УДК 510.58 303.725.23 004.82

СЖАТИЯ КОНФИГУРАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЗНАНИЙ[1]

Костенко К. И.[2]

COMPRESSIONS OF CONFIGURATIONS IN KNOWLEDGE SPACES

Kostenko K. I.

Transformations of the compression of configurations of an abstract knowledge space reducing redundancy without change of their content are considered based on the application of configurations inclusions. It is proved that compressions are monotonous relative to the inclusions of configurations, any configuration is included into the result of its compression and compressions of equivalent configurations are equivalent.

Keywords: knowledge space, knowledge mappings, knowledge redundancy, knowledge compression.

Введение

Пространства конфигураций — это формальные системы в составе абстрактных пространств знаний, элементы которых интерпретируются как абстрактные структурированные знания [1]. Сжатиями конфигураций называются преобразования, уменьшающие избыточность в них, сохраняя содержание.

1. Основные определения

Пусть M — бесконечное вычислимое множество, содержащее специальный элемент Λ. Элементы этого множества будем называть конфигурациями.

Семантическим пространством называется тройка $\Re = (R, O, C)$, где R — вычислимое семейство разрешимых отношений (семантических зависимостей) на M, с элементами $T = M \times M$ и $E = \varnothing$; O — множество операций на R; C — множество логических операций на R, которому принадлежит разрешимое сравнение вложения отношений ρ_1.

Разложением конфигураций называется всякое всюду определенное вычислимое отображение $\varepsilon : M \to M \times M$, для которого:

1) $\varepsilon(\Lambda) = (\Lambda, \Lambda)$;

2) $\forall z_1, z_2 \in M \exists z \in M(\varepsilon(z) = \big(z_1, z_2)\big)$.

Конфигурация z называется элементарной в разложении ε, если $\varepsilon(z) = (\Lambda, \Lambda)$. Обозначим как M^* множество неэлементарных конфигураций.

Вычислимое отображение $\psi : M^* \to R$ называется *семантическим связыванием* для разложения ε, если:

1. $\forall z_1, z_2 \in M \exists z \in M\big((z_1 \neq \Lambda \vee z_2 \neq \Lambda) \to$
$\to \varepsilon(z) = (z_1, z_2)\ \ \&\ \ \psi(z) = E\big)$;

2. $\forall z \in M^* \big(\psi(z) \neq E \to \varepsilon(z) \in \psi(z)\big)$;

3. Если $z_1 \neq \Lambda \vee z_2 \neq \Lambda$, то ψ инъективно на множестве

$$M_\varepsilon(z_1, z_2) = \big\{z | \varepsilon(z) = (z_1, z_2)\big\}.$$

Пространством конфигураций называется пара $\mathbf{M} = (M, d)$, где M — бесконечное вычислимое множество конфигураций, содержащее Λ, а $d = (\varepsilon, \psi)$ — декомпозиция элементов M, образованная отображениями разложения и связывания.

На множестве элементарных конфигураций в разложении ε определено отношение порядка ρ_0 с наименьшим элементом Λ.

Глубина разложения ε — это отображение $d_\varepsilon : M \to N$, задаваемое соотношениями

1. $d_\varepsilon(z) = 0 \leftrightarrow z = \Lambda$;

2. $d_\varepsilon(z) = 0 = \max(d_\varepsilon(z_1), d_\varepsilon(z_2)) + 1$, если $\varepsilon(z) = (z_1, z_2)$ и $z \neq \Lambda$.

Разложение ε называется *конечным*, если d_ε всюду определено.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (06-07-96618).

[2]Костенко Константин Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий, начальник отдела разработки информационных систем Центра интернет Кубанского государственного университета; e-mail: kostenko@kubsu.ru.

Декомпозиция конфигураций $d = (\varepsilon, \psi)$ с конечным разложением ε определяет полные структурные представления конфигураций (ПСП) в виде нагруженных деревьев. Корню ПСП $z \in M^*$ сопоставляется $\psi(z) \in R$, а его левое и правое поддеревья образуют ПСП первой и второй конфигураций из $\varepsilon(z)$. Листьям ПСП соответствуют элементарные конфигурации [1].

Вершины ПСП конфигураций именуются двоичными словами, так что пустому слову λ соответствует корень, а левый и правый потомки вершины α сопоставлены словам $\alpha 0$ и $\alpha 1$. Множество вершин (листьев) ПСП $z \in M$ обозначим как $D(z)(O(z))$. Если $z \in M$ и $\alpha \in D(z)$, то $(z)_\alpha$ — это подконфигурация конфигурации z, ПСП которой задаётся поддеревом ПСП z с корнем α. Разметка вершины $\alpha \in D(z)$ обозначается как $[z]_\alpha$.

Будем рассматривать случай, когда множества $M_\varepsilon(z_1, z_2)$ бесконечные.

Инвертирование ПСП $z \in M$ в вершине $\alpha \in D(z) \backslash O(z)$ преобразует z в объект z', получаемый из ПСП z изменением порядка следования непосредственных потомков α и переопределением разметок внутренних вершин, учитывающим изменение расположения подконфигураций. Обозначим как $\Delta(z)$ множество объектов, получаемых из ПСП z с помощью конечного числа инвертирований. Если $z' \in \Delta(z)$, то $r(z, z')$ — семантическая зависимость, сопоставленная корню ПСП z'.

Замкнутость операции инвертирования конфигураций на M обеспечивает условие *консервативности*

$$\forall z \in M \forall z' \in \Delta(z) \big(\varepsilon(z') = \\ = (z_1, z_2) \to z_1 r(z, z') z_2\big).$$

Конфигурация $z \in M$ называется *простой*, если

$$\forall \alpha \in D(z) \backslash O(z) \\ \big([z]_\alpha \text{ задаёт связь только } (z)_{\alpha 0} \text{ с } (z)_{\alpha 1}\big).$$

Будем рассматривать пространства простых конфигураций, для которых выполняется условие консервативности. В таких пространствах семантические зависимости в вершинах ПСП конфигураций, в которых выполняется инвертирование, заменяются обратными к ним, а разметки остальных вершин сохраняются.

На множестве I конечных двоичных слов определим отношение включения: $\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha$ является началом β. Отображение $\xi : I \to I$ изотонное, если

$$\forall \alpha, \beta \in\in I \big(\alpha \subseteq \beta \to \xi(\alpha) \subseteq \xi(\beta)\big).$$

Изотонное отображение $\xi : I \to I$ называется *c-трассированием* $z_1 \in M$ в $z_2 \in M$, если

$$\xi\big(D(z_1)\big) \subseteq D(z_2) \ \& \\ \forall \alpha \in D(z_1) \big(\alpha \in D(z_1) \backslash O(z_1) \leftrightarrow \\ \xi(\alpha) \in D(z_2) \backslash O(z_2)\big);$$

$$\forall \alpha, \ \alpha\sigma \in D(z_1), \ \sigma \in \{0, 1\} \\ \exists \ \beta, \gamma \in I \big(\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma) \to \\ \xi(\alpha\sigma) = \xi(\alpha)\sigma\big).$$

Конфигурация z_1 c-трассируется в z_2 ($z_1 \leqslant_c z_2$), если существует такое c-трассирование ξ конфигурации z_1 в z_2, что:

1) $\forall \alpha \in O(z_1) \big((z_1)_\alpha \rho_0 (z_2)_{\xi(\alpha)}\big)$;

2) $\forall \alpha \in D(z_1) \backslash O(z_1) \big([z_1]_\alpha \rho_1 [z_2]_{\xi(\alpha)}\big)$.

Конфигурация z_1 c-вложена в конфигурацию z_2 ($z_1 \subseteq_c z_2$), если существуют такие конфигурации $z' \in \Delta(z_1)$, $z'' \in \Delta(z_2)$, что $z' \leqslant_c z''$.

Пусть $\subseteq_c$ — отношение c-вложения конфигураций. Это отношение рефлексивное и транзитивное, но, в общем случае, не симметричное [2].

2. Сжатия конфигураций

Вычислимое отображение $\mu : M \to M$ называется морфизмом.

Определение. Морфизм $\mu : M \to M$ называется c-*адаптирующим*, если

$$\forall z \in M \big(\mu(z) \subseteq_c z\big).$$

Определение. Морфизм $\mu : M \to M$ называется c-*обобщающим*, если

$$\forall z \in M \big(z \subseteq_c \mu(z)\big).$$

Множества c-адаптирующих и c-обобщающих, морфизмов замкнуты относительно операции композиции [1].

Определим специальный морфизм c-сжатия конфигураций μC, преобразующий $z \in M$ в конфигурацию заменой z на сжатие такой её подконфигурации, в которую она c-вложена.

Пусть $z \in M$. Преобразуем z в $\mu C(z)$ с помощью следующей процедуры:

1) Для обхода дерева ПСП z в глубину сверху вниз и в каждом ярусе слева направо выполним поиск первого максимально вложенного собственного поддерева дерева $D(z)$ с корнем α, для которого

$$z \subseteq_c (z)_\alpha.$$

2) Если такое поддерево найдено, то преобразуем значение $(z)_\alpha$ в $\mu C\big((z)_\alpha\big)$ с помощью данной процедуры и, в случае его успешного завершения, положим $\mu C(z) = \mu C\big((z)_\alpha\big)$;

3) Если для найденного поддерева дерева $D(z)$ построение значения $\mu C\big((z)_\alpha\big)$ завершается неудачей, то продолжим обход $D(z)$ с целью поиска другого подходящего максимально вложенного собственного поддерева дерева $D(z)$.

4) Если конфигурация z не вложена ни в одну из своих собственных подконфигураций, применим данную процедуру для нахождения значений $\mu C\big((z)_0\big)$ и $\mu C\big((z)_1\big)$. В случае успешного завершения процедуры для $(z)_0$ и $(z)_1$ и выполнения условия $\mu C\big((z)_0)[z]_\lambda \mu C((z)_1\big)$ определим значение $\mu C(z)$ соотношениями $[\mu C(z)]_\lambda = [z]_\lambda$, $\big((\mu C(z))_0 = \mu C((z)_0)$ и $(\mu C(z))_1 = \mu C((z)_1\big)$.

5) Если выполнение действий 1–2 завершается неудачей, то положим $\mu C(z) = z$.

Приведенная процедура всегда заканчивает свою работу, поскольку глубина всякой конфигурации $z \in M$ ограничена, а отношение $\subseteq_c$ алгоритмически разрешимо.

Если при нахождении значения $\mu C(z)$ используется соотношение 1) приведённой процедуры, то порядок вхождения в $\mu C(z)$ сжатий подконфигураций конфигурации z может отличаться от порядка вхождения этих подконфигураций в z. Такая возможность имеет место, если на некотором шаге определяется значение $\mu C\big((z)_\alpha\big)$, $\alpha \in I$, с помощью соотношения $\mu C\big((z)_\alpha\big) = \mu C\big((z)_{\alpha\beta}\big)$, $\beta \in I\backslash\{\lambda\}$, где $z' \in \Delta\big((z)_{\alpha\beta}\big)$ и $(z)_\alpha \leqslant_c z'$, получается из $(z)_{\alpha\beta}$ инвертированием в вершине λ. Данное свойство не учитывается в процедуре вычисления отображения μC, поскольку в работе рассматриваются консервативные, простые пространства конфигураций, в которых операция инвертирование является замкнутой и не требует пересчёта разметок внутренних вершин, отличных от вершины инвертирования.

Теорема 1. $\forall z \in M\big(z \subseteq_c \mu C(z)\big)$.

Доказательство. Проведём доказательство теоремы индукцией по глубине ПСП z.

Базис индукции. Пусть $d_\varepsilon(z) \in \{0, 1\}$. Тогда

$$z = \mu C(z), \quad z \subseteq_c \mu C(z) \text{ и } \xi(\lambda) = \lambda,$$

где ξ — c-трассирование $z' \in \Delta(z)$ в $z'' \in \Delta\big(\mu C(z)\big)$, для которого $z' \leqslant_c z''$.

Индуктивное предположение. Пусть

$$\forall z\big(d_\varepsilon(z) \leqslant n \to z \subseteq_c \mu C(z)\big),$$

а для c-трассирования ξ конфигурации $z' \in \Delta(z)$ в $z'' \in \Delta\big(\mu C(z)\big)$, такого что $z' \leqslant_c z''$, выполняется соотношение $\xi(\lambda) = \lambda$.

Индуктивный переход. Пусть $d_\varepsilon(z) = n+1$.

Если значение $\mu C(z)$ определяется с помощью соотношения 1) процедуры вычисления μC, то $z \subseteq_c (z)_\alpha$, $\mu C(z) = \mu C\big((z)_\alpha\big)$ и по индуктивному предположению $(z)_\alpha \subseteq_c \mu C\big((z)_\alpha\big)$.

Из транзитивности отношения $\subseteq_c$ следует, что

$$z \subseteq_c \mu C((z)_\alpha) = \mu C(z).$$

При этом найдётся c-трассирование ξ конфигурации $z' \in \Delta(z)$ в конфигурацию $z'' \in \Delta\big(\mu C(z)\big)$, для которого $z \subseteq_c \mu C(z)$ и $\xi(\lambda) = \lambda$.

Если значение $\mu C(z)$ определяется с помощью соотношения 2), то

$$[\mu C(z)]_\lambda = [z]_\lambda, \quad (\mu C(z))_0 = \mu C((z)_0),$$

$$(\mu C(z))_1 = \mu C((z)_1).$$

Пусть $(z)_{0\alpha}$ и $(z)_{1\beta}$ — подконфигурации конфигураций $(z)_0$ и $(z)_1$, используемые для нахождения значений $\mu C((z)_0)$ и $\mu C((z)_1)$ в процедуре вычисления значений μC.

Тогда

$$\mu C\big((z)_0\big) = \mu C\big((z)_{0\alpha}\big) \text{ и } \mu C\big((z)_1\big) = \mu C\big((z)_{1\beta}\big).$$

Из индуктивного предположения следует, что

$$(z)_0 \subseteq_c \mu C\big((z)_0\big) = \mu C\big((z)_{0\alpha}\big)$$

и

$$(z)_1 \subseteq_c \mu C\big((z)_1\big) = \mu C\big((z)_{1\beta}\big),$$

а для c-трассирований ξ_i, $i = 0, 1$, конфигураций $(z)'_i \in \Delta\big((z)_i\big)$ в $(z)''_i \in \Delta\big(\mu C(z)_i\big)$, для которых $(z)_i \subseteq_c \mu C\big((z)_i\big)$, справедливо соотношение $\xi_i(\lambda) = \lambda$. Поэтому существует c-трассирование конфигурации из $\Delta(z)$ в конфигурацию из $\Delta(\mu C(z))$, для которого $z \subseteq_c \mu C(z)$ и $\xi(\lambda) = \lambda$.

Если для нахождения значения $\mu C(z)$ используется соотношение 3 процедуры вычисления морфизма μC, то $z = \mu C(z)$.

Поэтому верно вложение $z \subseteq_c \mu C(z)$, справедливое для тождественного с-трассирования ξ, где $\xi(\lambda) = \lambda$.

Теорема доказана.

Для трассирования ξ и $D \in I$ обозначим как $\mathrm{Val}\big(\xi(D)\big)$ множество значений ξ на D.

Лемма 1. Если ξ такое c-трассирование $z_1 \in M$ в $z_2 \in M$, для которого $z_1 \leqslant_c z_2$, то

$$\mathrm{Val}\big(\xi\big(D(z_1)\big)\big) = D(z_2) \cap I_{\xi(\lambda)}.$$

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по глубине ПСП $(z_2)_{\xi(\lambda)}$.

Базис индукции. Пусть $d_\varepsilon(z_2) \in \{0, 1\}$. Тогда, если $z_1 \leqslant_c z_2$, то $d_\varepsilon(z_1) \leqslant d_\varepsilon(z_2)$ и с-трассирование ξ конфигурации z_1 в z_2, для которого $z_1 \leqslant_c z_2$, является тождественным на $D(z_1)$ и $\mathrm{Val}\big(\xi\big(D(z_1)\big)\big) = D(z_2) \cap I_{\xi(\lambda)}$.

Индуктивное предположение. Пусть из $d_\varepsilon\big((z_2)_{\xi(\lambda)}\big) \leqslant k$ следует, что выполнено условие $\mathrm{Val}\big(\xi\big(D(z_1)\big)\big) = D(z_2) \cap I_{\xi(\lambda)}$.

Индуктивный переход. Пусть

$$d_\varepsilon\big((z_2)_{\xi(\lambda)}\big) \leqslant k + 1 \text{ и } 0^n \in O(z_1).$$

Тогда $\xi(0^n) = 0\gamma$. Если $1^m \in O(z_1)$, то аналогичным образом $\xi(1^m) = 1\gamma$. Поэтому

$$\exists \alpha, \beta \in D(z_1)\big(\xi(\alpha) = \xi(\lambda)0 \ \ \& \ \ \xi(\beta) = \xi(\lambda)1\big).$$

Возьмём кратчайшие слова α и β, для которых выполнено последнее соотношение. Тогда

$$\xi(\lambda)0,\ \xi(\lambda)1 \in D(z_1) \text{ и } (z_1)_\alpha \leqslant_c (z_2)_{\xi(\alpha)},$$

$$(z_1)_\beta \leqslant_c (z_2)_{\xi(\beta)}.$$

При этом c-трассирования ξ_0 и ξ_1 для $(z_1)_\alpha$ в $(z_2)_{\xi(\alpha)}$ и $(z_1)_\beta$ в $(z_2)_{\xi(\beta)}$ отображают λ в λ и могут быть заданы соотношениями

$$\forall \gamma' \in D\big((z_1)_\alpha\big)\big(\xi(\alpha\gamma') = \xi(\alpha)\beta' \to \xi_0(\gamma') = \beta'\big);$$

$$\forall \gamma' \in D\big((z_1)_\beta\big)\big(\xi(\beta\gamma') = \xi(\beta)\beta' \to \xi_0(\gamma') = \beta'\big).$$

Поскольку

$$d_\varepsilon\big((z_2)_{\xi(\lambda)0}\big) \leqslant k \text{ и } d_\varepsilon\big((z_2)_{\xi(\lambda)1}\big) \leqslant k,$$

то по индуктивному предположению

$$\mathrm{Val}\big(\xi_0\big(D((z_1)_\alpha)\big)\big) = D(z_2) \cap I_0$$

и

$$\mathrm{Val}\big(\xi_1\big(D((z_1)_\beta)\big)\big) = D(z_2) \cap I_1.$$

Поэтому

$$\mathrm{Val}\big(\xi\big(D((z_1)_\alpha)\big)\big) = D(z_2) \cap I_0,$$

а

$$\mathrm{Val}\big(\xi\big(D((z_1)_\beta)\big)\big) = D(z_2) \cap I_1.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Val}\big(\xi\big(D(z_1)\big)\big) = D(z_2) \cap I_{\xi(\lambda)}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что если $z_1, z_2 \in M$ и $z_1 \leqslant_c z_2$ & $z_2 \leqslant_c z_1$ так, что соответствующие с-трассирования ξ_1 и ξ_2 отображают λ в λ, то $D(z_1) = D(z_2)$, а ξ_1 и ξ_2 являются тождественными на $D(z_1)$.

Покажем, что морфизм c-сжатия конфигураций сохраняет свойство совпадения конфигураций с точностью до инверсии.

Лемма 2.

$$z_1 \in \Delta(z_2) \to \mu C(z_1) \in \Delta\big(\mu C(z_2)\big).$$

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по глубине разложения конфигураций z_1 и z_2.

Базис индукции. Тогда $d_\varepsilon(z_1) \in \{0, 1\}$, а конфигурации z_1 и z_2 являются элементарными. Т. е. $z_1 = z_2$ и $\mu C(z_1) = z_1$, $\mu C(z_2) = z_2$, поэтому $\mu C(z_1) \in \Delta\big(\mu C(z_2)\big)$.

Индуктивное предположение. Пусть справедливо утверждение

$$\forall z_1, z_2 \in M\big(z_1 \in \Delta(z_2) \ \ \& \ \ d_\varepsilon(z_1) \leqslant k \to \\ \to \mu C(z_1) \in \Delta(\mu C(z_2))\big).$$

Индуктивный переход. Пусть $z_1 \in M$, $d_\varepsilon(z_1) = k + 1$ и $z_1 \in \Delta(z_2)$. Тогда для z_1 и z_2 выполняется один и тот же случай процедуры определения морфизма μC.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

1. Пусть $z_1 \subseteq_c (z_1)_\alpha$, $\alpha \neq \lambda$, и $z_2 \subseteq_c (z_2)_\beta$, $\beta \neq \lambda$, где α и β — такие слова, что $(z_1)_\alpha$ и $(z_2)_\beta$ являются максимально вложенными подконфигурациями z_1 и z_2, для которых выполнены данные вложения. Поскольку $(z_1)_\alpha \subseteq_c z_1$, и $(z_2)_\beta \subseteq_c z_2$, то $(z_1)_\alpha \subseteq_c (z_2)_\beta$ и $(z_2)_\alpha \subseteq_c (z_1)_\alpha$. При этом с-трассирования ξ_1 и ξ_2, инверсий $(z_1)_\alpha$и $(z_2)_\beta$, для которых выполняются последние вложения, отображают λ в λ.

Если бы, например, для некоторого c-трассирования ξ_1 было справедливо соотношение $\xi_1(\lambda) \neq \lambda$, то $\exists \gamma \neq \lambda((z_1)_\alpha \subseteq_c (z_2)_{\beta\gamma})$,

а значит $z_2 \subseteq_c (z_2)_{\beta\gamma}$, что противоречит выбору конфигурации $(z_2)_\beta$. Поэтому $d_\varepsilon((z_1)_\alpha) = d_\varepsilon((z_2)_\beta)$, так как в противном случае конфигурация меньшей глубины из $(z_1)_\alpha$ и $(z_2)_\beta$, не являлась бы c-вложимой в конфигурацию, глубина которой больше. Следовательно, любые c-трассирования, для которых выполняются условия c-вложений $(z_1)_\alpha$в $(z_2)_\beta$ и обратно, являются инъективными на множествах компонентов соответствующих конфигураций из $\Delta(z_1)$ и $\Delta(z_2)$. Поэтому $(z_1)_\alpha \in \Delta((z_2)_\beta)$.

Тогда

$$\mu C(z_1) = \mu C((z_1)_\alpha) \in \Delta((z_2)_\beta) = \mu C(z_2)$$

и

$$\mu C(z_1) \in \Delta(\mu C(z_2)).$$

2. Рассмотрим случай, когда

$$[\mu C(z_1)]_\lambda = [z_1]_\lambda, \quad (\mu C(z_1))_0 = \mu C((z_1)_0),$$

$$(\mu C(z_1))_1 = \mu C((z_1)_1),$$

и аналогичные соотношения имеют место для z_2.

Так как $z_1 \in \Delta(z_2)$, то $[z_1]_\lambda = [z_2]_\lambda$ или $[z_1]_\lambda = [z_2]_\lambda^{-1}$. Поэтому $(z_1)_0 \in \Delta((z_2)_0)$ и $(z_1)_1 \in \Delta((z_2)_1)$ или $(z_1)_0 \in \Delta((z_2)_1)$ и $(z_1)_1 \in \Delta((z_2)_0)$.

Тогда по индуктивному предположению

$$\mu C((z_1)_0) \in \Delta(\mu C((z_2)_0))$$

и

$$\mu C((z_1)_1) \in \Delta(\mu C((z_2)_1))$$

или

$$\mu C((z_1)_0) \in \Delta(\mu C((z_2)_1))$$

и

$$\mu C((z_1)_1) \in \Delta(\mu C((z_2)_0)).$$

Поэтому в каждом из случаев $\mu C(z_1) \in \Delta(\mu C(z_2))$.

3. Если для определения значений $\mu C(z_1)$ и $\mu C(z_2)$ применяется соотношение 3) процедуры вычисления этого морфизма, то $\mu C(z_1) = z_1$и $\mu C(z_2) = z_2$. Следовательно, $\mu C(z_1) \in \Delta(\mu C(z_2))$.

Лемма доказана.

Определение. Морфизм $\mu : M \to M$ является c-морфизмом, если

$$\forall z_1, z_2 \in M \leqslant (z_1 \subseteq_c z_2 \to \mu(z_1) \subseteq_c \mu(z_2) \leqslant).$$

Обозначим как M' множество конфигураций, для которых значения μC определяются без использования соотношения 3) процедуры вычисления значений этого морфизма.

Теорема 2. Отображение μC является c-морфизмом на множестве M'.

Доказательство. Покажем, что

$$\forall z_1, z_2 \in M'\big(z_1 \subseteq_c z_2 \to \mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2)\big).$$

Проведем доказательство индукцией по глубине ПСП конфигурации z_1, для которой $z_1 \subseteq_c z_2$.

Базис индукции. Пусть $d_\varepsilon(z_1) \in \{0, 1\}$ и $z_1 \subseteq_c z_2$. Тогда z_1 — элементарная конфигурация, а $\mu C(z_1) = z_1$ и $\Delta(z_1) = \{z_1\}$. Найдутся такие конфигурация $z_2' \in \Delta(z_2)$ и c-трассирование ξ конфигурации z_1 в z_2', что $\xi(\lambda) \in O(z_2')$ и $[z_1]_\lambda \rho_0 [z_2']_{\xi(\lambda)}$.

Справедливо также соотношение $[z_1]_\lambda \rho_0 [z_2']_\beta$, где $\beta \in O(z_2)$ и сопоставляется $\xi(\lambda) \in O(z_2')$ при инвертировании z_2 в z_2'.

Из определения μC следует, что существует $\gamma \in O(\mu C(z_2))$, для которого выполняется соотношение $[z_2]_\beta \rho_0 [\mu C(z_2)]_\gamma$.

Поскольку ρ_0 — транзитивное отношение, то $[z_1]_\lambda \rho_0 [\mu C(z_2)]_\gamma$.

Это означает, что всякое изотонное отображение $\xi' : I \to I$, для которого $\xi'(\lambda) = \gamma$, является таким c-трассированием $\mu C(z_1)$ в $\mu C(z_2)$, что выполнены условия определения c-вложения. Следовательно, $\mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2)$.

Индуктивное предположение. Пусть для всякой конфигурации z_1, глубина ПСП которой не превосходит k, выполнено соотношение:

$$\forall z_2 \in M'(z_1 \subseteq_c z_2 \to \mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2)).$$

Индуктивный переход. Пусть $z_1 \subseteq_c z_2$ и $d_\varepsilon(z_1) = k + 1$. Обозначим как ξ c-трассирование конфигурации $z_1' \in \Delta(z_1)$ в $z_2' \in \Delta(z_2)$, для которого $z_1' \leqslant_c z_2'$.

Докажем индуктивный переход индукцией по глубине ПСП z_2.

Базис индукции. Пусть $d_\varepsilon(z_2) \in \{0, 1\}$. Тогда вложение $z_1 \subseteq_c z_2$ невозможно, поскольку $d_\varepsilon(z_1) > 1$, а для выполнения условий c-вложения $z_1 \subseteq_c z_2$ для подходящих конфигураций $z_1' \in \Delta(z_1)$, $z_2' \in \Delta(z_2)$ и трассирования ξ должно выполняться условие

$$\forall \alpha \in D(z_1') \backslash O(z_1')(\xi(\alpha) \in D(z_2') \backslash O(z_2')).$$

Следовательно, истинно соотношение

$$z_1 \subseteq_c z_2 \to \mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2).$$

Индуктивное предположение. Пусть для всякой конфигурации z_2, глубина разложения которой не превосходит t и $d_\varepsilon(z_1) = k+1$, справедливо соотношение

$$z_1 \subseteq_c z_2 \to \mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2).$$

Индуктивный переход. Пусть $d_\varepsilon(z_2) = t+1$. Тогда z_2 не является элементарной, а значение $\mu C(z_2)$ получается применением соотношения 1) или 2) процедуры вычисления μC.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

Случай 1. Если $\mu C(z_2)$ определяется с использованием соотношения 1), то $\mu C(z_2) = \mu C(z_2')$, где z_2' — собственная подконфигурация конфигурации z_2, для которой $z_1 \subseteq_c z_2'$ и $d_\varepsilon(z_2') \leqslant t$. Из индуктивного предположения для z_2' следует, что $\mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2')$.

Поскольку z_2' — это собственная подконфигурация конфигурации z_2, то $\mu C(z_2') \subseteq_c \mu C(z_2)$.

Из транзитивности отношения c-вложения конфигураций следует, что $\mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2)$.

Случай 2. Если $\mu C(z_2)$ определяется с помощью соотношения 2) схемы определения μC, то

$$[\mu C(z_2)]_\lambda = [z_2]_\lambda, \quad (\mu C(z_2))_0 = \mu C((z_2)_0),$$

$$(\mu C(z_2))_1 = \mu C((z_2)_1).$$

Для z_1 и z_2 выполнено одно из условий

1) существуют такие $z_1' \in \Delta(z_1)$, $z_2' \in \Delta(z_2)$ и c-трассирование ξ конфигурации z_1' в z_2', для которых $\xi_(\lambda) \neq \lambda$ и $z_1' \leqslant_c z_2'$;

2) для любых $z_1' \in \Delta(z_1)$, $z_2' \in \Delta(z_2)$ и c-трассирования ξ конфигурации z_1' в z_2', для которого $z_1' \leqslant_c z_2'$ справедливо соотношение $\xi(\lambda) = \lambda$.

Если выполняется первое условие, то найдется собственная подконфигурация $(z_2)_\alpha$ конфигурации z_2, что $z_1 \subseteq_c (z_2)_\alpha$, $\alpha \in \{0, 1\}$ и $\mu C((z_2)_\alpha) = \mu C(z_2)$.

Поскольку $d_\varepsilon((z_2)_\alpha) \leqslant t$, то из индуктивного предположения для z_2 следует, что $\mu C(z_1) \subseteq_c \mu C((z_2)_\alpha)$. Поскольку $\mu C((z_2)_\alpha) \subseteq_c \mu C(z_2)$, то из транзитивности отношения $\subseteq_c$ следует вложение

$$\mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2).$$

Если справедливо условие 2), то для трассирования ξ возможен один из рассматриваемых отдельно случаев, определяемый значениями $\xi(0)$и $\xi(1)$:

a) $(z_1')_0 \leqslant_c (z_2')_0$ и $(z_1')_1 \leqslant_c (z_2')_1$;

b) $(z_1')_0 \leqslant_c z_2'$ и $(z_1')_1 \leqslant_c (z_2')_1$;

c) $(z_1')_0 \leqslant_c (z_2')_0$ и $(z_1')_1 \leqslant_c z_2'$.

Пусть имеет место случай a).

Тогда

$$[z_1']_\lambda \rho_1 [z_2']_\lambda \ \& \ ([z_2']_\lambda = [z_2]_\lambda \vee [z_2']_\lambda = ([z_2]_\lambda)^{-1}).$$

Если значение $\mu C(z_1')$ определяется с помощью соотношения 1) схемы вычисления μC, то $z_1' \subseteq_c (z_1')_\alpha$, где $\alpha \neq \lambda$, и $\mu C(z_1') = \mu C((z_1')_\alpha)$. Так как $(z_1')_\alpha \subseteq_c z_2'$ и $d_\varepsilon((z_1')_\alpha) \leqslant k$, то по индуктивному предположению $\mu C(z_1') \subseteq_c \mu C(z_2')$.

Из леммы 2 следует, что

$$\mu C(z_1') \in \Delta(\mu C(z_1))$$

и

$$\mu C(z_2') \in \Delta(\mu C(z_2)),$$

а значит $\mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2)$.

Если значение $\mu C(z_1')$ определяется с помощью соотношения 2) схемы вычисления μC, то

$$[\mu C(z_1')]_\lambda = [z_1']_\lambda, \quad [\mu C(z_2')]_\lambda = [z_2']_\lambda.$$

Поэтому, $[\mu C(z_1')]_\lambda \rho_1 [\mu C(z_2')]_\lambda$.

Пусть имеет место случай

$$[z_1']_\lambda \rho_1 [z_2']_\lambda \ \& \ [z_2']_\lambda = [z_2]_\lambda.$$

Тогда для конфигураций $(z_1')_0$ и $(z_1')_1$, глубина разложения которых не превосходит k, справедливы c-вложения

$$\mu C((z_1')_0) \subseteq_c \mu C((z_2)_0)$$

и

$$\mu C((z_1')_1) \subseteq_c \mu C((z_2)_1).$$

Поэтому

$$\mu C(z_1') \subseteq_c \mu C(z_2),$$

а значит $\mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2)$.

Если же

$$[z_1']_\lambda \rho_1 [z_2']_\lambda \ \& \ [z_2']_\lambda = ([z_2]_\lambda)^{-1},$$

то

$$[\mu C(z_1)]_\lambda \rho_1 [\mu C(z_2')]_\lambda, \quad (z_1')_0 \subseteq_c (z_2)_1,$$

$$(z_1')_1 \subseteq_c (z_2)_1.$$

Из индуктивного предположения для z_1 следуют c-вложения

$$\mu C((z_1)_0) \subseteq_c \mu C((z_2)_1)$$

и

$$\mu C((z_1)_1) \subseteq_c \mu C((z_2)_0).$$

Поэтому $\mu C(z_1') \subseteq_c \mu C((z_2)_1)$ и $\mu C(z_1) \subseteq_c \mu C((z_2)_1)$.

Рассмотрим случай b). Поскольку $(z_1')_0 \subseteq_c z_2'$ и $d_\varepsilon((z_1')_0) \leqslant k$, то по индуктивному предположению $\mu C((z_1')_0) \subseteq_c \mu C(z_2')$ и существует такое c-трассирование ξ_1 инверсий конфигураций$(z_1')_0$ и z_2', что $\xi_1(\lambda) = \lambda$.

Из $(z_1')_1 \subseteq_c (z_2')_1$ следует, что $\mu C((z_1')_1) \subseteq_c \mu C((z_2')_\sigma)$ с отображением трассирования ξ_2. Тогда отображение

$$\xi_3(\alpha) = \begin{cases} \lambda, \text{ если } \alpha = \lambda, \\ \xi_1(\beta), \text{если } \alpha = 0\beta, \\ 1\xi_2(\beta), \text{ если } \alpha = 1\beta \end{cases}$$

является c-трассированием некоторой инверсии $\mu C(z_1)$ в инверсию $\mu C(z_2)$, для которого $\mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2)$.

Случай c) аналогичен случаю b). Поэтому $\mu C(z_1) \subseteq_c \mu C(z_2)$.

Теорема доказана.

Теорема 3.

$$\forall z_1, z_2 \in M'\big(z_1 \subseteq_c z_2 \ \& \ z_2 \subseteq_c z_1 \to \mu C(z_1) \in \Delta\big(\mu C(z_2)\big)\big).$$

Доказательство. Пусть $z_1 \subseteq_c z_2$ и $z_2 \subseteq_c z_1$. Покажем, что $\mu C(z_1) \in \Delta\big(\mu C(z_2)\big)$.

Докажем теорему индукцией по глубине разложений z_1 и z_2.

Базис индукции. Пусть $d_\varepsilon(z_1) \in \{0,1\}$, тогда

$$d_\varepsilon(z_1) = d_\varepsilon(z_2)$$

и

$$\mu C(z_1) = z_1 = z_2 = \mu C(z_2),$$

а, значит, $\mu C(z_1) \in \Delta(\mu C(z_2))$.

Индуктивное предположение. Пусть

$$\forall z_1, z_2 \in M'\big(d_\varepsilon(z_1) \leqslant k \ \& \ d_\varepsilon(z_2) \leqslant k \ \& \ z_1 \subseteq_c z_2 \ \& \ z_2 \subseteq_c z_1 \to \mu C(z_1) \in \Delta\big(\mu C(z_2)\big)\big).$$

Индуктивный переход. Пусть z_1, $z_2 \in M$ и $\max\big(d_\varepsilon(z_1), d_\varepsilon(z_2)\big) = k+1$.

Для z_1 и z_2 возможен из один случаев:

1) $\big(z_1 \subseteq_c (z_1)_0 \vee z_1 \subseteq_c (z_1)_1\big)$ & $\big(z_2 \subseteq_c (z_2)_0 \vee z_2 \subseteq_c (z_2)_1\big)$;

2) $\big(z_1 \subseteq_c (z_1)_0 \vee z_1 \subseteq_c (z_1)_1\big)$ & $\big(z_2 \not\subseteq_c (z_2)_0 \ \& \ z_2 \not\subseteq_c (z_2)_1\big)$;

3) $\big(z_1 \not\subseteq_c (z_1)_0 \ \& \ z_1 \not\subseteq_c (z_1)_1\big)$ & $\big(z_2 \subseteq_c (z_2)_0 \vee z_2 \subseteq_c (z_2)_1\big)$;

4) $\big(z_1 \not\subseteq_c (z_1)_0 \ \& \ z_1 \not\subseteq_c (z_1)_1\big)$ & $\big(z_2 \not\subseteq_c (z_2)_0 \ \& \ z_2 \not\subseteq_c (z_2)_1\big)$.

Случай 1. Пусть

$$\big(z_1 \subseteq_c (z_1)_0 \vee z_1 \subseteq_c (z_1)_1\big) \ \& \ \big(z_2 \subseteq_c (z_2)_0 \vee z_2 \subseteq_c (z_2)_1\big).$$

Поскольку $\subseteq_c$ — транзитивное отношение, то найдутся такие не равные λ значения $\alpha, \beta \in I$, что

1.1. $\mu C(z_1) = \mu C\big((z_1)_\alpha\big)$ & $\mu C(z_2) = \mu C\big((z_2)_\beta\big)$;

1.2. $\big((z_1)_\alpha \subseteq_c z_2 \ \& \ z_2 \subseteq_c (z_1)_\alpha\big)$ & $\big((z_2)_\beta \subseteq_c z_1 \ \& \ z_1 \subseteq_c (z_2)_\beta\big)$.

Следовательно,

$$(z_1)_\alpha \subseteq_c (z_2)_\beta \ \& \ (z_2)_\beta \subseteq_c (z_1)_\alpha$$

и по индуктивному предположению $\mu C\big((z_1)_\alpha\big) \in \Delta\big(\mu C((z_2)_\beta)\big)$. Поэтому $\mu C(z_1) \in \Delta\big(\mu C(z_2)\big)$.

Случай 2. Пусть

$$\big(z_1 \subseteq_c (z_1)_\alpha\big) \ \& \ \big(z_2 \not\subseteq_c (z_2)_0 \ \& \ z_2 \not\subseteq_c (z_2)_1\big), \quad \alpha \in \{0,1\}.$$

Из условий теоремы и свойств отношения $\subseteq_c$ следует, что $z_1 \subseteq_c (z_1)_\alpha$ и $(z_1)_\alpha \subseteq_c z_2$.

Поскольку $z_2 \not\subseteq_c (z_2)_\beta, \beta \in \{0,1\}$, то по определению μC

$$\varepsilon\big(\mu C(z_2)\big) = \big(\mu C\big((z_2)_0\big), \mu C\big((z_2)_1\big)\big).$$

Поэтому выполняются равенства

$$\mu C(z_1) = \mu C\big((z_1)_\alpha\big), \quad \alpha \in I;$$

$$[\mu C(z_2)]_\lambda = [z_2]_\lambda;$$

$$(\mu C(z_2))_\beta = \mu C\big((z_2)_\beta\big), \quad \beta \in \{0,1\}.$$

Так как $d_\varepsilon(z_1) > 1$, то найдётся значение $\gamma \in I$, для которого $z_1 \subseteq_c (z_1)_{\alpha\gamma}$, $z_1 \not\subseteq_c (z_1)_{\alpha\gamma 0}$, $z_1 \not\subseteq_c (z_1)_{\alpha\gamma 1}$. Здесь $\alpha\gamma$ — такой элемент $D(z_1)$, к которому при построении значения $\mu C(z_1)$ применяется соотношение 2) схемы определения μC. Поэтому справедливо равенство $\varepsilon\big(\mu C(z_1)\big) = \big(\mu C((z_1)_{\alpha\gamma 0}), \mu C((z_1)_{\alpha\gamma 1})\big)$.

Из $z_2 \subseteq_c z_1$ и $z_1 \subseteq_c (z_1)_{\alpha\gamma}$ следует, что $z_2 \subseteq_c (z_1)_{\alpha\gamma}$. При этом $z_2 \not\subseteq_c (z_1)_{\alpha\gamma\sigma}$, где $\sigma \in \{0,1\}$, поскольку иначе из $z_1 \subseteq_c z_2$ и $z_2 \subseteq_c (z_1)_{\alpha\gamma\sigma}$ следует вложение $z_1 \subseteq_c (z_1)_{\alpha\gamma\sigma}$, которое противоречит выбору $(z_1)_{\alpha\gamma}$.

Так как $(z_1)_{\alpha\gamma} \subseteq_c z_1$ и $z_1 \subseteq_c z_2$, то $(z_1)_{\alpha\gamma} \subseteq_c z_2$. При этом $(z_1)_{\alpha\gamma} \not\subseteq_c (z_2)_\delta$, $\delta \in \{0,1\}$, так как в противном случае

из $z_2 \subseteq_c (z_1)_{\alpha\gamma}$ и $(z_1)_{\alpha\gamma} \subseteq_c (z_2)_\delta$ следует неверное заключение о справедливости c-вложения $z_2 \subseteq_c (z_2)_\delta$.

Пусть $\xi_1(\ \xi_1)$ — такое c-трассирование конфигурации $z_1' \in \Delta((z_1)_{\alpha\gamma})$ в $z_2' \in \Delta(z_2)$ ($z_2'' \in \Delta(z_2)$ в $z_1'' \in \Delta((z_1)_{\alpha\gamma})$), для которого $z_1' \leqslant_c z_2'$ ($z_2'' \leqslant_c z_1''$).

Поскольку $z_2 \not\subset_c (z_1)_{\alpha\gamma\sigma}$ и $(z_1)_{\alpha\gamma} \not\subset_c (z_2)_\delta$, то $\xi_1(\lambda) = \xi_2(\lambda) = \lambda$.

Тогда из леммы 1 следует, что ξ_1 и ξ_2 являются инъективными, а $(z_1)_{\alpha\gamma} \in \Delta(z_2)$. Следовательно, на основании леммы 2 истинно соотношение $\mu C\big((z_1)_{\alpha\gamma}\big) \in \Delta\big(\mu C(z_2)\big)$, а, значит, $\mu C(z_1) \in \Delta\big(\mu C(z_2)\big)$.

Случай 3. Если

$$\big(z_1 \not\subset_c (z_1)_0 \ \&\ z_1 \not\subset_c (z_1)_1\big) \ \& \\ \big(z_2 \subseteq_c (z_2)_0 \vee z_2 \subseteq_c (z_2)_1\big),$$

то такая ситуация аналогична случаю 2. Поэтому $\mu C(z_1) \in \Delta\big(\mu C(z_2)\big)$.

Случай 4. Пусть

$$\big(z_1 \not\subset_c (z_1)_0 \ \&\ z_1 \not\subset_c (z_1)_1\big) \ \& \\ \big(z_2 \not\subset_c (z_2)_0 \ \&\ z_2 \not\subset_c (z_2)_1\big).$$

Тогда по определению морфизма μC выполняются соотношения

1. $[\mu C(z_1)]_\lambda = [z_1]_\lambda$ и $[\mu C(z_2)]_\lambda = [z_2]_\lambda$.
2. $\varepsilon(\mu C(z_1)) = \big(\mu C((z_1)_0), \mu C\big((z_1)_1\big)\big)$ и $\varepsilon\big(\mu C(z_2)\big) = (\mu C\big((z_2)_0\big), \mu C\big((z_2)_1\big)\big)$.

Следовательно, для любых c-трассирований ξ_1 и ξ_1 конфигурации $z_1' \in \Delta(z_1)$ в $z_2' \in \Delta(z_2)$ и $z_2'' \in \Delta(z_2)$ в $z_1'' \in \Delta(z_1)$, для которого $z_1' \leqslant_c z_2'$ и $z_2'' \leqslant_c z_1''$, справедливы соотношение $\xi_1(\lambda) = \lambda$ и $\xi_2(\lambda) = \lambda$.

Из леммы 1 следует, что ξ_1 и ξ_2 — инъективные отображения. Значит, $z_1' = z_2'$. Поэтому $z_1' \in \Delta(z_2)$ и $z_1 \in \Delta(z_2)$.

Из леммы 2 следует, что

$$\mu C(z_1) \in \Delta\big(\mu C(z_2)\big).$$

Теорема доказана.

Утверждение, обратное к утверждению теоремы 3 неверно, так как существуют конфигурации z_1 и z_2, для которых $\mu C(z_1) = \mu C(z_2)$ и $z_1 \not\subset_c z_2$.

Заключение

Сжатия конфигураций относятся к преобразованиям объектов пространств знаний, используемым для решения задачи упрощения и уменьшения избыточности соответствующих семантических представлений. Возможности таких преобразований определяются реализуемыми в них представлениями о допустимых и корректных изменениях структур конфигураций. Рассмотренные в настоящей работе преобразования упрощения основаны на специальном свойстве, для которого избыточность проявляется в возможности прослеживании конфигураций в их собственных подконфигурациях.

Литература

1. *Костенко К. И.* Морфизмы информационных объектов фундаментальной модели сред областей знаний // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. №4. С. 5–12.
2. *Костенко К. И.* О свойствах конфигураций абстрактного пространства знаний // Тезисы докладов IX международного семинара Дискретная математика и её приложения. М: МГУ. 2007. С. 315–317.

Ключевые слова: пространство знаний, преобразование знаний, избыточность знания, сжатие знаний.

Статья поступила 23 октября 2008 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Костенко К. И., 2008