

УДК 512.516.5

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РОССБИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Свидлов А. А.¹

ON THE INITIAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE ROSSBY EQUATION IN A BOUNDED DOMAIN

Svidlov A. A.

An initial boundary-value problem for the Rossby equation in a bounded domain is considered. The existence and uniqueness of the generalized solution is proved. An algorithm for constructing an approximate solution is given.

Keywords: Rossby equation, generalized solution, approximate solution.

1. Постановка задачи

В работе используются следующие обозначения: R^2 — евклидово пространство векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$; Q — ограниченная область в R^2 с кусочно-гладкой границей ∂Q ; $\bar{Q}$ — замыкание области Q . $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ — градиент по пространственным переменным; $C^k(Q)$ и $C^k(\bar{Q})$ — банаховы пространства k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных в области Q и ее замыкании $\bar{Q}$ соответственно, $H^1(Q)$ и $\dot{H}^1(Q)$ — соболевские пространства [8]; $C^k([0, +\infty), V)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[0, +\infty)$ со значениями в банаховом пространстве V .

В геофизической гидродинамике изучаются волны в океане, возникновение которых обуславливается вращением Земли. Эти волны носят название планетарных. Планетарные волны распространяются параллельно поверхности океана, что позволяет ограничиться изучением плоских движений жидкости. Движение планетарных волн описывается уравнением Россби в приближении β -плоскости [1]

$$\Delta \Psi_t(\mathbf{x}, \tau) + \beta \Psi_{x_1}(\mathbf{x}, \tau) = g(\mathbf{x}, \tau).$$

Здесь Ψ — функция тока, связанная с вектором скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ следующим образом: $v_1 = \Psi_{x_2}$, $v_2 = -\Psi_{x_1}$, $\beta = \frac{2\Omega}{R} \cos \theta$, где

Ω — угловая скорость вращения Земли, R — её радиус, θ — северная широта, τ — время, $g(\mathbf{x}, \tau)$ — внешнее силовое воздействие. Величину β можно считать постоянной, тогда после замены $t = \beta\tau$, $u(\mathbf{x}, t) = \Psi(\mathbf{x}, \frac{t}{\beta})$, $f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\beta}g(\mathbf{x}, \frac{t}{\beta})$ приходим к уравнению

$$\Delta u_t(\mathbf{x}, t) + u_{x_1}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t). \quad (1.1)$$

Уравнение Россби в форме (1.1) приводится в работах [2–5].

2. Первая начально-краевая задача для уравнения Россби

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения Россби:

$$\Delta u_t(\mathbf{x}, t) + u_{x_1}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x} \in Q, \quad t > 0,$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q, \quad (2.2)$$

$$u(\mathbf{x}, t)|_{\partial Q} = 0. \quad (2.3)$$

Классическим решением задачи (2.1)–(2.3) будем называть функцию

$$u(\mathbf{x}, t) \in C^1([0, +\infty), C^2(\bar{Q})),$$

удовлетворяющую уравнению (2.1) и условиям (2.2), (2.3).

Обобщенным решением задачи (2.1), (2.3) будем называть функцию

$$u(\mathbf{x}, t) \in C^1([0, +\infty), \dot{H}^1(Q)),$$

¹Свидлов Александр Анатольевич, аспирант кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: svidlov@mail.ru.

для которой выполняются условия:

1) для любой функции $h(\mathbf{x}) \in \dot{H}^1(Q)$ справедливо

$$\begin{aligned} \int_Q [\nabla u_t(\mathbf{x}, t) \nabla h(\mathbf{x}) - u_{x_1}(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = \\ = - \int_Q f(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.4) \end{aligned}$$

2) $u(\mathbf{x}, 0) = u_0$.

Установим связь между классическим и обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3).

ЛЕММА 1. Классическое решение является обобщенным.

Доказательство. Пусть $u(\mathbf{x}, t)$ — классическое решение. Тогда $u(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет условию 2 для обобщенного решения. Так как для классического решения выполнено условие (2.3), то $u(\mathbf{x}, t) \in C^1([0, +\infty), \dot{H}^1(Q))$. Производная $u_t(\mathbf{x}, t)$ в $C^1([0, +\infty), C^2(\bar{Q}))$ является производной и в $C^1([0, +\infty), \dot{H}^1(Q))$.

Для любой функции $h(\mathbf{x}) \in \dot{H}^1(Q)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_Q [\Delta u_t(\mathbf{x}, t) + u_{x_1}(\mathbf{x}, t)] h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ = \int_Q f(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_Q \Delta u_t(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ = \int_Q [\operatorname{div}(\nabla u_t(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x})) - \nabla u_t(\mathbf{x}, t) \nabla h(\mathbf{x})] d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \int_Q [-\operatorname{div}(\nabla u_t(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x})) + \\ + \nabla u_t(\mathbf{x}, t) \nabla h(\mathbf{x}) - u_{x_1}(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = \\ = - \int_Q f(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом равенства

$$\int_Q \operatorname{div}(h(\mathbf{x}) \nabla u_t(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = 0$$

следует, что

$$\begin{aligned} \int_Q [\nabla u_t(\mathbf{x}, t) \nabla h(\mathbf{x}) - u_{x_1}(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = \\ = - \int_Q f(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция u удовлетворяет соотношению (2.4). Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 2. Если обобщенное решение $u(\mathbf{x}, t) \in C^1([0, +\infty), C^2(\bar{Q}))$, то оно является классическим.

Доказательство. Очевидно, что начальное и краевое условие выполняются, остается лишь доказать, что во внутренней точке $\mathbf{x}$ выполняется равенство

$$\Delta u_t(\mathbf{x}, t) + u_{x_1}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t).$$

Преобразуя интегральное тождество (2.4), аналогично тому, как это было проведено при доказательстве леммы 1, получим

$$\int_Q (\Delta u_t(\mathbf{x}, t) + u_{x_1}(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t)) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0,$$

для любого $h(\mathbf{x}) \in \dot{H}^1(Q)$. Из полноты $\dot{H}^1(Q)$ в $L_2(Q)$ и непрерывности функции $\Delta u_t(\mathbf{x}, t) + u_{x_1}(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t)$ следует, что

$$\Delta u_t(\mathbf{x}, t) + u_{x_1}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$$

в области Q для $t > 0$. Лемма доказана. $\square$

Введем понятие обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Пусть функция $\psi(\mathbf{x}) \in L_2(Q)$. Обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta \phi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in Q, \\ \phi(\mathbf{x})|_{\partial Q} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

называется функция $\phi(\mathbf{x}) \in \dot{H}^1(Q)$, удовлетворяющая условию

$$\int_Q \nabla \phi(\mathbf{x}) \nabla h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_Q h(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

для всех $h(\mathbf{x}) \in \dot{H}^1(Q)$.

Определим оператор $\Delta^{-1} : L_2(Q) \rightarrow \dot{H}^1(Q)$ следующим образом: $\Delta^{-1} \psi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$, если $\phi(\mathbf{x})$ — обобщенное решение задачи (2.5). Справедливо следующее неравенство $\|\Delta^{-1} \psi(\mathbf{x})\|_{\dot{H}^1(Q)} \leq C \|\psi(\mathbf{x})\|_{L_2(Q)}$, C зависит только от размера области Q [6].

Рассмотрим оператор $A : H^1(Q) \rightarrow \dot{H}^1(Q)$, который определяется равенством

$$Au(\mathbf{x}) = -\Delta^{-1} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1}.$$

Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|Au(\mathbf{x})\|_{\dot{H}^1(Q)} &\leq \\ &\leq C \|u_{x_1}(\mathbf{x})\|_{L_2(Q)} \leq C \|u(\mathbf{x})\|_{H^1(Q)}, \end{aligned}$$

следовательно, оператор A является непрерывным.

ТЕОРЕМА. *Обобщенное решение $u(\mathbf{x}, t)$ задачи (2.1) существует и единственно, если $u_0(\mathbf{x}) \in \dot{H}^1(Q)$ и $f(\mathbf{x}) \in C([0, +\infty), L_2(Q))$. При этом оно имеет вид*

$$u = \exp(tA) \left(u_0 + \int_0^t \exp(-\tau A) \Delta^{-1} f(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right).$$

Доказательство. Пусть обобщенное решение u задачи (2.1) существует, тогда для него выполняется равенство (2.4), которое перепишем в виде

$$\begin{aligned} \int_Q \nabla u_t(\mathbf{x}, t) \nabla h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ = - \int_Q (f(\mathbf{x}, t) - u_{x_1}(\mathbf{x}, t)) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что u_t — обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона (2.5) с правой частью $f - u_{x_1}$, или

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \Delta^{-1} (f(\mathbf{x}, t) - u_{x_1}(\mathbf{x}, t)).$$

Следовательно, если u — обобщенное решение (2.1), то u удовлетворяет дифференциальному уравнению в банаховом пространстве $\dot{H}^1(Q)$

$$u_t(\mathbf{x}, t) = Au(\mathbf{x}, t) + \Delta^{-1} f(\mathbf{x}, t). \quad (2.6)$$

Справедливо и обратное, если функция u удовлетворяет уравнению (2.6), то она удовлетворяет условию 1 определения обобщенного решения. Это следует из того, что преобразования, выполненные при получении уравнения (2.6), обратимы.

Решение уравнения (2.6), для которого выполняется начальное условие $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$, существует и единственно, причем выражается формулой [7]

$$u = \exp(tA) \left(u_0 + \int_0^t \exp(-\tau A) \Delta^{-1} f(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right).$$

Теорема доказана. $\square$

3. Приближенное решение

Для однородного уравнения Россби будем строить приближенное решение, представленное в виде ряда.

Вычислять Av точно для произвольной области Q затруднительно, поэтому будем полагать, что Av аппроксимируется $A_h v$ для некоторых $v \in C^1(Q)$, а линейный оператор $A_h : C^1(\bar{Q}) \rightarrow C^1(\bar{Q})$ может быть реализован каким-либо образом. Пусть оператор A_h таков, что для некоторого множества $M_\delta \subset C^1(\bar{Q})$ выполняется неравенство

$$\|Av - A_h v\|_{H^1(Q)} < \delta.$$

Пусть N — натуральное число. Рассмотрим последовательность $A_h, \dots, A_h^N$. Справедливо следующее утверждение: если $v, A_h v, \dots, A_h^N v \in M_\delta$, то

$$\begin{aligned} \|A^k v - A_h^k v\|_{H^1(Q)} < \\ < \delta(1 + \|A\| + \|A\|^2 + \dots + \|A\|^k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

для $k \leq N$.

Далее будем предполагать, что все функции, от которых вычисляется значение оператора A_h , принадлежат M_δ . Функции $u_i(\mathbf{x})$, аппроксимирующие решение $u(\mathbf{x}, t_i)$, где $t_i = i\Delta t$ (Δt — шаг по времени), строятся по формуле

$$u_{i+1} = \sum_{k=0}^N \frac{(tA_h)^k}{k!} u_i, \quad (3.2)$$

функция u_0 определяется начальным условием.

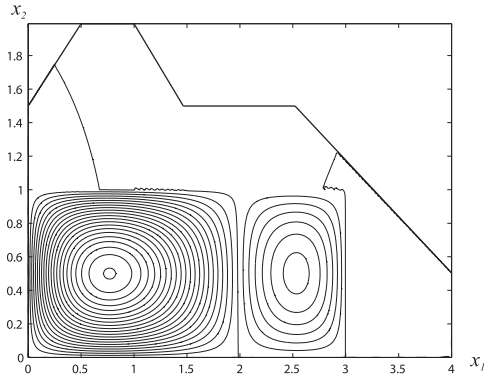
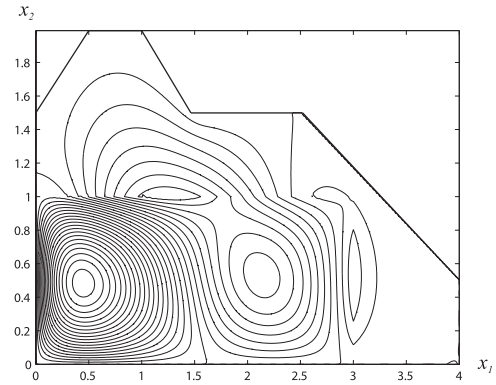
Оценим невязку $u_{i+1}(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}, t_{i+1})$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \left\| u(\mathbf{x}, t_{i+1}) - \sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!} u(\mathbf{x}, t_i) \right\|_{H^1(Q)} < \\ < C_1 \Delta t^{N+1} \|u(\mathbf{x}, t_i)\|_{H^1(Q)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!} u_i(\mathbf{x}) - \sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!} u(\mathbf{x}, t_i) \right\|_{H^1(Q)} \leq \\ \leq e^{\|A\|\Delta t} \|u(\mathbf{x}, t_i) - u_i\|_{H^1(Q)}. \end{aligned}$$

Используя (3.1), имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!} u_i(\mathbf{x}) - \sum_{k=0}^N \frac{(tA_h)^k}{k!} u_i(\mathbf{x}) \right\|_{H^1(Q)} \leq \\ \leq C_2 \delta \Delta t. \end{aligned}$$

Рис. 1. $u(\mathbf{x}, 0)$ Рис. 2. $u(\mathbf{x}, 5)$

Складывая выше приведенные неравенства, получим

$$\begin{aligned} \|u_{i+1} - u(\mathbf{x}, t_{i+1})\|_{H^1(Q)} &\leq \\ &\leq C_2 \delta \Delta t + e^{\|A\| \Delta t} \|u(\mathbf{x}, t_i) - u_i\|_{H^1(Q)} + \\ &+ C_1 \Delta t^{N+1} \|u(\mathbf{x}, t_i)\|_{H^1(Q)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|u_{i+1} - u(\mathbf{x}, t_{i+1})\|_{H^1(Q)} = O(\delta t_i)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$.

4. Результаты численного эксперимента

Задача 1. Рассмотрим тестовую задачу для проверки предложенного алгоритма.

Пусть область $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, правая часть $f \equiv 0$, начальное условие $u_0(\mathbf{x}) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi \sqrt{2} x_1)$. Решением поставленной задачи является функция [8]

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) = &\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \times \\ &\times \left(\cos(x_1 \pi \sqrt{2}) \cos\left(\frac{t\sqrt{2}}{4\pi}\right) - \right. \\ &\left. - \sin(x_1 \pi \sqrt{2}) \sin\left(\frac{t\sqrt{2}}{4\pi}\right) \right). \end{aligned}$$

Погрешность при $\Delta t = 0,1$ и $N = 1$ в формуле (3.2) на первом шаге

$$\|u(\mathbf{x}, \Delta t) - u_1(\mathbf{x})\|_{H^1(Q)} \approx 0,00012,$$

$$\|u(\mathbf{x}, \Delta t) - u_1(\mathbf{x})\|_{L_2(Q)} \approx 0,00002,$$

через 1000 шагов

$$\|u(\mathbf{x}, t_{1000}) - u_{1000}(\mathbf{x})\|_{H^1(Q)} \approx 0,14,$$

$$\|u(\mathbf{x}, t_{1000}) - u_{1000}(\mathbf{x})\|_{L_2(Q)} \approx 0,03.$$

Погрешность при $\Delta t = 0,1$ и $N = 2$ в формуле (3.2) на первом шаге

$$\|u(\mathbf{x}, \Delta t) - u_1(\mathbf{x})\|_{H^1(Q)} \approx 3 \cdot 10^{-6},$$

$$\|u(\mathbf{x}, \Delta t) - u_1(\mathbf{x})\|_{L_2(Q)} \approx 5 \cdot 10^{-7},$$

через 1000 шагов

$$\|u(\mathbf{x}, t_{1000}) - u_{1000}(\mathbf{x})\|_{H^1(Q)} \approx 0,0023,$$

$$\|u(\mathbf{x}, t_{1000}) - u_{1000}(\mathbf{x})\|_{L_2(Q)} \approx 0,0005.$$

Причем $\|u(\mathbf{x}, t)\|_{H^1(Q)} \approx 2,2$ при $t \in [0, 100]$.

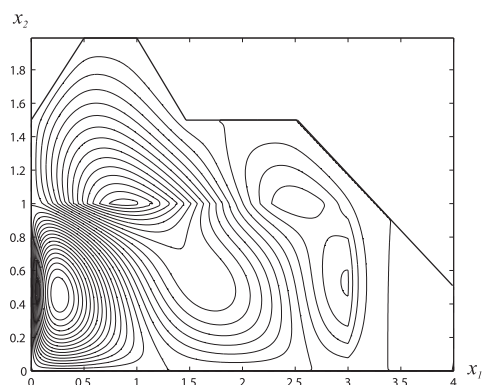
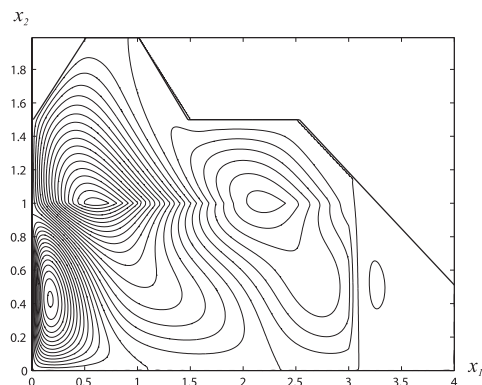
Задача 2. Рассмотрим результаты расчетов для области, имитирующей Черноморскую акваторию. Область Q ограничена слева прямой $x_1 = 0$, справа — $x_1 = 4$, снизу — $x_2 = 0$, сверху — ломаной $ABCDEF$; правая часть $f \equiv 0$, начальное условие

$$u_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} (3 - x_1)x_1(x_1 - 2)x_2(1 - x_2), \\ \quad \mathbf{x} \in [0; 3] \times [0; 1] \\ 0, \quad \mathbf{x} \in Q \text{ и } \mathbf{x} \notin [0; 3] \times [0; 1], \end{cases}$$

Координаты точек ломаной — $A(0; 1,5)$, $B(0,5; 2)$, $C(1; 2)$, $D(1,5; 1,5)$, $E(2,5; 1,5)$, $F(4; 0,5)$. При вычислениях в формуле (3.2) $\Delta t = 0,1$ и $N = 2$.

На рис. 1–4 изображены линии уровня функции $u(\mathbf{x}, t)$, полученные приближенно, для разных значений времени $t = 0, 5, 10, 15$.

Автор выражает глубокую признательность Лежневу В. Г. и Дроботенко М. И. за постановку задачи и обсуждение результатов.

Рис. 3. $u(\mathbf{x}, 10)$ Рис. 4. $u(\mathbf{x}, 15)$

Литература

1. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М., Наука, 1982. 336 с.
2. Успенский С. В., Демиденко Г. В. О поведении при $t \rightarrow \infty$ решений некоторых задач гидродинамики // ДАН СССР. 1985. Т. 280. № 5. С. 1072–1075.
3. Тикуляйнен А. А. Об одной задаче, связанной с теорией планетарных волн // ЖВМ и МФ. 1988. Т. 28. № 4. С. 534–548.
4. Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 424 с.
5. Свешиников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа. М.: Физматлит, 2007. 736 с.
6. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 425 с.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 488 с.
8. Лежнёв В. Г. Асимптотические задачи линейной гидродинамики. Краснодар: Изд-во КубГУ, 1993. 92 с.

Ключевые слова: уравнение Россби, обобщенное решение, приближенное решение

Статья поступила 16 июня 2008 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Свидлов А. А., 2008