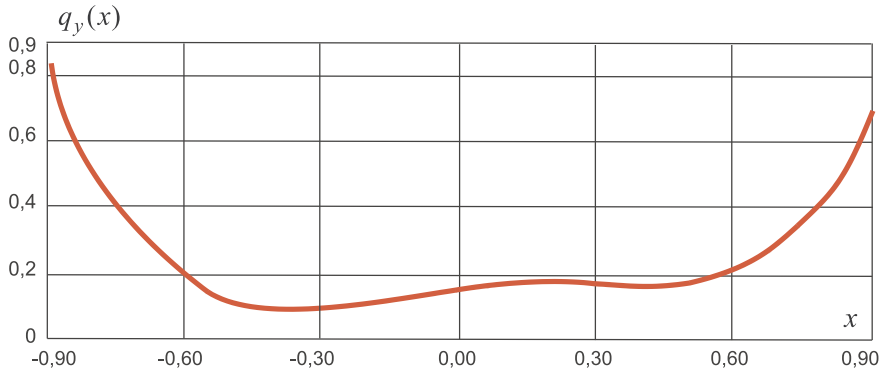

Рис. 2. Характер распределения контактных напряжений под жестким штампом ($M = 10^3$ кг)

$$\tilde{T}_{222}^{(j,3)}(x_0, y_0, \alpha, y) = \frac{i\alpha A_j}{\sigma_{j1}} \left\{ -\varsigma_j^2 E_{j1} + \right.$$
$$\left. + \sigma_{j2} \left[2 - \frac{\theta_{j2}^2}{\theta_{j1}^2} \left(1 - \frac{\sigma_{j2}}{\sigma_{j1}} \right) \right] E_{j2} \right\}.$$

Введенные трансформанты Фурье векторов напряжений $\tilde{\mathbf{X}}^{(j,k)}(\alpha)$ в представлениях (4), (5) являются неизвестными и должны быть определены из условий стыковки разнородных составляющих слоистой полуплоскости. Удовлетворяя равенствам компонент векторов перемещений и напряжений при переходе через границы раздела сред в преобразованиях Фурье, получим систему линейных алгебраических уравнений с $4n + 2$ неизвестными

$$\mathbf{A}(\alpha)\tilde{\mathbf{X}}(\alpha) = \mathbf{B}(\alpha),$$

где $\tilde{\mathbf{X}}(\alpha)$ — общий вектор неизвестных напряжений для многослойной структуры. Несложно показать, что определитель данной системы обращается в ноль в точках $\alpha = \alpha_n$, соответствующих корням дисперсионного уравнения для n-слойной полуплоскости и определяющих волновые числа распространяющихся на поверхности и границах раздела слоев поверхностных волн. Рассматривая асимптотическое поведение определителя при $|\alpha| \to +\infty$, получим $\Delta(\alpha) = \det \mathbf{A}(\alpha) \sim \mathrm{const} \cdot \alpha^{-2}$, что обеспечивает численную устойчивость обращения системы уравнений при произвольных α на Γ.

При решении полученной системы ГИУ (3) используется метод граничных элементов, причем на полуограниченной прямолинейной части контура для моногармонических колебаний вводится полубесконечный элемент, для реализации которого используется асимптотическое представление решения при $x \to \infty$, соответствующее волне Рэлея для однородной полуплоскости.

Пробные расчеты, связанные с реализацией изложенного алгоритма, показали, что для относительно низких частот колебаний (длина поверхностной волны много больше протяженности штампа) для получения результата с погрешностью, не превышающей 10 %, достаточно ввести 3–5 узловых точек. Для большего числа точек обусловленность СЛАУ быстро ухудшается. Следует ожидать, что учет деформируемости штампа (массивного поверхностного объекта) приведет к улучшению обусловленности системы для большего числа узлов.

Необходимо отметить, что при практических расчетах задач воздействия сейсмических или техногенных колебаний на поверхностные фундаменты распространяющиеся в грунтовом массиве волны имеют длину, многократно превосходящую линейные размеры фундамента. При подобных условиях, как правило, можно получить достаточно высокую точность результата при малом числе слагаемых представления (1) и соответствующего им числа узлов.

Существенно также, что при реализации метода граничных элементов построение фундаментальных решений осуществляется однократно для всех аппроксимирующих функций контактных напряжений под поверхностным фундаментом, а соответствующие системы линейных алгебраических уравнений для определения $u_{jy}(x_k)$ в (2) отличается только правыми частями.

В качестве примера на рис. 2 приведен характер распределения напряжений под массивным фундаментом при возбуждении среды поверхностным источником, расположенным слева от фундамента ($c_1/h_2 = -10$, $c_2/h_2 = -9$, $\theta_{22} = \omega h_2 \sqrt{\rho_2/\mu_2} = 0,5$).

Реализация изложенного алгоритма позволила провести достаточно полный численный анализ и выявить основные факторы, опреде-

ляющие количественные и качественные характеристики распределения контактных напряжений под штампом (источник колебаний расположен на удалении от объекта и склона слева, амплитуда поверхностных волн прямого поля источника под объектом при различном его расположении относительно склона выбирается постоянной).

1. Наличие наклонных торцевых поверхностей верхних полуслоев структуры определяет асимметрию закона распределения контактных напряжений под штампом, зависящую от частоты колебаний, соотношения жесткостей слоев и угла наклона торцевых границ. Максимальную выраженность этот эффект имеет при нормальной структуре склона (жесткости компонент слоистой среды уменьшаются с удалением от дневной поверхности среды) или аномальной типа «жесткий–мягкий» полуслои — «жесткая» полуплоскость и наибольшем угле склона.

2. Максимальное влияние склона на амплитуду контактных напряжений наблюдается на расстояниях до l длины поверхностной волны. С удалением объекта от верхней грани склона отмечается снижение его влияния на величину усилий под штампом: на расстояниях свыше двух длин поверхностной волны амплитудные характеристики напряжений стабилизируются.

3. При удалении внешней нагрузки вдоль горизонтальной границы от склона наблюдается периодическое изменение асимметрии распределения контактных усилий (вправо-влево) под массивным объектом с уменьшением амплитуды отклонения от симметричного закона.

Литература

1. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
2. *Ляпин А. А.* О построении фундаментальных решений для слоистых полуограниченных сред // Труды 11-й Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды» 14–17 ноября 2007 г., г. Ростов-на-Дону. С. 178–180.
3. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
4. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 344 с.
5. *Ляпин А. А., Селезнев М. Г., Собисевич Л. Е., Собисевич А. Л.* Механико-математические модели в задачах активной сейсмологии. ГНТП «Глобальные изменения природной среды и климата». М.: ГНИЦ ПГК, 1999. 294 с.
6. *Ляпин А. А., Селезнев М. Г.* Возбуждение колебаний в слоистом многосвязном полупространстве // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деф. сред и констр. Программа ГК РФ по ВО. Научные труды. Н. Новгород. 1993. Вып. 1. С. 86–92.

Ключевые слова: грунт сложного строения, береговой склон, поверхностное сооружение, метод граничных интегральных уравнений, фундаментальные решения, контактное взаимодействие.

Статья поступила 17 февраля 2008 г.
Ростовский военный институт ракетных войск, г. Ростов-на-Дону
Ростовский государственный строительный университет, г. Ростов-на-Дону