

УДК 532:533:536

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ ПЛАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ

Клоков В. В.¹, Таха А. Ш.²

ON THE DETERMINATION OF A THRESHOLD FUSION BOUNDARY DURING
THE MEDIUM MOVEMENT

Klokov V. V., Takha A. Sh.

This work is a continuation of the research and contains the solution of the problem aimed to determine a threshold fusion boundary by the methods of mixed boundary-value problems in the context of the theory of analytical functions taken into account the determination of the value of thermal stream depending on the medium movement velocity near the threshold sought, in particular, according to Reynolds's hydrodynamical analogy.

Keywords: diathermancy, heat flow, fusion boundary.

Работа является продолжением исследования [1] и содержит решение задачи по определению предельной границы плавления методом смешанных краевых задач теории аналитических функций [2] с учетом определения величины теплового потока в зависимости от скорости движения среды вблизи искомой границы, в частности, согласно гидродинамической аналогии Рейнольдса [3–5].

Предполагается, что выполнены все допущения, приводящие к удовлетворению температуры T двумерному уравнению Лапласа.

Требуется определить неизвестный участок границы AB области D_Z , схема одной симметричной части которой показана на рис. 1а. В точке C находится источник тепла, границы BC и CDA являются линиями симметрии теплового поля и изменения его комплексного теплового потенциала

$$w_T(z) = \varphi_T + i\psi_T, \quad z = x + iy,$$

φ_T — функция теплового потока, $\psi_T = T$ — функция температуры. Неизвестная граница AB определяется в результате отыскания потенциала w_T по условиям

$$\begin{aligned} \varphi_T|_{BC} = -q_1; \quad \varphi_T|_{CDA} = 0; \\ \psi_T|_{AB} = 0; \quad \frac{\partial \psi_T}{\partial n} \Big|_{AB} = f. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная в направлении нормали к AB , q_1 — величина, связанная с величиной теплового потока (суммарный тепловой поток).

Случай $f = 1$ рассмотрен в [1], где решение получено с использованием гидродинамической аналогии задачи методом Жуковского, и проведен анализ уравнения границы AB в зависимости от положения центра C вихря течения, соответствующего потоку от источников на BC к стокам на CDA с линией тока BA (схема этого фиктивного течения представлена на рис. 1а).

Использованный в данной работе метод позволяет получить решение задачи с другими условиями для предельного теплового потока на границе AB . В общем случае задание этих условий является сложной, но весьма актуальной задачей, имеющей приложение при исследованиях как природных [6], так и технологических явлений [7].

В настоящей работе условие, при котором прекращается изменение конфигурации области плавления, устанавливается в зависимости величины градиента теплового потока q от модуля скорости v течения среды около искомой предельной границы.

Исследованы два случая

$$1) \quad q = 1 - a_1 v, \quad (2)$$

¹Клоков Владимир Васильевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

²Таха Ахмед Шакер, аспирант кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета; e-mail: astakha@yandex.ru.

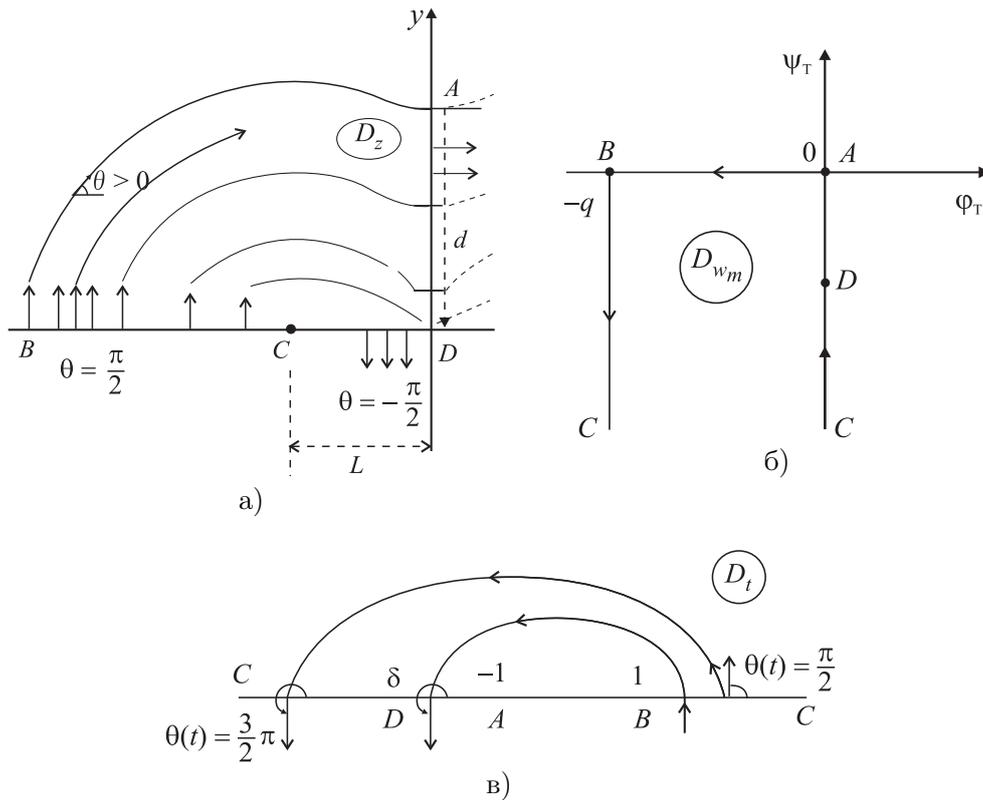


Рис. 1. Области изменения: а — D_z ; б — D_{w_τ} ; в — D_t

$$2) \quad q = \frac{a}{v}. \quad (3)$$

Первый случай отражает изменение величины градиента теплового потока q при изменении величины скорости v течения гидродинамического приграничного слоя по линейному закону.

Второй случай соответствует, например, известной аналогии Рейнольдса [3], согласно которой имеем указанное равенство (3) при

$$a = c_p s (T_{ж} - T_{ст}) \text{ — для газа,}$$

$$a = \frac{c_p s (T_{ж} - T_{ст})}{1 + 12\sqrt{\xi/8}(\text{Pr}^{2/3} - 1)} \text{ — для жидкости,}$$

где теплоемкость при постоянном давлении c_p , касательное напряжение s , температура в ядре жидкости $T_{ж}$, температура в пристанном слое $T_{ст}$, коэффициент сопротивления трения ξ , число Прандтля $\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda}$, динамический коэффициент вязкости μ , коэффициент теплопроводности λ полагаются постоянными.

В качестве примера течения в ядре потока для рассматриваемой задачи выбрано потенциальное плоскопараллельное течение идеальной несжимаемой жидкости, индуцированное вихрями с центрами, совпадающими

с центрами источников тепла. Схема такого течения в симметричной части области показана на рис. 2а.

Согласно этой схеме линией тока является теперь граница ABD, а линией симметрии вихревого течения — граница BCD (рис. 2а).

Неизвестный участок течения АВ определяется путем совместного решения гидродинамической и тепловой задач. Последняя решается с использованием гидродинамической аналогии.

Ищется аналитическая функция $\ln \left| \frac{dz}{dt} \right|$, где t — вспомогательная переменная, изменяющаяся в верхней полуплоскости (рис. 1с) со следующим обозначением координат точек: $t_D = \delta$, $t_A = -1$, $t_B = 1$, $t_C = \infty$.

Для этого модуль $\left| \frac{dz}{dt} \right|$ в случае 1) находится из условия (2), из которого с учетом того, что $q = \frac{dw}{dz}$, $v = \frac{dw}{dz}$ получаем равенство, необходимое для определения вещественной части искомой функции $\ln \frac{dz}{dt}$

$$\left| \frac{dz}{dt} \right| = \left| \frac{dw_\tau}{dt} \right| + a_1 \left| \frac{dw_\tau}{dt} \right|. \quad (4)$$

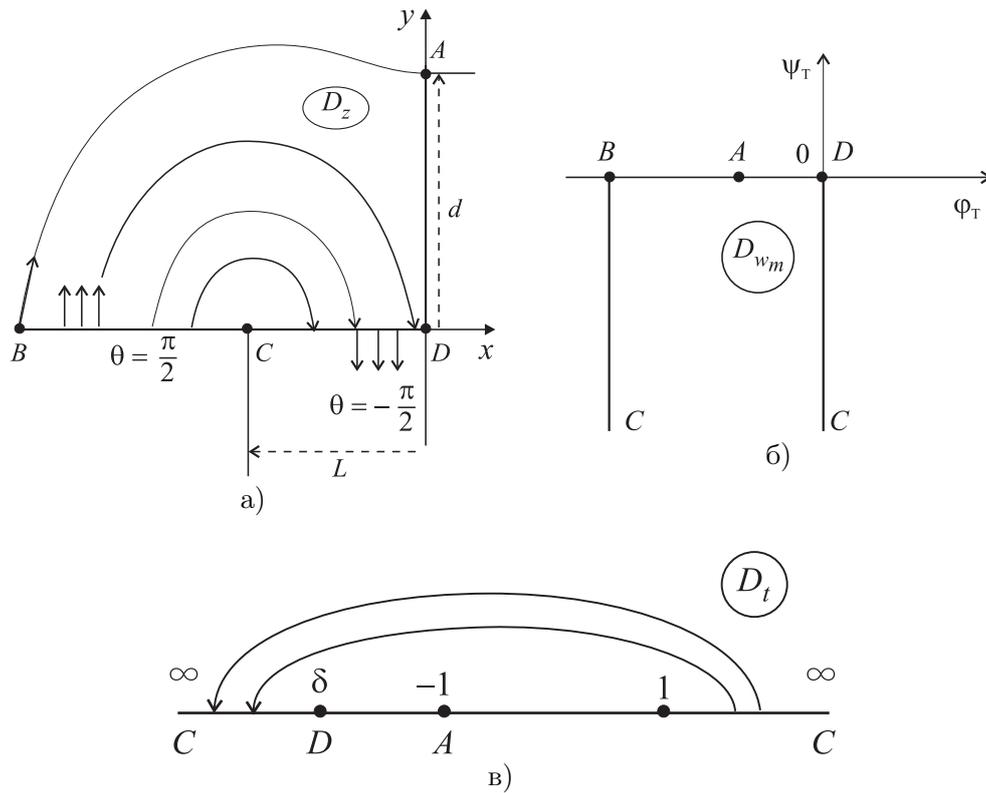


Рис. 2. Области изменения: а – D_z ; б – D_{w_r} ; в – D_t

Модуль $|\frac{dz}{dt}|$ в случае 2) находится из условия (3), которое преобразуется к виду

$$\left| \frac{dz}{dt} \right| = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{|\frac{dw_r}{dt}| \left| \frac{dw_r}{dz} \right|}{a}}. \quad (5)$$

В формулах (4), (5) w_r – потенциал фиктивного течения, w_r – комплексный потенциал гидродинамического течения.

Согласно граничным условиям (1), область изменения комплексных потенциалов w_r и w_r является полуполосой (рис. 1б, 2б). Модули производных функций, входящих в (4) и (5), находятся с помощью функций, осуществляющих конформные отображения верхней полуплоскости D_t на области изменения потенциалов w_r и w_r согласно теории интеграла Кристоффеля – Шварца [2,8]. При принятом соответствии точек имеем на отрезке АВ ($-1 < t < 1$)

$$\left| \frac{dw_r}{dt} \right| = \frac{q}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (6)$$

$$\left| \frac{dw_r}{dz} \right| = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t-\delta} \sqrt{1-t}}. \quad (7)$$

Здесь Γ – заданная циркуляция скорости потока жидкости.

В итоге, на отрезке АВ ($-1 < t < 1$) с учетом (4), (6) и (7) определяется значение $\ln |\frac{dz}{dt}|$ в случае 1), а с учетом (5), (6) и (7) – значение той же функции в случае 2).

Мнимую часть искомой функции можно представить в виде

$$\text{Arg} \frac{dz}{dt} = \text{Arg} \left(\frac{dw}{dt} / \frac{dw}{dz} \right) = -\theta(t) + \theta(z),$$

где $\frac{dw}{dt}$ и $\frac{dw}{dz}$ рассматриваются как сопряженные скорости $\bar{v}(t)$ и $\bar{v}(z)$ потенциальных течений плоскопараллельных потоков идеальной несжимаемой жидкости с комплексным потенциалом w в областях D_t и D_z , $\theta(t)$ и $\theta(z)$ – углы наклона вектора скорости этих течений к вещественной оси в данных областях.

Величины углов наклона можно определить, выбирая в качестве потенциалов либо потенциал фиктивного течения w_r , либо комплексный потенциал гидродинамического течения w_r .

Значения углов наклона на участках границ областей D_t и D_z представлены в табл. 1.

Заметим, что в рассматриваемом случае величина $\text{Arg} \frac{dz}{dt}$ на участках границ не зависит от способа ее определения.

Таблица 1. Значения углов наклона на участках границ

	$\theta_{\tau}(z)$	$\theta_{\tau}(t)$	$-\theta_{\tau}(t)+\theta_{\tau}(z)$	$\theta_{\tau}(z)$	$\theta_{\tau}(t)$	$-\theta_{\tau}(t)+\theta_{\tau}(z)$
BC	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0
CD	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	-2π	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	-2π
AD	0	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{3\pi}{2}$

Таким образом, на участках границы вещественной оси области D_t становятся определенными либо вещественная, либо мнимая часть функции $\ln \frac{dz}{dt}$.

Поэтому, используя формулу Синьорини (Келдыша–Седова) [2], можно восстановить функцию $\ln \frac{dz}{dt}$ в верхней полуплоскости $t > 0$ в виде следующего выражения:

$$\ln \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{\pi i} \times \left(i \int_{-\infty}^{\delta} \frac{-2\pi d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}(\tau-t)} + i \int_{\delta}^{-1} \frac{-\frac{3}{2}\pi d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}(\tau-t)} + \int_{-1}^1 \frac{\ln \left| \frac{dz}{dt} \right|_{AB} d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}(\tau-t)} \right) = \Phi(t). \quad (8)$$

Для случая 1) имеем

$$\ln \left| \frac{dz}{dt} \right|_{AB} = \ln \left(\frac{1}{\pi \sqrt{1-\tau^2}} + \frac{a\Gamma}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\tau-\delta}\sqrt{1-\tau}} \right).$$

При $a\Gamma = 0$ получим вариант, рассмотренный в [1].

В случае 2) (аналогии Рейнольдса) на отрезке АВ ($-1 < t < 1$)

$$\ln \left| \frac{dz}{dt} \right|_{AB} = \frac{1}{\pi v} \frac{1}{\sqrt[4]{(t+1)(t-\delta)\sqrt{1-t}}},$$

где

$$v = \sqrt{\frac{c_p s(T_{ж} - T_{ст})}{q\Gamma}} = \sqrt{\frac{a}{q\Gamma}} \quad (\text{для газа}).$$

Чтобы учесть возможность изменения искомой границы в зависимости от изменения некоторых параметров на ней, усложним граничное условие

$$\ln \left| \frac{dz}{dt} \right|_{AB} = \ln \left| \pi(ct+b) \sqrt[4]{(t+1)(t-\delta)\sqrt{1-t}} \right|, \\ c, v = \text{const}.$$

Из равенства (8) устанавливаем связь дифференциалов

$$dz = e^{\Phi(t)} dt. \quad (9)$$

После интегрирования (9) на соответствующих участках границы с использованием формулы Сохоцкого [2] для выражения предельного значения интеграла типа Коши на границе области получены следующие формулы для вычисления расстояний L и d и параметрические уравнения для расчета координат точек границы АВ:

$$L = \int_{-\infty}^{\delta} \frac{g}{\sqrt{\delta-t}} e^{\eta(t)} dt, \quad d = \int_{\delta}^{-1} \frac{g}{\sqrt{t-\delta}} e^{\eta(t)} dt,$$

где

$$g = \frac{\sqrt{-1+t\delta + \sqrt{(t^2-1)(\delta^2-1)}}}{(-t + \sqrt{t^2-1})^2},$$

$$\eta(t) = -\frac{\sqrt{t^2-1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln \left| \frac{dz}{dt} \right|_{AB} d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)}.$$

Координаты x_N, y_N точек границы АВ представлены в виде

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} + \int_{-1}^{t_N} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left[J_1 - \frac{\sqrt{t^2-1}}{\pi i} J_2 \right] dt.$$

Здесь

$$J_1 = i \left(2 \arcsin t - \frac{1}{2} \arcsin \frac{t\delta-1}{\delta-t} - \frac{3}{4}\pi \right),$$

$$J_2 = v.p \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} = \int_{-1}^{t-\varepsilon} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} + \int_{t+\varepsilon}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)},$$

Таблица 2. Сравнение результатов при решении задачи методами использования функции Жуковского и формулы Синьорина

метод использования функции Жуковского								
$-\delta$	82,537	5,082	1,666	1,316	1,069	1,01	1,0067	1,000001
L	0,05	0,2	0,353	0,4	0,434	0,406	0,399	0,321
d	0,634	0,591	0,468	0,391	0,236	0,104	0,087	0,001
x_{\max}	0,638	0,675	0,746	0,768	0,766	0,731	0,721	0,636
метод использования формулы Синьорина								
$-\delta$	82,537	5,082	1,666	1,316	1,069	1,01	1,0067	1,000001
L	0,05	0,2	0,353	0,4	0,434	0,408	0,4	0,321
d	0,634	0,591	0,468	0,392	0,237	0,105	0,087	0,001
x_{\max}	0,636	0,673	0,743	0,766	0,771	0,728	0,717	0,631

Таблица 3. Координаты точек линий АВ при $L = 0,05$

$a\Gamma = 0,5$				$\gamma = -66,062$				$d = 0,58$			
t_N	-0,999	-0,99	-0,9	-0,5	-0,1	0	0,1	0,5	0,9	0,99	1
$-x_N$	0	0,04	0,139	0,32	0,431	0,453	0,475	0,546	0,57	0,574	0,574
y_N	0,58	0,591	0,581	0,509	0,421	0,396	0,37	0,245	0,162	0,044	0,000
$a\Gamma = 1$				$\gamma = -59,7$				$d = 0,552$			
t_N	-1	-0,99	-0,9	-0,5	-0,1	0	0,1	0,5	0,9	0,99	0,999
$-x_N$	0	0,039	0,139	0,326	0,388	0,464	0,486	0,555	0,574	0,576	0,576
y_N	0,552	0,567	0,561	0,486	0,441	0,364	0,335	0,197	0,106	0,05	0,000

— главное значение интеграла типа Коши.

Достоверность и точность расчетов по полученным формулам, в которых используются сингулярные интегралы, установлены сравнением результатов расчетов величин L , d по методу функции Жуковского [1]. В последнем случае не применяются указанные сингулярные интегралы типа Коши (табл. 2).

В случае 2) (аналогии Рейнольдса) для расчета координат точек границы АВ на основе параметрических уравнений имеем

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} + \int_{-1}^{t_N} \frac{1}{J_3(t)} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left[J_1 - \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{\pi i} J_2 \right] dt,$$

где

$$J_1 = i \left(2 \arcsin t - \frac{1}{2} \arcsin \frac{t\delta - 1}{\delta - t} - \frac{3}{4} \pi \right),$$

$$J_2 = \int_{-1}^{t-\varepsilon} \frac{\ln[J_3(\tau)]d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} + \int_{t+\varepsilon}^1 \frac{\ln[J_3(\tau)]d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)},$$

$$J_3(t) = \pi(ct + b) \sqrt{(t+1)(t-\delta)} \sqrt{1-t}.$$

Результаты расчетов представлены в табл. 2-4 и на рис. 3-7.

Рис. 3 показывает (линия 1) совпадение границ для $a\Gamma = 0$ при их расчете с использованием функции Жуковского и формулы Синьорины. С увеличением параметра $a\Gamma$ (линии 2, 3, 4) предельная граница уменьшается при соответствующем уменьшении области плавления, так как в этом случае величина предельного теплового потока увеличивается. Отмечается изменение характера предельной границы.

На рис. 4 представлен пример неоднозначного решения задачи по определению предельной границы при $a\Gamma = 0,5$.

Результат расчета (рис. 5) показывает, что с увеличением расстояния между источниками тепла предельная граница имеет тенденцию к растяжению вдоль оси x и сжатию вдоль оси y . Однако существует другое решение, когда с уменьшением L область плавления только сжимается.

Разработан алгоритм расчета предельной границы плавления с учетом аналогии Рейнольдса в зависимости от изменения параметров в граничных условиях. Примеры расчетов линии АВ для различных значений L при изменении величины c представлены на рис. 6, а при изменении величины b на рис. 7,

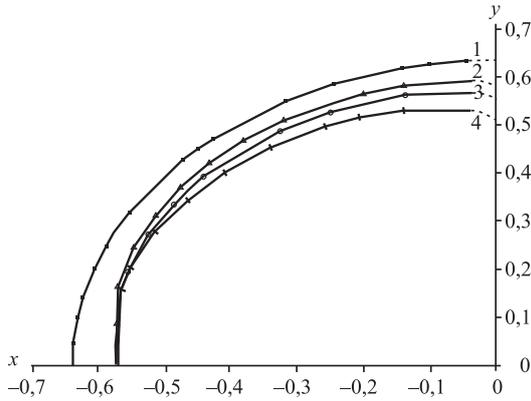


Рис. 3. Предельные границы плавления при $L = 0,05$ для различных значений Γ :
 1 — $\Gamma = 0$; 2 — 0,5; 3 — 1; 4 — 2

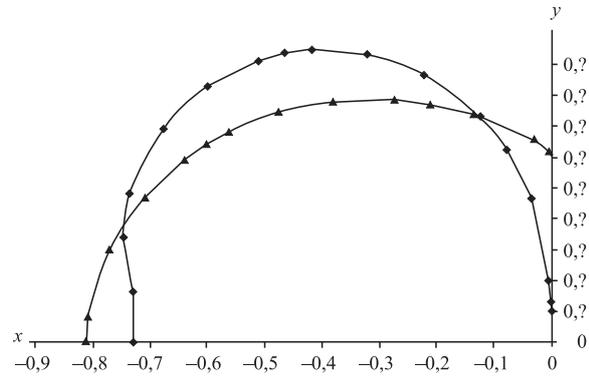


Рис. 4. Предельные границы плавления при $a\Gamma = 0,5$ для $L = 0,3$

Таблица 4. Координаты точек линий АВ при $L = 0,25$

$b = 1$											
$c = 0,2$			$\gamma = -1,745$					$d = 0,287$			
t_N	-0,999	-0,99	-0,9	-0,5	-0,1	0	0,1	0,5	0,9	0,99	1
$-x_N$	0	0,01	0,058	0,326	0,352	0,376	0,422	0,503	0,538	0,552	0,552
y_N	0,287	0,288	0,326	0,335	0,324	0,311	0,28	0,188	0,109	0,010	0,000
$c = 0$											
$b = 0,5$			$\gamma = -1,69$					$d = 0,518$			
t_N	-0,999	-0,99	-0,9	-0,5	-0,1	0	0,1	0,5	0,9	0,99	1
$-x_N$	0	0,01	0,065	0,343	0,428	0,47	0,512	0,595	0,758	0,871	0,871
y_N	0,518	0,528	0,564	0,612	0,596	0,583	0,567	0,523	0,369	0,02	0,000

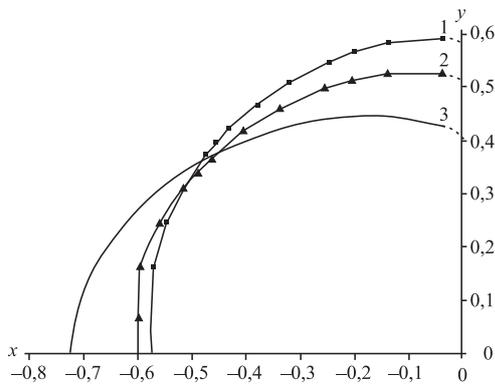


Рис. 5. Предельные границы плавления при $a\Gamma = 0,5$ для различных значений длины L : 1 — $L = 0,05$; 2 — 0,15; 3 — 0,25

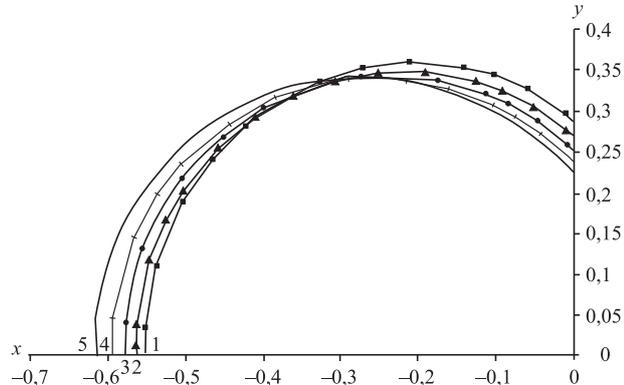


Рис. 6. Предельные границы плавления АВ при $L = 0,25$ и $b = 1$ для различных значений величины c : 1 — $c = 0,2$; 2 — 0,1; 3 — 0; 4 — -0,1; 5 — -0,2

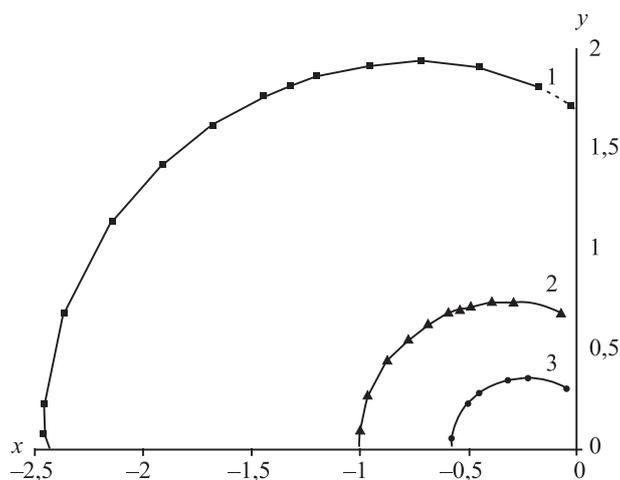


Рис. 7. Предельные границы плавления АВ при $L = 0,25$, $c = 0$ для различных значений величины b : 1 — $b = 0,1$; 2 — $0,4$; 3 — 1

на последнем показано возможное расширение или сжатие области плавления.

Литература

1. Клоков В. В., Таха А. Ш. Задача по определению предельной границы плавления при наличии нескольких нагревателей методом гидродинамической аналогии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 1. С. 40–45.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
3. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1973. 320 с.
4. Лыков А. В. Тепломассообмен (справочник). М.: Энергия, 1978. 480 с.
5. Бендерский Б. Я. Техническая термодинамика и теплопередача. М. – Ижевск: НИЦ (Регулярная и хаотическая динамика), 2005. 264 с.
6. Гуревич М. И. Теория струй идеальной несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1977. 644 с.
7. Каримов А. Х., Клоков В. В., Филатов Е. И. Методы расчета электрохимического формообразования. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. 386 с.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Ключевые слова: теплопроводность, тепловой поток, граница плавления

Статья поступила 22 мая 2008 г.
 Казанский государственный университет, г. Казань
 © Клоков В. В., Таха А. Ш., 2008