УДК 539.3

ПЛОСКИЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ КЛИНОВИДНОЙ СРЕДЫ

Беркович В. Н.[1]

PLANE STEADY VIBRATIONS OF THE WEDGE-SHAPED ELASTIC MEDIUM

Berkovich V. N.

A method is offered to solve a mixed problem of plane steady vibrations of the wedge-shaped elastic medium under the effect of plane deformation. The vibrations are excited by harmonic vibrations sources on a section of the medium boundary. The mixed boundary conditions are assumed to be the most common ones. In generalized statement, the problem in question is reduced to a system of boundary-value integral equations, which were described in the author's works. Formation of the wave displacement field on the free surface is studied. The conditions of the generation of surface waves are examined analytically. Some numerical results are given in the table.

Keywords: wedge-shaped medium, generalized homogeneous solution, function-invariant solution, surface wave, critical angle.

Предлагается метод исследования плоской смешанной задачи об установившихся колебаниях упругой клиновидной среды, возбуждаемых на участке её границы. Смешанные задачи динамики упругого клина в условиях плоской деформации рассматривались ранее в ряде частных случаев [1, 2] и др. Общий случай задания смешанных граничных условий при плоских колебаниях упругого клина рассмотрен в данной работе, по-видимому, впервые. Автором не обнаружены работы в отечественной и зарубежной литературе, в которых бы исследовался указанный случай. На основе перехода к обобщенной постановке исследуемая смешанная задача сведена к системе граничных интегральных уравнений, рассмотренных ранее в работах автора, например, [3]. Изучен характер формирования волнового поля смещений свободной поверхности упругого клина. Частичному рассмотрению этого вопроса посвящены [4, 5], а также более ранние работы этих и других авторов. В данной работе дается аналитическое исследование условий возникновения поверхностных волн при плоских установившихся колебаниях клиновидной среды. Приведены некоторые результаты численного анализа.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать упругую клиновидную среду Ω угла раствора α, нижняя грань $\theta = 0$ которой свободна (или жестко закреплена), а на верхней грани $\theta = \alpha$ задан плоский вектор смещений $\mathbf{f}(r)\exp(-i\omega t)$, $a \leqslant r \leqslant b$ в полосе $\Pi = (0,\infty)\times(0,\alpha)$, параллельной ребру клина. Оставшаяся часть верхней грани предполагается свободной от напряжений. При установившихся колебаниях клиновидной среды в условиях плоской деформации ставятся задачи определения неизвестной амплитуды вектора напряжений $\mathbf{q} = \{\sigma_\theta, \sigma_{r\theta}\}$ в полосе $\Pi \in \partial\Omega$ и исследования характера волнового поля смещений свободной поверхности $\partial\Omega$.

Поставленная выше задача сводится к решению динамических уравнений линейной теории упругости относительно неизвестной амплитуды $\mathbf{u}(r,\theta)$ вектора смещений $\mathbf{u}(r,\theta)\exp(-i\omega t)$ в клиновидной среде со смешанными граничными условиями

$$\sigma(r,0) = \mathbf{0} \quad [\mathbf{u}(r,0) = \mathbf{0}], \quad 0 < r < \infty,$$

$$\boldsymbol{\sigma}(r,\alpha) = \mathbf{0}, \quad r \notin [a,b], \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}(r,\alpha) = \mathbf{f}(r), \quad r \in [a,b].$$

[1]Беркович Вячеслав Николаевич, канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой физики и математики филиала Московского госуниверситета технологий и управления в г. Ростове-на-Дону; e-mail: vberkovich@mail.ru.

В угловой точке предполагается ограниченность вектора смещений, а на бесконечности — выполнение условий принципа излучения.

Для исследования указанной задачи воспользуемся представлением амплитуды $\mathbf{u}(r,\theta)$ плоского вектора смещений на основе общего решения уравнений установившихся упругих колебаний в виде [6]

$$2\mu\mathbf{u} = -\nabla F + 4(1-\nu)\mathbf{\Phi},$$

$$F(r,\theta) = \Phi_0(r,\theta) + r\Phi_r(r,\theta),$$

$$\nabla^2\Phi_0 + k_1^2\Phi_0 = (k_2^2 - k_1^2)r\Phi_r, \tag{1.2}$$

$$\nabla^2\mathbf{\Phi} + k_2^2\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Phi} = \{\Phi_r(r,\theta), \Phi_\theta(r,\theta)\}.$$

Здесь μ — модуль сдвига, $k_{1,2}$ — волновые числа для продольных и поперечных волн соответственно, ν — коэффициент Пуассона. Координаты вектора $\mathbf{\Phi}$ могут быть представлены в форме

$$\begin{cases} \Phi_r = \Phi_1(r,\theta)\cos\theta + \Phi_2(r,\theta)\sin\theta, \\ \Phi_\theta = -\Phi_1(r,\theta)\sin\theta + \Phi_2(r,\theta)\cos\theta, \\ \nabla^2\Phi_{1,2} + k_{1,2}^2\Phi_{1,2} = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Тогда выражения компонент вектора напряжений $\mathbf{q} = \{\sigma_\theta, \sigma_{r\theta}\}$ будут иметь вид

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\Phi_{00}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Phi_{\text{част}}}{\partial r^2} + \frac{k^2}{2}\left(\Phi_{00} + 2\Phi_{\text{част}}\right) + \\ + \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\cos\theta - \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \\ + \lambda_-\frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi_1\cos\theta + \Phi_2\sin\theta\right), \tag{1.4}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_{00}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_{\text{част}}}{\partial\theta} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\cos\theta + \right. \\ \left. + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\sin\theta + \lambda_+\left(\Phi_1\sin\theta + \Phi_2\cos\theta\right)\right\},$$

$$\lambda_\pm = 2(1-\nu)g^{-1} \pm (1-2\nu), \quad g = 1 - ik_2a.$$

Функции Φ_{00}, $\Phi_{\text{част}}$, $\Phi_{1,2}$ могут быть определены с помощью интегрального преобразования Канторовича–Лебедева [7] при решении однородного и неоднородного уравнений Гельмгольца (1.2) в виде

$$\Phi_{00}(r,\theta) = \\ = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{\gamma_1}\left[A_0(\tau)\operatorname{ch}(\theta\tau) + B_0(\tau)\operatorname{sh}(\theta\tau)\right]\times \\ \times I_{-i\tau}(æ_1 a)K_{-i\tau}(æ_1 r)\tau d\tau, \tag{1.5}$$

$$\Phi_{\text{част}}(r,\theta) = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{\gamma_1}\left[C(\tau)\operatorname{ch}(\theta\tau) + \right. \\ \left. + D(\tau)\operatorname{sh}(\theta\tau)\right]I_{-i\tau}(æ_2 a)K_{-i\tau}(æ_2 r)\tau d\tau,$$

$$\Phi_{1,2}(r,\theta) = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{\gamma_2}\left[A_{1,2}(\tau)\operatorname{ch}(\theta\tau) + \right. \\ \left. + B_{1,2}(\tau)\operatorname{sh}(\theta\tau)\right]I_{-i\tau}(æ_2 a)K_{-i\tau}(æ_2 r)\tau d\tau,$$

$$\gamma_2 \succ \gamma_1, \quad æ_{1,2} = -ik_{1,2}.$$

Запись $\gamma_2 \succ \gamma_1$ означает, что контур γ_2 следует за контуром γ_1 в направлении вертикальной оси. В последующих рассуждениях первоначально можно считать $æ_{1,2} > 0$. При этом неизвестные функции $A_{0,1,2}(\tau)$, $B_{0,1,2}(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$ в подынтегральных выражениях (1.5) регулярны и убывают на бесконечности в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$ комплексной плоскости z, на границах которой $z = \tau \pm i$ должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} æ_2 C(\tau \pm i) &= \pm i\tau\left[A_1(\tau) \mp iB_2(\tau)\right], \\ æ_2 D(\tau \pm i) &= \pm i\tau\left[B_1(\tau) \mp iA_2(\tau)\right]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Контуры интегрирования $\gamma_{1,2}$ расположены в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$ и удовлетворяют условиям излучения. При таком выборе неизвестных функций, а также с учетом асимптотических свойств модифицированных функций Бесселя $I_{-i\tau}(æ_1 a)$, $K_{-i\tau}(æ_1 r)$ условия в нуле и на бесконечности уже удовлетворены.

Так как при решении плоской задачи с помощью представлений (1.2), (1.3) две из неизвестных функций $A_{0,1,2}(\tau)$, $B_{0,1,2}(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$ оказываются произвольными, то можно потребовать выполнение следующих дополнительных условий связи:

$$\begin{gathered} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} - \frac{1}{g}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)_{\theta=\alpha} = 0, \\ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} + \frac{1}{g}\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)_{\theta=\alpha} = 0, \\ g = 1 + æ_2 a. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Замечание 1. Отметим, что при $æ_{1,2} \to 0$ (случай статического нагружения) функции $\Phi_{1,2}(r,\theta)$ превращаются в гармонические, а соотношения (1.7) — в условия Коши–Римана для этих функций [7].

Удовлетворение условиям связи (1.7) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2(\tau \pm i) &= \mp ig\tilde{\Psi}_1(\tau \pm i), \\ \tilde{\Psi}_2(\tau \pm i) &= \mp ig^{-1}\tilde{\Phi}_1(\tau \pm i), \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\tilde{\Phi}_k(z) = A_k(z)\operatorname{ch}(\alpha z) + B_k(z)\operatorname{sh}(\alpha z),$$
$$\tilde{\Psi}_k(z) = A_k(z)\operatorname{sh}(\alpha z) + B_k(z)\operatorname{ch}(\alpha z),$$
$$k = 1, 2.$$

2. Сведение задачи к граничному интегральному уравнению

Из анализа соотношений (1.2)–(1.8) следует невозможность удовлетворения смешанным граничным условиям (1.1) в классическом смысле. В данной работе развивается подход, основанный на переходе от классической постановки исходной задачи к обобщенной, предполагающей удовлетворение условиям (1.1) с точки зрения теории обобщенных функций. При этом уравнения удовлетворяются в классическом смысле, а граничные условия — только в обобщенном. Тогда все соотношения, получаемые ниже, также следует понимать в обобщенном смысле.

При удовлетворении граничным условиям $\mathbf{u}(r,0) = \mathbf{0}$, $\sigma(r,\alpha) = \mathbf{q}(r)$, $0 < r < \infty$ вспомогательной смешанной задачи производится подстановка выражений (1.5) в соотношения (1.1), (1.4) и их последующее преобразование с учетом условий (1.6)–(1.8), а также формул для модифицированных функций Бесселя

$$\frac{\partial}{\partial r}K_{-i\tau}(æ r) = = -\frac{æ}{2}\left[K_{-i(\tau-i)}(æ r) + K_{-i(\tau+i)}(æ r)\right],$$

$$\frac{\tau}{r}K_{-i\tau}(æ r) = = -i\frac{æ}{2}\left[K_{-i(\tau-i)}(æ r) - K_{-i(\tau+i)}(æ r)\right].$$

В получающихся интегральных соотношениях осуществляется преобразование контуров интегрирования в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$ регулярности и убывания подынтегральных функций, и используются результаты [3], основанные на теории интегральных преобразований обобщенных функций. После ряда достаточно громоздких преобразований приходим к соотношениям связи между трансформантами Канторовича-Лебедева [7] от векторов амплитуд смещений $\mathbf{U}(\alpha,\tau)$ и напряжений $\mathbf{Q}(\alpha,\tau)$ на границе $\theta = \alpha$

$$\frac{1}{\mu}\mathbf{Q}(\alpha,\tau) = 2æ_1 \operatorname{Re}\Big\{[\mathbf{A}(\tau+i) + \mathbf{B}(\tau+i)]\mathbf{A}^{-1}(\tau+i)\mathbf{U}(\alpha,\tau+i)\Big\}, \quad (2.1)$$

$$-\infty < \tau < \infty.$$

Соотношение (2.1) является частным случаем векторной краевой задачи Карлемана со сдвигом в комплексной плоскости для функции $\mathbf{U}(\alpha,z)$, аналитической в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$. Однако, учитывая соотношение

$$\frac{\tau}{\rho}K_{-i\tau}(æ_1 r) = æ_1 \operatorname{Re}\left[-iK_{-i(\tau+i)}(æ_1 r)\right],$$

равенству (2.1) можно удовлетворить, выбирая

$$-i\frac{1}{2\mu}\mathbf{Q}^*(\alpha,\tau) = = [\mathbf{A}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)]\mathbf{A}^{-1}(\tau)\mathbf{U}(\alpha,\tau), \quad (2.2)$$

$$\mathbf{Q}^*(\alpha,\tau) = \int_0^\infty \mathbf{q}(\rho)K_{-i\tau}(æ_1\rho)d\rho.$$

Матрицы-функции $\mathbf{A}(\tau)$, $\mathbf{B}(\tau)$ определяются граничными условиями (1.1), соотношениями (2.1) и имеют одинаковую структуру, а их элементы являются суммами произведений гиперболических, тригонометрических и степенных функций. В частности, матрица $\mathbf{A}(\tau)$ имеет следующее представление:

$$\mathbf{A}(\tau) = \big(a_{ij}(\tau)\big) = = \mathbf{C}(\tau)\operatorname{ch}(2\alpha\tau) + \mathbf{S}(\tau)\operatorname{sh}(2\alpha\tau) + \mathbf{D}(\tau),$$

$$\mathbf{C}(\tau) = \sum_{k=1}^{2}\Big[\mathbf{c}^{(1)}(\tau|\alpha,æ_1,æ_2)\cos(\lambda_k\tau) + \mathbf{c}^{(2)}(\tau|\alpha,æ_1,æ_2)\sin(\lambda_k\tau)\Big],$$

$$\mathbf{c}^{(k)}(\tau|\alpha,æ_1,æ_2) = \sum_{j=0}^{3}\mathbf{c}_j^{(k)}(\alpha,æ_1,æ_2)\tau^j,$$

$$\lambda_k = \ln æ_k, \quad k = 1, 2.$$

Матрицы $\mathbf{S}(\tau)$, $\mathbf{D}(\tau)$ имеют вид, аналогичный матрице $\mathbf{C}(\tau)$, матрица $\mathbf{B}(\tau)$ аналогична матрице $\mathbf{A}(\tau)$. Постоянные матриц $\mathbf{c}_j^{(k)}$ зависят от угла и механических параметров среды. Удовлетворяя исходным условиям (1.1), получаем из (2.2) систему граничных интегральных уравнений относительно неизвестных амплитуд контактных напряжений $\mathbf{q}(r)$

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \int_a^b \mathbf{k}(r,\rho)\mathbf{q}(\rho)d\rho = \mathbf{f}(r), \quad (2.3)$$

$$a \leqslant r \leqslant b,$$

$$\mathbf{k}(r,\rho) = = \frac{1}{i\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{-i\tau}(æ_1 r) I_{-i\tau}(æ_1 r), & \rho < r \\ I_{-i\tau}(æ_1 r) K_{-i\tau}(æ_1 \rho), & \rho > r \end{pmatrix} \times \times \operatorname{Im}\{\mathbf{H}(-i\tau)\}\, d\tau,$$

$$\mathbf{H}(\tau) = \mathbf{A}(\tau)[\mathbf{A}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)]^{-1}.$$

Матрица-функция $\mathbf{H}(\tau)$ имеет своими элементами функции, мероморфные в комплексной плоскости τ, действительные на действительной оси. При наличии нулей и полюсов $\det\{\operatorname{Im}[\mathbf{H}(-i\tau)]\}$ на действительной оси R^1 для построения решения (2.3) можно применить методы, детально разработанные в [8]. Функция $\det\{\operatorname{Im}[\mathbf{H}(-i\tau)]\}$ имеет весьма громоздкий вид и исследование характера распределения её нулей и полюсов в комплексной плоскости τ в общем случае возможно лишь численно. Тем не менее, важный факт наличия у неё полюсов на действительной оси R^1 может быть установлен косвенно на основе исследования вопроса о существовании критических углов раствора α_*, для которых существуют ненулевые обобщенные решения соответствующей однородной краевой задачи в рассматриваемой клиновидной среде. Такое исследование приведено ниже и дает возможность описать явление поверхностных волн в клине.

На основе исследования системы интегральных уравнений (2.3) можно получить представление $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$, где оператор $\mathbf{K}_0$ однозначно обратим, как оператор, действующий в пространствах Соболева–Слободецкого $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$, оператор $\mathbf{K}_1$, действующий в этих же пространствах, вполне непрерывен. Для отыскания решения (2.3) может быть использовано его представление, приведенное в [3], в котором условие $æ_{1,2} > 0$ удается ослабить до условия $\operatorname{Re} æ_{1,2} \geqslant 0$, применяя методы аналитического продолжения. Построенное решение системы (2.3) может быть использовано далее для восстановления поля смещений свободной поверхности. Непосредственное применение для этой цели методов факторизации [8] оказывается затруднительным ввиду наличия счетного множества действительных нулей у функции $K_{-i\tau}(æ_1 r)$ как функции τ.

3. Существование обобщенных однородных решений

Будем рассматривать решение однородной краевой задачи о стационарных колебаниях, как предел решения соответствующей нестационарной задачи при $t \to \infty$, следуя известному в теории колебаний принципу предельной амплитуды [9]. Для реализации сформулированного подхода воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского и введем функционал действия $H(\mathbf{u})$

$$H(\mathbf{u}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} a(\mathbf{u})dt - - \int\limits_{t_1}^{t_2} b(\mathbf{u})dt, \mathbf{u} = \mathbf{u}(r,\theta,t), \quad (3.1)$$

$$\forall\ t_2 > t_1 > 0,$$

$$a(\mathbf{u}) = \iint\limits_{\Omega} W(\mathbf{u}) d\Omega,$$

$$b(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\rho \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)^2 d\Omega,$$

где $W(\mathbf{u})$ — упругий потенциал, ρ — плотность однородной клиновидной среды. Известно, что из условия стационарности $\delta H(\mathbf{u}) = 0$ функционала (3.1) вытекают все соотношения, определяющие начально-краевую задачу для системы уравнений теории упругости:

$$\mu\Delta^*\mathbf{u} - \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \qquad \Delta^*\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\mathbf{u}), \quad (3.2)$$

$$\sigma|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \left.\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbf{0}.$$

Теорема 1. Пусть $\mathbf{u}(r,\phi,t)$ есть обобщенное решение начально-краевой задачи (3.2) в некоторой области Ω, а функция $\mathbf{w}(r,\phi,t) = \tilde{\mathbf{w}}(r,\phi)\exp(-i\omega t)$ — решение соответствующей краевой задачи об установившихся колебаниях в той же области. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|\mathbf{u}(r,\phi,t)\exp(i\omega t) - \tilde{\mathbf{w}}(r,\phi)\|_{H^1(\Omega)} < < C\exp(-\varepsilon\omega t),$$

$$t \to \infty,$$

где $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева, C, $\varepsilon > 0$ — некоторые постоянные.

Доказательство. Воспользуемся методом вариационных неравенств [10]. Выпишем вариационное неравенство, которому удовлетворяет функция $\mathbf{u}(r,\phi,t)$ с указанными выше начальными условиями (для упрощения записи далее зависимость функций от координат r, ϕ будем опускать)

$$\rho\left(\mathbf{u}''(t),\mathbf{v}-\mathbf{u}''(t)\right)+a\left(\mathbf{u}'(t),\mathbf{v}-\mathbf{u}'(t)\right)\geqslant \\ \geqslant\left(\mathbf{f}(t),\mathbf{v}-\mathbf{u}'(t)\right), \quad (3.3)$$

$$\forall\nu(t)\in H^1(\Omega),$$

где выражение (a,b), как обычно, означает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\mathbf{f}(t)$ — вектор массовых сил, которые в дальнейшем будем полагать отсутствующими, а функционал $a(\mathbf{x},\mathbf{y})$ порождается вариацией $\delta A(\mathbf{u})$ в условии стационарности $\delta D(\mathbf{u})=0$. Тогда, если $\mathbf{u}(t)$ — решение вариационного неравенства (3.3) с начальными условиями задачи (3.2), то функция $\mathbf{U}(t)=\int\limits_0^t\mathbf{u}(\tau)d\tau$ есть также решение динамических уравнений (3.2) с начальными условиями $\mathbf{U}(0)=\mathbf{0}$, $\mathbf{U}'(0)=\mathbf{u}_0$ и, следовательно, удовлетворяет неравенству (3.3). Аналогично рассуждая, запишем вариационное неравенство, которому удовлетворяет $\mathbf{w}(r,\phi,t)=\tilde{\mathbf{w}}(r,\phi)\sin(\omega t)$

$$-\rho\omega^2\big(\mathbf{w}(t),\mathbf{v}-\mathbf{w}(t)\big)+ \\ +a\big(\mathbf{w}(t),\mathbf{v}-\mathbf{w}(t)\big)\geqslant 0, \quad (3.4)$$

$$\forall\mathbf{v}\in H^1(\Omega).$$

Заменим в неравенстве (3.3) $\mathbf{u}(t)$ на $\mathbf{U}(t)$, в качестве функции сравнения $\mathbf{v}(t)$ выберем $\mathbf{w}(t)$, а в неравенстве (3.4) выберем $\mathbf{v}(t)=\mathbf{u}(t)$. Тогда неравенства (3.3) и (3.4) принимают соответственно вид

$$\rho\big(\mathbf{u}'(t),\mathbf{w}(t)-\mathbf{u}(t)\big)+ \\ +a\big(\mathbf{u}(t),\mathbf{w}(t)-\mathbf{u}(t)\big)\geqslant 0, \quad (3.5)$$

$$-\rho\omega^2\big(\mathbf{w}(t),\mathbf{u}(t)-\mathbf{w}(t)\big)+ \\ +a\big(\mathbf{w}(t),\mathbf{u}(t)-\mathbf{w}(t)\big)\geqslant 0.$$

Переобозначим $\mathbf{u}(t)-\mathbf{w}(t)=\mathbf{m}(t)$ и сложим почленно неравенства (3.5). В результате получим

$$-\rho\big(\mathbf{m}'(t),\mathbf{m}(t)\big)-\rho\big(\mathbf{w}''(t),\mathbf{m}(t)\big)- \\ -a(\mathbf{m}(t),\mathbf{m}(t))-\rho\omega^2\big(\mathbf{w}(t),\mathbf{m}(t)\big)\geqslant 0. \quad (3.6)$$

С помощью очевидных неравенств

$$\big(\mathbf{w}(t),\mathbf{m}(t)\big)\leqslant \\ \leqslant 1/2\left(\|\tilde{\mathbf{w}}\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\mathbf{m}(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\right),$$

$$\big(\mathbf{w}'(t),\mathbf{m}(t)\big)\leqslant \\ \leqslant 1/2\left(\|\tilde{\mathbf{w}}\|^2_{H^1(\Omega)}+\omega^2\|\mathbf{m}(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\right)$$

и неравенства коэрцитивности

$$a(\mathbf{m}(t),\mathbf{m}(t))\geqslant c\,\|\mathbf{m}(t)\|^2_{H^1(\Omega)},$$

исходное неравенство (3.3) преобразуем к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{m}(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right)+\left(\frac{2c}{\rho}+\omega^2\right)\|\mathbf{m}(t)\|^2_{H^1(\Omega)}+ \\ +(1+\omega^2)\,\|\mathbf{w}\|^2_{H^1(\Omega)}\leqslant 0. \quad (3.7)$$

Из (3.7) вытекает

$$\|\mathbf{m}(t)\|^2_{L_2(\Omega)}-\|\mathbf{m}(0)\|^2_{L_2(\Omega)}+ \\ +2\varepsilon\omega\int\limits_0^t\|\mathbf{m}(s)\|^2_{H^1(\Omega)}\,ds\leqslant 0,$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{2\mathrm{c}}{\rho}}.$$

Этому неравенству можно удовлетворить, рассматривая его на решениях неравенства

$$\|\mathbf{m}(t)\|^2_{H^1(\Omega)}+2\varepsilon\omega\int\limits_0^t\|\mathbf{m}(s)\|^2_{H^1(\Omega)}\,ds\leqslant \\ \leqslant\|\mathbf{m}(0)\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Указанное неравенство рассмотрено в [11], и его решение для рассматриваемого случая имеет вид

$$\|\mathbf{m}(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\leqslant\|\mathbf{m}(0)\|^2_{L_2(\Omega)}\exp(-2\varepsilon\omega t).$$

Дальнейшие рассуждения приводят к результату теоремы 1.

Применим полученный результат для решения вопроса о существовании поверхностных волн в однородной клиновидной среде со свободными границами при отсутствии массовых сил. Тогда указанная проблема, строго говоря, сводится к доказательству существования обобщенных однородных решений задачи для уравнений динамической теории упругости (3.2). При отыскании периодического режима колебаний с помощью принципа предельной амплитуды все рассуждения следует проводить $\forall\ T = [t_1, t_2],\ t_1 \gg 1$. В этом случае начальные условия задачи (3.2) из рассмотрения можно исключить.

Выясним, существуют ли такие углы раствора α_* упругой клиновидной среды Ω, для которых задача (3.2) имеет ненулевые обобщенные решения $\forall\ T = [t_1, t_2],\ t_1 \gg 1$.

Введем функциональное пространство $L_{2,T}\left\{H^1(\Omega)\right\}$ с нормой

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L_{2,T}\{H^1(\Omega)\}} = \int\limits_T \|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt, \qquad (3.8)$$

$$T = (t_1, t_2).$$

Теорема 2. Система функций

$$\Big\{ \exp\big[-i\omega n(t - c^{-1} r\cos\phi) - \\ - \omega c^{-1} n M r \sin\phi \big] \Big\},$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

полна в пространстве $L_{2,T}\left\{H^1(\Omega)\right\}$,

$$\Omega = \{(r, \phi) : 0 < r < \infty, 0 < \phi \leqslant \beta\},$$

$$\forall T = [t_1, t_2]\,.$$

Доказательство использует свойство полноты системы $\left\{z^k\right\}$ в единичном круге $K = \{z : |z| \leqslant 1\}$. Затем применяется теорема Маркушевича–Фаррела [12] об аппроксимации в круге аналитической по z функции $f(z)$, поскольку множество $\{z : z = \exp[-i\omega(t - c^{-1} r\cos\phi) - -\omega c^{-1} M r \sin\phi)]\}$ также представляет единичный круг K .

Лемма. Пусть операторы $\mathbf{B} = \mu\Delta^*$, $\mathbf{A} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ определены $\forall T$ и конечной области Ω в пространстве $L_{2,T}\left\{H^1(\Omega)\right\}$ со скалярным произведением $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, порождающим в этом пространстве норму (3.8). Тогда для спектральной задачи $\mathbf{Au} - \lambda\mathbf{Bu} = \mathbf{0}$ в обобщенной постановке всегда существует хотя бы одно λ, $0 < \lambda \leqslant 1$.

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что любое $\lambda > 1$. Операторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — самосопряженные и положительно определены, причем область определения $\mathbf{B}$ шире области определения $\mathbf{A}$ согласно теореме Куранта–Фишера [13] выберем

$$\lambda = \lambda_1 = \inf \frac{(\mathbf{A}\,\mathbf{u}, \mathbf{u})}{(\mathbf{B}\,\mathbf{u}, \mathbf{u})} > 1.$$

Отсюда вытекает

$$(\mathbf{Bu}, \mathbf{u}) < (\mathbf{A}\,\mathbf{u}, \mathbf{u})\,.$$

Тогда $\forall\omega/N$ на множестве функций сравнения $\mathbf{u} = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n \mathbf{u}_n$ в силу теоремы 2, где

$$\mathbf{u}_n = \exp[-i\omega n(t - c^{-1} r\cos\phi) - \\ - n c^{-1} \omega M r \sin\phi)] \in L_{2,T}\left\{H^1(\Omega)\right\}$$

будем иметь

$$(\mathbf{B}\,\mathbf{u}, \mathbf{u}) < \omega^2 \rho\, (\mathbf{u}, \mathbf{u})\,,$$

причем ω может быть сколь угодно мало. Но тогда оператор $\mathbf{B}$ не будет положительно определенным, что неверно.

Теорема 3. Пусть дифференциальные операторы $\mathbf{B} = \mu\Delta^*$, $\mathbf{A} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ определены $\forall T$ в пространстве $L_{2,T}\left\{H^1(\Omega_{R,\beta})\right\}$ со скалярным произведением $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{R,\beta}$, порождающим в этом пространстве норму (3.8), где $\Omega_{R,\beta}$ конечный сектор круга с радиусом R и углом раствора $\beta \in (0, \pi)$. Тогда $\forall R > 0$ для обобщенной краевой задачи

$$\left\{\begin{aligned} &(\mathbf{A}\,\mathbf{u}, \mathbf{v})_{R,\beta} - \lambda(\beta, R)\,(\mathbf{Bu}, \mathbf{v})_{R,\beta} = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall \mathbf{v} \in C^\infty, \\ &\left([\mathbf{u}]_L\,, \mathbf{v}\right)_{R,\beta} = \left([\bar\sigma]_L\,, \mathbf{v}\right)_{R,\beta} = \\ &\qquad = \Big(\bar\sigma(\mathbf{u})|_{\partial\Omega_{R,\beta}}\,, \mathbf{v}\Big) = 0, \end{aligned}\right. \qquad (3.9)$$

всегда найдется такое $\beta^* \in (0, \pi)$, что $\lambda(\beta^*, R) = 1$, для которого существует обобщенное однородное решение.

Для доказательства используется самосопряженность и положительная определенность операторов $\mathbf{A}$, $-\mathbf{B}$ и применяется минимаксная теорема Куранта–Фишера [13] о существовании дискретного положительного спектра λ задачи (3.9) для произвольного $\beta^0 \in (0, \pi)$. Согласно лемме, найдется такое $N \geqslant 1$ и такие, ближайшие к 1 значения $\lambda_N(\beta^0), \lambda_{N+1}(\beta^0)$, что

$\lambda_N(\beta^0) < 1 < \lambda_{N+1}(\beta^0)$ (зависимость отRопущена для упрощения записи). Затем $\forall R > 0$ устанавливается существование угла β^1 такого, что $\lambda_N(\beta^0) \leqslant \lambda_{N+1}(\beta^0) \leqslant \lambda_N(\beta^1)$. В силу голоморфности $\lambda_N(\beta)$ как функции β [14] существует β между β^0 и β^1 такое, что $\lambda_N(\beta^*) = 1$ для заданного $R > 0$. Если окажется $\lambda_N(\beta^1) < 1$, то, поскольку спектральное множество может иметь точку сгущения только на бесконечность, описанный выше процесс будет продолжен до тех пор, пока на некотором n-ом этапе не окажется $\lambda_N(\beta^n) > 1$. Тогда можно вновь применить приведенное выше последнее рассуждение. Теорема доказана.

Теорема 4. В условиях теоремы 3 выберем вместо сектора $\Omega_{\beta,R}$ бесконечную угловую область Ω_β с углом раствора β. Тогда существует $\beta = \alpha_*$, $\lambda_1(\alpha_*) = 1$, для которого существует решение соответствующей спектральной задачи (3.9).

Для доказательства рассматривается минимум функционала

$$H(\mathbf{u}) = \int_{t_1}^{t_2} a(\mathbf{u})dt - \int_{t_1}^{t_2} b(\mathbf{u})dt = \\ = (\mathbf{Au}, \mathbf{u})_\beta - (\mathbf{Bu}, \mathbf{u})_\beta \geqslant -\frac{1}{2},$$

$$(\mathbf{B}(\mathbf{u}), \mathbf{u})_\beta = 1$$

на вектор-функциях

$$\hat{\mathbf{u}}_R = \begin{cases} \mathbf{u}_1(r, \phi, t), & r \leqslant R, \\ \mathbf{0}, & r > R, \end{cases}$$

таких, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется $R > 0$ и $\|\hat{\mathbf{u}}_R - \mathbf{u}_1\|_{L_{2,T}\{H^1(\Omega)\}} < \frac{\varepsilon}{2}$, где

$$\lambda = \lambda_1 = \inf\left(\mathbf{A}\,\mathbf{u}, \mathbf{u}\right)_\beta = \left(\mathbf{A}\,\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\right)_\beta,$$

$$(\mathbf{Bu}_1, \mathbf{u}_1)_\beta = 1.$$

Пусть $\mathbf{u}_R^*$ — функция, на которой достигается

$$\inf\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}\right)_{R,\beta} = \left(\mathbf{A}\,\mathbf{u}_R^*, \mathbf{u}_R^*\right)_{R,\beta} = \lambda_1^R.$$

Существование предела

$$\lim_{R\to\infty} \lambda_1^R = \lambda_1^\infty = \lambda_1(\beta) = \\ = \inf\left(\mathbf{Au}, \mathbf{u}\right)_\beta = (\mathbf{Au}_1, \mathbf{u}_1)_\beta$$

устанавливается из неравенства

$$\left|\lambda_1^R - \lambda_1^{R+p}\right| < \\ < \left|(\mathbf{Au}_R^*, \mathbf{u}_R^*)_\beta - \left(\mathbf{Au}_{R+p}^*, \mathbf{u}_{R+p}^*\right)_\beta\right| < \varepsilon.$$

Используя результат теоремы 3 и переходя в равенстве $\lambda_1^R = 1$ к пределу при $R \to \infty$, получим $\lambda_1^\infty = 1$. Отсюда, в силу голоморфности $\lambda_1^(\beta)$ [13] вытекает для Ω_β существование критического угла $\beta = \alpha_*$, такого, что $\lambda_1(\alpha_*) = 1$.

4. Отыскание скоростей поверхностных волн и критических углов раствора клиновидной среды

Для нахождения скоростей исследуемых поверхностных волн, связанных с действительными полюсами функции $\det\{\mathrm{Im}\,[\mathbf{H}(-i\tau)]\}$, будем отыскивать решение однородной краевой задачи для клиновидной среды с помощью функционально-инвариантных решений волнового уравнения, называемых плоскими «комплексными» волнами Смирнова–Соболева [2]. Представления общего решения динамических уравнений для вектора смещений $\mathbf{V}(r, \theta, t)$ в рассматриваемом случае выберем в видоизменённой форме [6]

$$2\mu\mathbf{V} = -\nabla F + 4(1-\nu)\mathbf{\Psi}, F(r,\theta) = \\ = \Psi_0(r,\theta) + r\Psi_r(r,\theta),$$

$$\begin{cases} \Psi_r = \Psi_1(r,\theta,t)\cos(\alpha-\theta) + \\ \qquad + \Psi_2(r,\theta,t)\sin(\alpha-\theta), \\ \Psi_\theta = -\Psi_1(r,\theta,t)\sin(\alpha-\theta) + \\ \qquad + \Psi_2(r,\theta,t)\cos(\alpha-\theta), \end{cases}$$

$$\mathbf{\Psi} = \left\{\Psi_r(r,\theta,t), \Psi_\theta(r,\theta,t)\right\},$$

$$\nabla^2\Psi_k - \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\Psi_k}{\partial t^2} = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\nabla^2\Psi_0 - \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial t^2} = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{s^2}\right) r\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial t^2},$$

где функции Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 после ряда преобразований представляются в виде

$$\Psi_1(r,\theta,t) = \sqrt{1 - c^2/s^2}\times \\ \times \mathrm{Im}\, f\left[t - c^{-1}r\cos(\alpha-\theta) - \\ - ic^{-1}r\sin(\alpha-\theta)\sqrt{1-c^2/s^2}\right], \quad (4.1)$$

$$\Psi_2(r,\theta,t) = \operatorname{Re} f\biggl[t - c^{-1}r\cos(\alpha-\theta) - \\ - ic^{-1}r\sin(\alpha-\theta)\sqrt{1-c^2/s^2}\biggr],$$

$$\Psi_0(r,\theta,t) = \operatorname{Re} f_0\biggl[t - c^{-1}r\cos(\alpha-\theta) - \\ - ic^{-1}r\sin(\alpha-\theta)\sqrt{1-c^2/p^2}\biggr] - \\ -r\left[\Psi_1(r,\theta,t)\cos(\alpha-\theta) + \Psi_2(r,\theta,t)\sin(\alpha-\theta)\right],$$

$$0<\theta<\alpha<\pi.$$

В соотношениях (4.1) $f(z)$, $f_0(z)$ — произвольные аналитические функции комплексного аргумента z, а величины s, p — скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно, с — произвольный параметр, имеющий размерность фазовой скорости. При задании режима установившихся гармонических колебаний среды указанные функции выберем в виде

$$f(z) = B\exp(-i\omega z), \quad f_0(z) = D\exp(-i\omega z),$$

где B, D — произвольные постоянные. Тогда, как следует из (4.1), амплитуда искомых волн будет экспоненциально затухать при удалении по нормали от линии $\theta=\alpha$, что, как известно, может соответствовать случаю возникновения поверхностных волн. Удовлетворяя условию свободной границы $\theta=\alpha$, приходим к следующему уравнению, имеющему действительный корень $1<x<2$ (c_* — скорость распространения поверхностной волны)

$$R(x) = \left[(1+\gamma^2)x - 1\right](x-0,5) - \\ - 2x\sqrt{x-\gamma^2}\sqrt{x-1} = 0, \quad (4.2)$$

$$x = s^2/c_*^2, \quad \gamma^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad 0<\nu<1/2.$$

Последнее устанавливается непосредственной проверкой наличия перемены знака функции $R(x)$ на положительной части действительной оси, а именно: $R(0)$, $R(1)>0$, $R(x)<0$ при $x\geqslant 2$. При этом, как следует из (4.2), эта волна не обладает дисперсией и является волной релеевского типа.

Для отыскания критических значений α_* углов раствора, при которых в клиновидной среде Ω возникают описанные выше поверхностные волны на свободной границе $\partial\Omega$, будем отыскивать точки стационарности (обобщенные однородные решения) функционала действия (3.1) на множестве решений (4.1).

Произвольные аналитические функции в соотношениях (4.1) выберем в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k, \quad f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^k,$$

$$z = \exp\bigl[-i\omega(t - c^{-1}r\cos\phi) - \\ - \omega c^{-1}rM\sin\phi)\bigr],$$

$$\zeta = \exp\bigl[-i\omega(t - c^{-1}r\cos\phi) - \\ - \omega c^{-1}mr\sin\phi)\bigr], \quad (4.3)$$

$$M = \sqrt{1-c^2/s^2}, \quad m = \sqrt{1-c^2/p^2}, \\ \phi = \alpha - \theta.$$

В выражениях (4.3) повтор скорости поверхностных волн $c = c_*$ определяются уравнением (4.2).

Для нахождения точек стационарности функционала $H(\mathbf{u})$ полагаем $\delta H(\mathbf{u}) = H(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$. Следуя методу Трефтца [13], применим теорему 2 для аппроксимации функций $f(z)$, $f_0(z)$ и их производных в круге $|z|\leqslant 1$ конечными линейными комбинациями $\{z^k\}$, $\{\zeta^k\}$, $k=1,2,\ldots,N$. Тогда аппроксимация вектора смещений $\mathbf{u}\approx\mathbf{u}_N$ с учетом (4.3) будет иметь вид

$$\mathbf{u}_N(r,\phi,t) = \sum_{k=1}^{N} B_k^{(N)}\mathbf{u}_k(r,\phi,t) = \\ = \sum_{k=1}^{N} B_k^{(N)}\left[\Delta\mathbf{M}(z^k) + \tilde{\mathbf{m}}(\zeta^k)\right], \quad (4.4)$$

$$\Delta = -(1-\nu)s\sqrt{x}\frac{2m}{1+m^2}, \quad (r,\phi)\in\Omega.$$

В формулах (4.4) вектор-функции $\mathbf{M}(z)$, $\mathbf{m}(\zeta)$ выбраны так, что $\mathbf{u}_k$ $\forall k\geqslant 1$ удовлетворяет однородным условиям на границе $\theta=\alpha$ клиновидной среды Ω. Тогда $H(\mathbf{u}-\mathbf{u}_N)<\varepsilon$, $N>N_0$ при условии $(B(\mathbf{u}_N),\mathbf{u}_N)=1$. Коэффициенты $B_k^{(N)}$ подлежат определению из условия отыскания $\min H(\mathbf{u}-\mathbf{u}_N)$, т.е. $\delta H(\mathbf{u}-\mathbf{u}_N)=0$. Применяя метод Лагранжа нахождения условного минимума функционала $H(\mathbf{u})$ и учитывая, что для отыскания критических углов раствора α_* параметр Лагранжа $\lambda(\alpha)$ следует выбрать в виде $\lambda(\alpha_*)=1$ (это оказывается возможным в силу результата теоремы 4), приходим к соотношениям относительно неизвестных коэффициентов $B_k^{(N)}$

$$H(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}-\mathbf{u}_N) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, N.$$

Согласно формуле Грина имеем

$$H(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\int_{t_1}^{t_2}\iint_{\Omega}\mu\Delta^*\mathbf{v}\mathbf{w}d\Omega dt + \int_{t_1}^{t_2}\iint_{\Omega}\rho\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}\mathbf{w}d\Omega dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega}\mathbf{q}(\mathbf{v})\mathbf{w}dldt - \iint_{\Omega}\mathbf{w}\left.\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right|_{t_1}^{t_2}d\Omega = 0, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{q} = \{\sigma_\theta, \tau_{r\phi}\}.$$

Выбирая в формуле (4.5) $\mathbf{w} = \mathbf{u}_m$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}-\mathbf{u}_N$, и, учитывая, что функции $\mathbf{u}-\mathbf{u}_N$ должны удовлетворять динамическим уравнениям (3.2), получаем из (4.5) систему

$$\sum_{n=1}^{N} B_n^{(N)}\left[\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega}\sigma(\mathbf{u}_n)\mathbf{u}_m dldt - \iint_{\Omega}\mathbf{u}_n\left.\frac{\partial\mathbf{u}_m}{\partial t}\right|_{t_1}^{t_2}d\Omega\right] = 0, \quad (4.6)$$

$$m = 1, 2, \ldots, N.$$

В (4.6) учтены условия сопряжения и граничные условия $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$, dl — элемент границы. Соотношение (4.6) справедливо $\forall t_{1,2} \in R_+^1$. Пользуясь тем, что отыскиваемые решения периодические с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, согласно (4.3), выберем произвольно натуральное $P \gg 1$, а в качестве интервала $[t_1, t_2]$ выберем интервал $\left[\frac{2\pi P}{\omega}, \frac{2\pi(P+1)}{\omega}\right]$ длины $\frac{2\pi}{\omega}$. При этом единственными ненулевыми коэффициентами в сумме (4.6) оказываются лишь диагональные элементы в первых слагаемых при $n = m$, имеющих один и тот же общий множитель. Тогда обращение его в нуль является условием разрешимости однородной системы (4.6), порождающим следующие уравнения для отыскания критических углов раствора $0 < \alpha_* < \pi$ клиновидной среды в случае возникновения в ней каналовых волн:

$$\operatorname{tg}^2\alpha_* = \frac{\Delta^2(2-0,5/x)+G}{m(m-\gamma^2)+F-\Delta^2(2-0,5/x)}, \quad (4.7)$$
$$\operatorname{ctg}\alpha_* = 0,$$

$$G = \Delta(M+m)^{-1}\times \left(1-m^2-2Mm-\gamma^2-0,5/x\right)-1+m^2,$$

$$F = \Delta(M+m)^{-1}\times \left[M(1+\gamma^2)+m^2(1-\gamma^2)+(1-M)^2-0,5/x\right],$$

$$m = \sqrt{1-x^{-1}}, \quad M = \sqrt{1-\gamma^2 x^{-1}}.$$

Величины x, γ^2 определяются соотношениями (4.2). Решения первого из уравнений (4.7) существуют при условии положительности правой части и находятся численно для различных значений входящих в него параметров. С помощью формул (4.2), (4.7) численный анализ скоростей c_* и соответствующих им критических углов раствора $0 < \alpha_* < \pi$ клиновидных сред проводился для наиболее характерных геологических пород приповерхностного слоя земной коры. Результаты расчетов приведены в таблице.

Как следует из таблицы, скорость поверхностной волны в клиновидной среде для представленных материалов оказывается меньше скорости волны сдвига, но больше скорости волны Релея в полупространстве для тех же материалов [15]. Из второго уравнения (4.7) вытекает, что при колебаниях линейно-упругой клиновидной среды с углом раствора $\alpha_* = 90°$, на её свободной границе возникают поверхностные волны, что, в частности, согласуется с [5].

Литература

1. *Морозов Н. Ф., Суровцова И. Л.* Задача о динамическом нагружении плоских упругих областей с угловыми точками контура // ПММ. 1997. Т. 61. №4. С. 654–659.
2. *Исраилов М. Ш.* Динамическая теория упругости и дифракция волн. М.: МГУ, 1992. 204 с.
3. *Беркович В. Н.* К теории смешанных задач динамики наклонно-слоистой среды // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №2. С. 16–22.
4. *Budaev B. V., Bogy D. B.* Diffraction by a plane sector // Proc. Roy. Soc. A. 2006. P. 3529–3546.

Скорости волн и критические углы раствора клиновидной среды

№	Материал	Скорость волны сдвига s, км/с	Скорость поверхностной волны Релея в полупространстве c_R, км/с	Скорость поверхностной волны в клине c_*, км/с	Критический угол раствора клина α_*, град
1	Почвы песчано-глинистые, сухие	0,100 0,150 0,200 0,300	0,092 0,138 0,184 0,276	0,0997 0,1496 0,199 0,299	81,9 81,2 80,6 79,4
2	Мерзлота, лед	1,250 1,350 1,450	1,150 1,242 1,334	1,247 1,346 1,446	70,6 69,9 69,1
3	Известняк	1,300 1,420 1,520	1,196 1,306 1,394	1,296 1,393 1,416	70,2 69,3 68,5
4	Глина водонасыщенная	1,750 1,850	1,610 1,702	1,745 1,845	66,8 66,0

5. *Budaev B. V., Bogy D. B.* Diffraction of a plane skew electromagnetic wave by a wedge with general anisotropic impedance boundary conditions // Antennas and Propagation. IEEE Trans. 2006. Vol. 54. No. 5. P. 1559–1567.
6. *Зильберглейт А. С., Златина И. Н.* О некоторых общих представлениях решения динамических уравнений теории упругости // ДАН СССР. 1976. Т. 227. №1. С. 71–74.
7. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1972. 401 с.
8. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
9. *Бабич В. М., Капилевич М. Б и др.* Линейные уравнения математической физики. Серия СМБ. М.: Наука, 1964. 368 с.
10. *Kinderlehrer D., Stampacchia G.* An Introduction to Variational Inequalities and there applications. New York, London, Toronto, Sydney, San Francisko: Academic Press, 1980. 254 p. (*Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения / Пер. с англ. Г. Г. Магарил-Ильяева. М.: Мир. 1983. 256 с.).
11. *Beckenbach E., Bellman R.* Inequalities. Berlin: Sprinder, 1961. 273 p. (*Беккенбах Э., Беллман Р.* / (Имеется перевод: Неравенства / Пер. с англ. Г. И. Басса. М.: Мир, 1965. 276 с.).
12. *Gaier D.* Vorlesungen über approximation in komplexen. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser, 1980. 215 p. (*Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области / Пер. с нем. Л. М. Карташова. М.: Мир, 1986. 216 с.).
13. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
14. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1966. 736 pp. (*Като Т.* Теория возмущений линейных операторов / Пер. с англ. Г. А. Воропаевой. М.: Мир, 1972. 740 с.).
15. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова Думка, 1981. 284 с.

Ключевые слова: клиновидная среда, обобщенное однородное решение, функционально-инвариантное решение, поверхностная волна, критический угол.

Статья поступила 1 августа 2008 г.

Филиал Московского государственного университета технологий и управления, г. Ростов-на-Дону