УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ С УПРУГИМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

Шихман В. М.[1]

INTERACTION OF A SURFACE WAVE WITH AN ELASTIC OBSTACLE

Shikhman V. M.

The work considers a mechanical system, which contains an elastic half-strip rigidly coupled with an elastic half-plane. A harmonic surface Rayleigh wave propagates on the free boundary of the half-plane. The application of the Reissner variational principle and the methods of generalized summation of rows reduces the problem of identifying strains expansion coefficients to the solution of a finite algebraic system. The numerical analysis of wave fields has been carried out.

Keywords: Rayleigh-Lamb wave, elastic obstacle, diffraction, half-strip.

Проблема динамического контакта упругих тел остается актуальной и привлекает большое внимание исследователей. Практическое применение этих задач связано с развитием акустических методов неразрушающего контроля, в частности, метода акустической эмиссии для технической диагностики ответственных изделий, в том числе строительных и гидротехнических сооружений. Часто, особенно при контроле нагретых объектов, например, корпусов и толстостенных трубопроводов реакторов применяют упругие волноводы, контактирующие с объектом контроля и выводящие приемные преобразователи из зоны нагрева. Наиболее трудным этапом при решении динамических контактных задач является построение решения, правильно отражающего существующую особенность (сингулярность) в угловых точках, где происходит смена типа граничных условий [1]. Наличие особенности оказывает существенное влияние на решение поставленных задач. Методы, в которых не учитываются особенности, могут дать удовлетворительное решение только вдали от угловых точек.

В работе [2] на основе метода суперпозиции проведен расчет дифракции волн Релея–Лэмба на вертикальной границе волновода, образованного при жестком контакте двух полуполос одинаковой высоты, но с различными упругими свойствами. При построении решения учитывалось наличие особенности по напряжениям в угловых точках. В [3,4] рассмотрены динамические колебания прямоугольной области, состоящей из трех состыкованных разнородных прямоугольников. Для анализа применен модифицированный метод суперпозиции. Отмечено, что учет особенностей волнового поля позволяет улучшить сходимость метода. Численные результаты подтверждают эффективность метода суперпозиции для решения данного класса задач, но, на наш взгляд, для физической интерпретации и исследования волновых полей в полуполосе более информативным является метод однородных решений.

В [5] при решении задачи об отражении волны Релея–Лэмба от защемленного торца полуполосы использован «метод проекций». Учет особенности основан на искусственном добавлении члена, содержащего сингулярность. К сожалению, ряды напряжений в решении расходятся не только в угловых точках, но и в некоторой конечной окрестности угловых точек торца, что снижает возможности использования этих результатов.

Методом однородных решений с учетом особенности в [6] рассматривалась статическая задача для цилиндра со смешанными граничными условиями. Решение задачи представлено в виде рядов по однородным

[1]Шихман Владимир Маркович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, заведующий лабораторией НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И. Южного федерального университета; e-mail: shikhman@math.rsu.ru.

решениям, коэффициенты которых, начиная с некоторого, имеют заданную асимптотику. Аналитически определена связь показателя степени в асимптотической формуле с показателем особенности, однако напряжения на торце не определены.

Важной областью приложения рассматриваемых задач является проблема динамического взаимодействия фундаментов с грунтом при сейсмическом воздействии. Для решения этих задач успешно применяются численные методы [7–9], однако, на наш взгляд, важным является применение альтернативного подхода для сопоставления результатов на модельных задачах.

В настоящей работе рассматривается задача о волне Релея, распространяющейся горизонтально на границе полуплоскости, и взаимодействии ее с препятствием в виде упругой полуполосы, установленной вертикально на полуплоскости. Подобная задача рассматривалась также в [10], но фундаментальный вопрос определения напряженного состояния на контактной границе решен не был, объем представленных численных результатов также недостаточен для выводов об эффективности метода.

В декартовой нормированной системе координат x, y полуполоса, занимающая область $|x| \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \infty$, жестко сцеплена на торце с упругой полуплоскостью, занимающей область $y \leqslant 0$ (рис. 1).

Плотность материала полуполосы ρ, постоянные Ламе — λ, μ. Для полуплоскости соответствующие характеристики будем обозначать ρ_1, λ_1, μ_1. Волна Релея с компонентами перемещений $u_R(x,y)$ и $v_R(x,y)$ распространяется в положительном направлении оси x. Временная зависимость всех функций является гармонической. Гармонический множитель всюду далее при записи опускается. Для анализа волновых полей удобно рассматривать отдельно симметричные и антисимметричные относительно y колебания. Приведем решение для симметричных колебаний, антисимметричные рассматриваются аналогично. Перемещения для полуполосы вдоль осей x и y обозначим $u(x,y)$, $v(x,y)$, для полуплоскости — соответственно $\bar{u}(x,y)$, $\bar{v}(x,y)$. Боковые грани полосы и граница полуплоскости вне области контакта свободны от напряжений. В области сопряжения полуполосы и полуплоскости выполнены условия жесткого сцепления

$$\text{а)}\ \sigma_y(x,0) = \bar{\sigma}_y(x,0) = f(x),$$

$$\tau(x,0) = \bar{\tau}(x,0) = g(x), \qquad (1)$$

$$\text{б)}\ u(x,0) = \bar{u}(x,0),\ v(x,0) = \bar{v}(x,0),$$

$|x| \leqslant 1$, $f(x)$ и $g(x)$ — неизвестные контактные напряжения.

Полагая $f(x)$ и $g(x)$ заданными, строим решение для полуплоскости $u^{(1)}(x,y)$ и $v^{(1)}(x,y)$ с помощью интегрального преобразования Фурье по координате x и в соответствии с принципом предельного поглощения [11]. Полное поле перемещений в полуплоскости является суммой этого решения и симметричной составляющей заданной поверхностной волны $u_{RS}(x,y)$ и $v_{RS}(x,y)$

$$\begin{aligned} \bar{u}(x,y) &= u^{(1)}(x,y) + u_{RS}(x,y), \\ \bar{v}(x,y) &= v^{(1)}(x,y) + v_{RS}(x,y). \end{aligned} \qquad (2)$$

Решение для полуполосы строим в виде рядов по однородным решениям

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x) e^{i\alpha_n y}, \\ v(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(x) e^{i\alpha_n y}, \\ \frac{1}{\mu}\sigma_y(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sigma_{yn}(x) e^{i\alpha_n y}, \\ \frac{1}{\mu}\tau(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \tau_n(x) e^{i\alpha_n y}, \\ \frac{1}{\mu}\sigma_x(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sigma_{xn}(x) e^{i\alpha_n y}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где C_n — неизвестные коэффициенты разложения; u_n, v_n, σ_{yn}, σ_{xn}, τ_n — однородные решения; α_n — корни дисперсионного уравнения для полосы. Для каждого значения частоты дисперсионное уравнение имеет конечное число действительных и мнимых и счетное множество комплексных корней. Суммирование в рядах ведется в соответствии с принципом энергетического излучения [11]. Дальнейшее решение задачи основывается на использовании условий сопряжения в области контакта полуполосы и полуплоскости. Применяя вариационный принцип Рейсснера к полуполосе с учетом представления (3) для базисных функций и граничных условий (1),

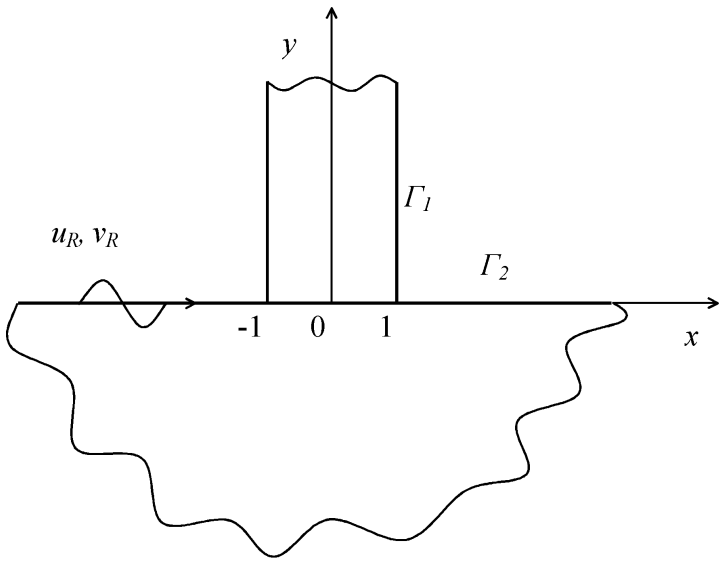

Рис. 1. u_R, v_R – волна Релея, Γ_1, Γ_2 — свободные поверхности

получаем

$$\int_{-1}^{1}\{\delta\sigma_y(x,0)\,[v(x,0)-\bar v(x,0)]+ \\ +\delta\tau(x,0)[u(x,0)-\bar u(x,0)]\}dx=0. \quad (4)$$

Здесь $\bar u(x,0)$, $\bar v(x,0)$ определяются из (2) с учетом (1) и (3).

В результате задача сводится к определению коэффициентов C_n из решения бесконечных алгебраических систем. Как уже указывалось, в угловых точках области сцепления имеется особенность напряженного состояния [1]. В полярных координатах с центром в угловой точке при свободных от усилий поверхностях Γ_1 и Γ_2 (рис. 1) напряжения имеют вид

$$\sigma^{(i)}=\{\sigma^{(i)}{}_{\varphi},\sigma^{(i)}{}_{r\varphi}\}\sim r^{\gamma_0-1},\quad r\to 0, \quad (5)$$

$i=1,2$ соответственно для полуполосы и полуплоскости, $0<\gamma_0<1$ находится из уравнения, полученного в [1].

Соотношение (5) используем для определения асимптотического поведения коэффициентов разложения (констант) C_n в бесконечных рядах (3). Можно показать, что выбор асимптотики коэффициентов в виде

$$C_n\sim\frac{C_0}{\operatorname{ch}\alpha_n}\alpha_n^{1-\gamma_0},\ n\to\infty, \quad (6)$$

где C_0 — постоянная, обеспечивает требуемую особенность напряженного состояния в угловых точках (5).

Обратимся к рассмотрению напряженного состояния в области контакта. Воспользовавшись соотношением (6) и известным асимптотическим поведением комплексных корней α_n из [12], получим асимптотический вид однородных решений. В асимптотических соотношениях для напряжений кроме рядов, сходящихся и дающих особенность лишь в угловой точке, имеются также ряды следующего вида:

$$\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n n^{-\gamma_0+0{,}5(1+x)}e^{i\pi nx-\pi ny}. \quad (7)$$

При $y>0$ ряды (7) сходятся. Однако при $y=0$ для области $x\geqslant 2\gamma_0-1$ указанные ряды являются расходящимися. Для определения напряжений во всей области контакта необходимо привлечь методы обобщенного суммирования рядов [13]. Методика применения этих методов при решении смешанных задач теории упругости в рамках метода однородных решений предложена в [14]. Напряжения на торце полуполосы можно получить суммированием рядов (7) при $y\neq 0$ и последующим предельным переходом при $y\to 0$. В обобщенном суммировании такой переход соответствует методу Пуассона. Этот же результат можно получить другим методом обобщенного суммирования — методом Чезаро. Поэтому воспользуемся из [13] результатом суммирования методом Чезаро (C,k), где k — порядок метода. Напряжения на торце при $y=0$ после применения обобщенного суммирования представляются в ви-

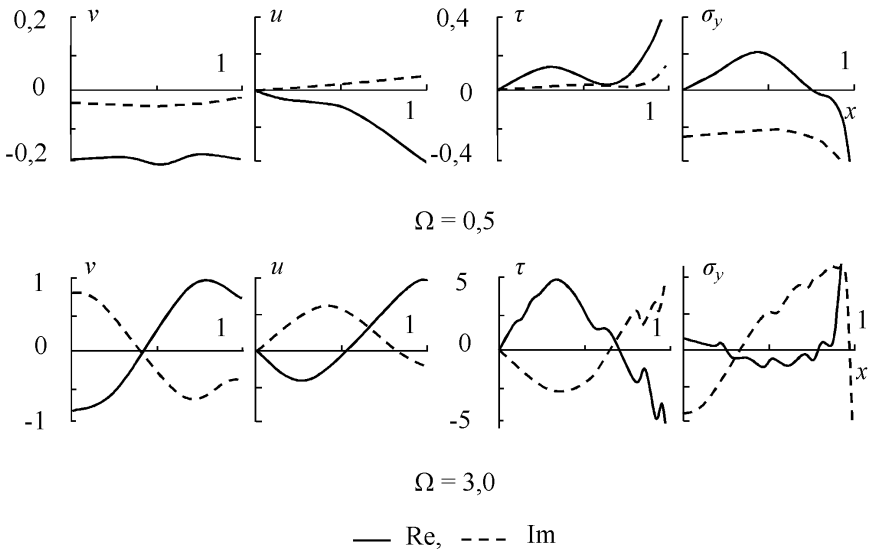

Рис. 2. Напряженно-деформированное состояние в области контакта при $y = 0$

де

$$\frac{1}{\mu}\sigma_p(x,0) = \sum_{k=1}^{K_0} C_k\sigma_{pk}(x) + \sum_{n=1}^{N-1} C_n\sigma_{pn}(x) + \sum_{n=1}^{N-1} B_n\sigma_{pn}(x) + C_0{\sigma_p}^{(0)}(x) + B_0({\sigma_p}^{(0)}(x))^*, \quad (8)$$

$$p = 1, 2.$$

Здесь $\sigma_1(x,0) = \sigma_y(x,0)$, $\sigma_2(x,0) = \tau(x,0)$, K_0 — число действительных и мнимых корней дисперсионного уравнения для полосы, C_0, B_0, C_n, B_n — постоянные, соответствующие парам комплексных корней, имеющих противоположные знаки действительных частей, $N-1$ — число определяемых точно постоянных C_n и B_n, $\sigma_p^{(0)}(x)$ — асимптотический вид однородных решений при $y = 0$ после применения методов обобщенного суммирования, $(*)$ означает сопряженную величину.

Рассматривая напряжения вблизи угловой точки, получаем из (8)

$$\sigma^{(i)}(\rho,\varphi) \sim D(\gamma_0) r_0^{\gamma_0 - 1}, \quad r_0 \to 0. \quad (9)$$

Из (9) следует, что $\sigma^{(i)}(\rho,\varphi)$ имеют требуемую особенность (5). $D(\gamma_0)$ определяет коэффициент интенсивности напряжений в угловой точке.

Учитывая асимптотику C_n (6), соотношение обобщенной ортогональности [15] и представляя напряжения в виде конечных сумм (8), из вариационного соотношения (4) получаем конечную алгебраическую систему для определения искомых постоянных C_n.

Численные исследования проведены при $\rho = \rho_1$, $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$, постоянная, определяющая амплитуду волны Релея, $A_R = 1$. В этом случае $\gamma_0 = 0{,}54$. Для оценки погрешности вычислений используем условия сопряжения перемещений в области контакта. Сопоставим при $y = 0$ перемещения для полуполосы, представленные рядами, и перемещения для полуплоскости, определяемые соотношениями (2). Погрешность уменьшается при увеличении порядка системы M для определения постоянных C_n. Для $\Omega = 0{,}5$ при порядке системы $M = 19$ погрешность в условиях сопряжения $\delta = 1{,}8\,\%$. Для $\Omega = 3{,}0$ погрешность $\delta = 12\,\%$ при $M = 31$. При увеличении частоты погрешность возрастает, что приводит к необходимости увеличивать порядок системы.

Результаты численного исследования напряженно-деформированного состояния волновода при $y = 0$ представлены на рис. 2.

На низкой частоте $\Omega = 0{,}5$ при достаточном удалении от торца полуполосы ($y \geqslant 5$) расчет показал, что поперечная составляющая перемещения u и тангенциальное напряжение τ много меньше соответственно продольного перемещения v и напряжения σ_y. Однако в области контакта указанные со-

ставляющие напряженно-деформированного состояния соизмеримы по величине, и напряжения существенно нелинейны. На частоте $\Omega = 3{,}0$ наличие в полуполосе трех распространяющихся мод приводит к существенному усложнению волнового поля. Сложный характер поля напряжений вблизи торца полуполосы, сохраняющийся даже при низких частотах $\Omega = 0{,}5$, определяется затухающими модами колебаний и связан с наличием особенностей напряженного состояния в угловых точках области сцепления.

Литература

1. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 178–186.
2. *Городецкая Н. С.* Дифракция волн Рэлея-Лэмба на вертикальной границе в составном упругом волноводе // Акустичний вісник. 2000. Т. 3. № 1. С. 23–35.
3. *Вовк Л. П., Соболь Б. В.* О концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 269–278.
4. *Вовк Л. П., Соболь Б. В.* Особенности динамических напряжений в окрестности точки стыка трех упругих сред // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 279–289.
5. *Gregory R. D., Gladwell I.* The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate // J. of Elasticity. 1983. V. 13. № 2. P. 317–343.
6. *Буланов Г. С.* Разложение особенностей напряженного состояния в ряд по однородным решениям // Теор. и прикл. мех. Киев – Донецк. 1983. Вып. 14. С. 6–13.
7. *Селезнев М. Г., Ляпин А. А., Корабельников Г. Я. и др.* Некоторые особенности динамического взаимодействия геологической среды с поверхностными объектами // Известия РГСУ. 2004. № 8. С. 202–208.
8. *Хожиметов Г. С.* Современное состояние и проблемы взаимодействия тел с грунтом в сейсмодинамике сооружений // Пробл. мех. 2004. № 2. С. 28–32.
9. *Wegner J. L., Yao M. M., Zhang X.* Dynamic wave-soil-structure interaction analysis in the time domain // Comput. and Struct.: An International Journal. 2005. V. 83. № 27. P. 2206–2214.
10. *Пельц С. П., Шихман В. М.* Рассеяние волны Релея на упругой полуполосе, сцепленной на торце с упругой полуплоскостью // ДАН СССР. 1987. Т. 292. № 2. С. 299–303.
11. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
12. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
13. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. 504 с.
14. *Пельц С. П., Шихман В. М.* О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы // ДАН СССР. 1987. Т. 295. № 4. С. 821–824.
15. *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // ДАН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 333–335.

Ключевые слова: волна Релея–Лэмба, упругое препятствие, дифракция, полуполоса

Статья поступила 13 января 2008 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
© Шихман В. М., 2008