Механика

УДК 539.3

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРИИ БЛОЧНЫХ СТРУКТУР В НАУКАХ О ЗЕМЛЕ, СЕЙСМОЛОГИИ, СТРОИТЕЛЬСТВЕ, МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ[1]

Бабешко В. А.[2]***, Евдокимова О. В.***[3]***, Бабешко О. М.***[4]***, Зарецкая М. В.***[5]***, Павлова А. В.***[6]***, Мухин А. С.***[7]***, Лозовой В. В.***[8]***, Федоренко А. Г.***[9]

ABOUT SOME APPLICATIONS OF THE THEORY OF BLOCK STRUCTURES IN EARTH SCIENCES, SEISMOLOGY, BUILDING AND CONSTRUCTION AND MATERIAL SCIENCE

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Zaretskaya M. V., Pavlova A. V., Mukhin A. S., Lozovoy V. V., Fedorenko A. G.

The work discusses the issues of using the theory of block structures in related fields and demonstrates the ways of its application. The theory of block structures makes it possible to study physical-and-mechanical fields in an aggregate of contacting domains occupied by the media with different properties. This theory can be used in the applications in various fields of science, i.e. mechanics of a deformable solid, material science, seismology, geophysics, acoustics, building and construction, technical sciences and engineering applications. In theoretical physics and quantum mechanics, crystallography, construction of large integral schemes, acousto-electronics, methods of the theory of block structures can be convenient components of the research. The theory of block structures is much more complex in development than the theory of layered structures, which is considered to be studied in detail. To develop this theory, mathematical methods are applied, which are rarely used in other applications, such as topological algebra, external analysis, theory of functions of many complex variables, multivariable Leray residue forms, and matrix-functions factorization. Matrix-functions factorization, which is not required in the theory of layered structures, is an integral component of the developed theory of block structures.

Keywords: block structure, seismology, topological algebra, integral equations, lithospheric plates, differential factorization method.

---

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (06-01-00295, 08-08-00468, 06-08-00671, 08-08-00669), программы Юг России (08-01-99012, 08-01-99013, 08-01-99016, 08-08-99090, 08-08-99091, 07-01-12028, 06-01-96634–06-01-96638), проект НШ-2298.2008.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

[3]Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета.

[4]Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

[5]Зарецкая Марина Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

[6]Павлова Алла Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

[7]Мухин Алексей Сергеевич, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

[8]Лозовой Виктор Викторович, научный сотрудник Южного научного центра РАН.

[9]Федоренко Алексей Григорьевич, научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

Разработанная в [1] теория блочных структур, позволяющая исследовать физико-механические поля в совокупности контактирующих областей, занятых средами с различными свойствами, может использоваться в самых различных приложениях. К ним относятся механика деформированного твердого тела, материаловедение, сейсмология, геофизика, акустика, строительство, технические науки и инженерные приложения. В теоретической физике и квантовой механике, кристаллографии, проектировании больших интегральных схем, акустоэлектронике методы теории блочных структур могут стать удобными составляющими исследования. Теория блочных структур является гораздо более сложной по построению, чем теория слоистых структур, считающаяся детально изученной. Для ее развития пришлось применить такие редко используемые в приложениях математические методы как топологическая алгебра, внешний анализ, теория функций многих комплексных переменных, многомерные формы-вычеты Лере, факторизация матриц-функций. Факторизация матриц-функций является неотъемлемой составляющей построенной теории блочных структур, чего не требуется в теории слоистых структур. Без решения проблемы факторизации в аналитическом виде матриц-функций нескольких комплексных переменных произвольного порядка теория блочных структур не могла быть завершенной. Считавшаяся невозможной такая факторизация была построена в работе [2]. Достоинствами разработанной теории блочных структур являются возможность аналитического представления решений краевых задач в локальных областях и метод постановки этих задач путем построения набора функциональных уравнений в совокупности областей [1]. Еще одним достоинством теории блочных структур является возможность изменения масштабов областей блочной структуры путем введения дополнительных сечений или наоборот — объединения блоков с одинаковыми свойствами в более масштабные, что практически не применялось в теории слоистых структур. Именно эти свойства исключительно ценны при исследовании полей напряжений и деформаций Земли как деформируемого твердого тела, застроенной территории при анализе ее состояния, материалов с покрытиями и неоднородностями.

1. Рассмотрим с позиции возможностей теории блочных структур задачи, связанные с изучением напряженно-деформированного состояния земного шара с учетом его строения и действующих физических полей, проблему оценки поведения зданий и сооружений на застроенной территории, проблему прохождения волн в блочных структурах, т. е. паспортизацию сейсмических трасс и, наконец, проблему исследования физико-механических свойств материалов, имеющих нано- и микроструктурные составляющие.

С первого взгляда эти задачи кажутся далекими по содержанию и разнотипными по методам исследования и решения. На самом деле, благодаря теории блочных структур и используемым при ее построении дифференциальному и интегральному методам факторизации, эти задачи могут исследоваться однотипно.

1.1. Проблему исследования напряженно-деформированного состояния земного шара можно описать краевой задачей для эллипсоида с эллипсоидальными слоями и ядром в центре, причем каждый слой имеет индивидуальные характеристики деформируемого тела. Они представляют собой блоки блочной структуры. Дифференциальные уравнения краевых задач при указанной постановке хорошо известны [3], как и параметры геометрии эллипсоида и его слоев. Выписав уравнения, в соответствии с дифференциальным методом факторизации для каждого блока строятся функциональные уравнения с использованием внешних форм [1]. Затем функциональные уравнения подвергаются применению алгоритма исследования и решения, детально описанному в работах [4, 5]. Алгоритм остается одним и тем же как в случае обычной, так и обобщенной факторизации, однако обобщенная факторизация быстрее приводит к решению, т. к. при применении обычной факторизации предстоит «измельчить» блочную структуру до присутствия выпуклых или почти выпуклых блоков [1].

Последнее может быть достигнуто, например, сечениями достаточно плотной сеткой вдоль параллелей и меридианов, затем по радиусу. На этом пути достигается оценка напряженно-деформированного состояния при глобальном рассмотрении земного шара. Однако в сейсмологии гораздо более актуальной является проблема изучения напряженно-деформированного состояния литосферных плит коры Земли, где концентрируется основная энергия, высвобождение которой при разрушениях приво-

дит к землетрясениям. Как правило, наиболее разрушительными являются неглубокие землетрясения, эпицентры которых находятся вблизи дневной поверхности Земли. Одна из признанных причин землетрясений — накопление энергии за счет медленных горизонтальных движений литосферных плит с последующим ее высвобождением с эпицентром, находящимся на разломе, который, в свою очередь, испытывает подвижки берегов. С учетом размеров разломов (до 20–50 км) и толщины коры Земли (8–40 км) в масштабе радиуса Земли (6 400 км) кору Земли для избранного региона (300–500 км) можно рассматривать без кривизны. Имеющиеся данные строения литосферных плит по всей толщине, полученные вибросейсмическими методами, показывают, что они являются именно блочными, а не слоистыми структурами. Рассматривая тектонические плиты как объекты исследования упомянутой выше теорией, можно разными способами вводить блочные структуры, проводя виртуальные разрезы. Если применяется обычная факторизация, то блоки должны быть выпуклыми, причем при их введении целесообразно проводить сечения вдоль разломов, относя берега разломов к разным блокам. В зависимости от постановок краевых задач определяющие уравнения для каждого блока могут быть в общем случае известными системами уравнений в частных производных для термоэлектроупругих, пористых, водонасыщенных, пластических материалов или водных акваторий.

Важно правильно ввести граничные условия для рассматриваемых блоков с учетом контактов между ними. Поставленная таким образом краевая задача готова к исследованию методом теории блочных структур.

1.2. Проблема поведения сооружений и зданий на застроенной территории также сводится к анализу блочной структуры, которая должна быть введена с учетом свойств грунтов, ландшафта территории, особенностей фундамента и самого сооружения. Более того, теория блочных структур, в отличие от других подходов, дает возможность рассматривать не только отдельное строение на территории, но и их комплекс. При построении блочной структуры застроенного комплекса необходим анализ как самих строений, их деформируемых составляющих, формы и механических характеристик фундамента, так и поверхностных и глубинных грунтов, а также горного или прибрежного ландшафтов. Весь перечисленный комплекс объектов, в первую очередь, должен быть подвергнут геометрическому анализу на предмет введения сечений, обеспечивающих построение блочной структуры. Некоторые блоки могут анализироваться простой, другие — обобщенной факторизацией. В зависимости от требований детализации исследования строение может рассматриваться или как отдельный блок, или как блочная подструктура, контактирующая с остальными блоками. Важно заметить, что применение топологических методов при исследовании делает равноправными как ограниченные блоки, так и блоки с границами, уходящими в бесконечность, т. е. их исследование проводится однотипно. Другие методы, например, конечного или граничного элемента, требуют извлечения области, содержащей строение и прилегающий грунт, и могут эффективно изучать краевые задачи только в ограниченных областях. Дальнейшее применение теории блочных структур к решению поставленной краевой задачи осуществляется обычным алгоритмом.

1.3. Проблема прохождения волн в блочных структурах, т.е. паспортизация сейсмических трасс [6], для своей постановки нуждается в предварительном анализе строения литосферных плит, получаемого, например, вибросейсмическим, магнитотеллурическим или иным методом.

Знание строения литосферных плит позволяет ввести блочную структуру.

В зависимости от масштабов, типа ландшафта, наличия горных массивов или водных акваторий блочная структура должна формироваться также с учетом особенностей скоростей основных видов волн в присутствующих средах. Должна быть установлена достаточно коррелированная связь между теоретическими и экспериментальными параметрами принимаемых волн от удаленного источника, прошедших трассу.

Экспериментальные изменения параметров, произошедшие на одной и той же трассе, свидетельствуют о каких-то изменениях в блочной структуре, требующих интерпретации на основании теоретических исследований. Это непростая задача, которая может иметь не единственное решение, и, возможно, потребует дополнительных экспериментов.

Имеется множество причин, вызывающих изменения в блочной структуре паспортизированной трассы, и большие теоретические возможности теории блочных структур

для установления причин отмеченных изменений. Таким образом, краевая задача вновь сводится к исследованию блочных структур.

1.4. Проблема исследования физико-механических свойств материалов, имеющих нано- и микроструктурные составляющие, приводит к блочной системе, блоки которой являются разноразмерными. В работах [7, 8] показано, что некоторые типы наноматериалов представляют собой плоские объекты, находящиеся на поверхности микроматериалов — трехмерных деформируемых тел, называемых подложками. Следуя [7, 8], будем изучать тот случай, когда указанный наноматериальный объект взаимодействует с деформируемым телом. Нанообъект может иметь гораздо большую жесткость, чем подложка, и его можно рассматривать как жесткий штамп, находящийся на поверхности деформируемого тела. Если возникнет необходимость считать нанообъект деформируемым, его можно моделировать деформируемой пластины [9]. Учитывая, что размеры нанообъекта и тела несопоставимо разнятся, тело можно считать слоем или полупространством. Принимая во внимание, что подложка постоянно находится в колебательном состоянии благодаря фононному полуколебанию атомов кристаллических решеток материала подложки, приходим к смешанной задаче о колебании штампа на слое.

Таким образом, при изучении блочных структур одной размерности вначале используется дифференциальный метод факторизации, в то время как в случае разноразмерных — интегральный [4].

2. Сформулируем краевую задачу для трех первых описанных выше приложений для блочных структур.

Будем считать, что область Ω блочной структуры состоит из областей Ω_b, $b = 1, 2, \ldots, B$ с границами $\partial\Omega_b$. Может оказаться, что часть границы блока является общей с границей другого блока, ее называем контактирующей. Остальная часть, не контактирующая, может быть свободной или подчиненной внешним воздействиям. Предполагается, что в каждой области Ω_b ставится краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными, своими в каждой области, коэффициентами.

Краевую задачу для системы P дифференциальных уравнений в частных производных в блочной трехмерной области Ω, можно записать для каждого блока в виде

$$\mathbf{K}_b(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi_b = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A^b_{spmnk}\varphi^{(m)(n)(k)}_{bp,x_1x_2x_3} = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots, P_b, \quad A^b_{sqmnk} = \text{const},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_b = \{\varphi_{b1}, \varphi_{b2}, \ldots, \varphi_{bP}\}, \quad b = 1, 2, \ldots, B.$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{x} \in \Omega_b.$$

На общей, контактирующей, границе $\partial\Omega_b \cap \partial\Omega_d$ задаются следующие граничные условия сопряжения:

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi_b + \mathbf{R}_d(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi_d = \sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{p=1}^{P}\left[B^b_{spmnk}\varphi^{(m)(n)(k)}_{bp,x_1x_2x_3} + B^d_{spmnk}\varphi^{(m)(n)(k)}_{dp,x_1x_2x_3}\right] = f_{bds}, \quad (1)$$

$$s = 1, 2, \ldots, s_{b0} < P, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_b \cap \partial\Omega_d,$$

$$M_1 < M, \quad N_1 < N, \quad K_1 < K,$$

$$b, d = 1, 2, \ldots, B.$$

Дальнейшее исследование краевой задачи, которая рассматривается в пространствах медленно растущих обобщенных функций $H_{\mathbf{s}}(\Omega)$, производится методом, изложенным в [1].

В качестве примера для каждого блока $b = 1, 2, \ldots, B$, имеющего свои механические характеристики, возьмем определяющие уравнения изотропной теории упругости в форме [10, 11]

$$(\lambda_b + \mu_b)\,\mathrm{graddiv}\,\mathbf{u}_b + \mu\Delta\mathbf{u}_b - \delta_b\mathbf{u}_b = 0,$$

$$\mathbf{u}_b = \{u_{b1}, u_{b2}, u_{b3}\}.$$

Здесь сохранены все обозначения указанных работ.

На неконтактирующих частях границы ставятся традиционные граничные условия теории упругости [10, 11]. На контактирующих частях, в частности, на $\partial\Omega_{bd}$, ставятся условия равенства векторов напряжений и перемещений, т. е.

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_d, \quad \mathbf{u}_c = \{u_{c1}, u_{c2}, u_{c3}\}, \quad (2)$$

$$\mathbf{t}_b = \mathbf{t}_d, \quad \mathbf{t}_c = \{t_{c1}, t_{c2}, t_{c3}\},$$

$$t_{c1} = \sigma_{c13}, \quad t_{c2} = \sigma_{c23}, \quad t_{c3} = \sigma_{c33}.$$

Следуя дифференциальному методу факторизации [10, 11], сведем краевую задачу к системе функциональных уравнений, рассматривая каждую область Ω_b в отдельности.

В результате приходим к системе функциональных уравнений вида

$$\mathbf{K}_b(\alpha)\mathbf{\Phi}_b = \iint\limits_{\partial\Omega_b} \boldsymbol{\omega}_b, \qquad (3)$$

$$\mathbf{K}_b(\boldsymbol{\alpha}) \equiv -\mathbf{K}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3) = \\ = \|k_{bnm}(\boldsymbol{\alpha})\|, \quad b = 1, 2, \ldots, B.$$

Вид и описание всех участвующих в этой системе обозначений заимствованы из [10, 11] с добавлением индексов b. В частности, $\boldsymbol{\omega}_b$ — вектор внешних форм краевой задачи в области Ω_b.

Сопоставляя настоящий случай с рассмотренными в [10, 11], заметим, что граничные условия (2) в общем случае содержат значения напряжение и перемещений на границе, по крайней мере, из двух соседних областей.

Этим блочные структуры существенно отличаются от изучавшихся в [10, 11] отдельных тел. Граничные условия в соответствии с алгоритмом применения дифференциального метода факторизации для неконтактирующих границ применяются в соответствии с правилами, оговоренными в [5].

Не повторяя алгоритмы, изложенные в [10, 11], приведем вид псевдодифференциальных уравнений для случая контакта двух тел.

Удовлетворение граничных условий осуществляется по следующей схеме. Вначале граничные условия на неконтактирующей границе для каждого отдельного блока вносятся в соответствующие векторы внешних форм функциональных уравнений (3). При контакте блоков на общих границах соседних блоков $\partial\Omega_{bd}$ выполняются условия сопряжения (2). Эти соотношения должны быть внесены в соответствующий вектор внешних форм лишь одного из функциональных уравнений, в то время как вектор внешних форм второго уравнения остается неизменным. Как доказано в [1], эта процедура обеспечивает удовлетворение заданных граничных условий (2) и не требует отделения обобщенных функций от классических составляющих, возникающих естественным путем в решениях в методе факторизации.

3. Опуская процедуру применения дифференцального метода факторизации к рассматриваемой краевой задаче, включающую его реализацию в каждой области Ω_b, Ω_d отдельно, что выполнено в [10, 11], приведем псевдодифференциальные уравнения для блочной структуры из двух блоков

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_c^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu))\times \\
&\quad\times \mathbf{U}_c^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu))- \\
&\quad- \mathbf{D}_c^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu))\times \\
&\quad\times \mathbf{T}_c^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu))+ \\
&+ \sum_{\tau=1}^{\mathbf{T}}{}' \Big[\mathbf{M}_c^\tau(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu))\times \\
&\quad\times \mathbf{U}_c^\tau(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu))- \\
&\quad- \mathbf{D}_c^\tau(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu))\times \\
&\quad\times \mathbf{T}_c^\tau(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu))\Big] = 0.
\end{aligned}$$

Здесь $c = b$ в случае области Ω_b и $c = d$ в случае области Ω_d.

Эти псевдодифференциальные уравнения приемами, изложенными в работе [11], с сохранением принятых там обозначений можно свести к системам интегральных уравнений (СИУ). СИУ для области Ω_b, составленная относительно вектора $\mathbf{t}_b^\nu$, $\mathbf{t}_d^\nu$ при заданных на неконтактирующих границах векторах перемещений $\mathbf{u}_b^\nu$, $\mathbf{u}_d^\nu$, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{b\nu}} \mathbf{k}_b^\nu(x_1^\nu - \xi_1^\nu, x_2^\nu - \xi_2^\nu)\mathbf{t}_b^\nu(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu)d\xi_1^\nu d\xi_2^\nu + \\
&+\sum_{\tau=1}^{T}{}' \iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{b\tau}} \mathbf{k}_b^{\nu\tau}(x_1^\nu, \xi_1^\tau, x_2^\nu, \xi_2^\tau)\mathbf{t}_b^\tau(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau)d\xi_1^\tau d\xi_2^\tau = \\
&= \mathbf{u}_b^\nu(x_1^\nu, x_2^\nu) + \sum_{\tau=1}^{T}{}' \iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{b\tau}} \mathbf{b}_b^{\nu\tau}(x_1^\nu, \xi_1^\tau, x_2^\nu, \xi_2^\tau)\times \\
&\qquad\qquad\times \mathbf{u}_b^\tau(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau)d\xi_1^\tau\xi_2^\tau, \quad (4)
\end{aligned}$$

$$(x_1^\nu, x_2^\nu) \in \partial\Omega_{b\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant T.$$

Для области Ω_d, контактирующей с областью Ω_b по границе $\partial\Omega_{bd}$, с учетом выполнения

граничных условий (1), СИУ принимает вид

$$\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{p\nu}} \mathbf{k}_d^{\nu}(x_1^{\nu}-\xi_1^{\nu},x_2^{\nu}-\xi_2^{\nu})\mathbf{t}_c^{\nu}(\xi_1^{\nu},\xi_2^{\nu})d\xi_1^{\nu}d\xi_2^{\nu}+$$
$$+\sum_{\tau=1}^{T_1}{}'\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{d\tau}} \mathbf{k}_d^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})\mathbf{t}_d^{\tau}(\xi_1^{\tau},\xi_2^{\tau})d\xi_1^{\tau}d\xi_2^{\tau}$$
$$+\sum_{\tau=1}^{T_2}{}'\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{bd\tau}} \mathbf{k}_d^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})\mathbf{t}_b^{\tau}(\xi_1^{\tau},\xi_2^{\tau})d\xi_1^{\tau}d\xi_2^{\tau}=$$
$$=\mathbf{u}_c^{\nu}(x_1^{\nu},x_2^{\nu})+$$
$$+\sum_{\tau=1}^{T_1}{}'\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{d\tau}} \mathbf{b}_d^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})\mathbf{u}_d^{\tau}(\xi_1^{\tau},\xi_2^{\tau})d\xi_1^{\tau}\xi_2^{\tau}+$$
$$+\sum_{\tau=1}^{T_2}{}'\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{bd\tau}} \mathbf{b}_d^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})\mathbf{u}_b^{\tau}(\xi_1^{\tau},\xi_2^{\tau})d\xi_1^{\tau}\,\xi_2^{\tau}, \tag{5}$$

$$(x_1^{\nu},x_2^{\nu})\in\partial\Omega_{d\nu};\quad 1\leqslant\nu\leqslant T=T_1+T_2.$$

Здесь $c=d$, $p=d$, если $(x_1^{\nu},x_2^{\nu})\in\partial\Omega_{b\nu}$; $c=b$, $p=bd$, при $(x_1^{\nu},x_2^{\nu})\in\partial\Omega_{bd\nu}$; T_1, T_2 — числа разбиений единицы неконтактирующей части границы $\partial\Omega_{b\nu}$ и контактирующей $\partial\Omega_{bd\nu}$ соответственно. Штрих у знаков сумм означает, что члены, для которых $\nu=\tau$, выпадают, если они встречаются под знаком суммы. Ядра интегральных уравнений в обозначениях работы [11] имеют вид

$$\mathbf{K}_c^{\nu}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu})=(\mathbf{M}_c^{\nu})^{-1}\mathbf{D}_c^{\nu},$$
$$\mathbf{K}^{\nu\tau}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu})=(\mathbf{M}_c^{\nu})^{-1}\mathbf{D}_c^{\tau},$$
$$\mathbf{B}_c^{\nu\tau}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu})=(\mathbf{M}_c^{\nu})^{-1}\mathbf{M}_c^{\tau}.$$
$$\mathbf{k}_c^{\nu}(x_1^{\nu},x_2^{\nu})=F_2^{-1}\mathbf{K}_c^{\nu}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu});$$

$$\mathbf{k}_c^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})=$$
$$=F_2^{-1}K_c^{\nu\tau}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu})\exp i(\mathbf{c}_{\tau}^{\nu}\boldsymbol{\alpha}^{\nu},\boldsymbol{\xi}^{\tau}),$$

$$\mathbf{b}_c^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})=$$
$$=F_2^{-1}\mathbf{B}_c^{\nu\tau}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu})\exp i(\mathbf{c}_{\tau}^{\nu}\boldsymbol{\alpha}^{\nu},\boldsymbol{\xi}^{\tau}),$$

$$\mathbf{t}_c^{\nu}(x_1^{\nu},x_2^{\nu})=F_2^{-1}\mathbf{T}_c^{\nu}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu}),$$
$$\mathbf{u}_c^{\nu}(x_1^{\nu},x_2^{\nu})=F_2^{-1}\mathbf{U}_c^{\nu}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu}).$$

Формулы имеют место для $c=b$ и $c=d$.

В том случае, когда на границе задаются векторы напряжений $\mathbf{t}_b^{\nu}$, $\mathbf{t}_d^{\nu}$, соответствующая система уравнений относительно векторов перемещений $\mathbf{u}_b^{\nu}$, $\mathbf{u}_d^{\nu}$ принимает вид

$$\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{b\nu}} \mathbf{n}_b^{\nu}(x_1^{\nu}-\xi_1^{\nu},x_2^{\nu}-\xi_2^{\nu})\mathbf{u}_b^{\nu}(\xi_1^{\nu},\xi_2^{\nu})d\xi_1^{\nu}d\xi_2^{\nu}+$$
$$+\sum_{\tau=1}^{T}{}'\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{b\tau}} \mathbf{n}_b^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})\mathbf{u}_b^{\tau}(\xi_1^{\tau},\xi_2^{\tau})d\xi_1^{\tau}d\xi_2^{\tau}=$$
$$=\mathbf{t}_b^{\nu}(x_1^{\nu},x_2^{\nu})+$$
$$+\sum_{\tau=1}^{T}{}'\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{b\tau}} \mathbf{r}_b^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})\mathbf{t}_b^{\tau}(\xi_1^{\tau},\xi_2^{\tau})d\xi_1^{\tau}\xi_2^{\tau}, \tag{6}$$

$$(x_1^{\nu},x_2^{\nu})\in\partial\Omega_{b\nu},\quad 1\leqslant\nu\leqslant T,$$

$$\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{p\nu}} \mathbf{n}_d^{\nu}(x_1^{\nu}-\xi_1^{\nu},x_2^{\nu}-\xi_2^{\nu})\mathbf{u}_c^{\nu}(\xi_1^{\nu},\xi_2^{\nu})d\xi_1^{\nu}d\xi_2^{\nu}+$$
$$+\sum_{\tau=1}^{T_1}{}'\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{d\tau}} \mathbf{n}_d^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})\mathbf{u}_d^{\tau}(\xi_1^{\tau},\xi_2^{\tau})d\xi_1^{\tau}d\xi_2^{\tau}+$$
$$+\sum_{\tau=1}^{T_2}{}'\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{bd\tau}} \mathbf{n}_d^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})\mathbf{u}_b^{\tau}(\xi_1^{\tau},\xi_2^{\tau})d\xi_1^{\tau}d\xi_2^{\tau}=$$
$$=\mathbf{t}_c^{\nu}(x_1^{\nu},x_2^{\nu})+$$
$$+\sum_{\tau=1}^{T_1}{}'\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{d\tau}} \mathbf{r}_d^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})\mathbf{t}_d^{\tau}(\xi_1^{\tau},\xi_2^{\tau})d\xi_1^{\tau}\xi_2^{\tau}+$$
$$+\sum_{\tau=1}^{T_2}\iint\limits_{\partial\mathbf{\Omega}_{bd\tau}} \mathbf{r}_d^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\xi_1^{\tau},x_2^{\nu},\xi_2^{\tau})\mathbf{t}_b^{\tau}(\xi_1^{\tau},\xi_2^{\tau})d\xi_1^{\tau}\xi_2^{\tau}, \tag{7}$$

$$(x_1^{\nu},x_2^{\nu})\in\partial\Omega_{d\nu},\quad 1\leqslant\nu\leqslant T=T_1+T_2,$$

$c=d$, $p=d$ при $(x_1^{\nu},x_2^{\nu})\in\partial\Omega_{b\nu}$; $c=b$, $p=bd$, если $(x_1^{\nu},x_2^{\nu})\in\partial\Omega_{bd\nu}$

$$\mathbf{N}^{\nu}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu})=(\mathbf{D}^{\nu})^{-1}\mathbf{M}^{\nu},$$
$$\mathbf{N}^{\nu\tau}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu})=(\mathbf{D}^{\nu})^{-1}\mathbf{M}^{\tau},$$
$$\mathbf{R}^{\nu\tau}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu})=(\mathbf{D}^{\nu})^{-1}\mathbf{D}^{\tau},$$
$$\mathbf{N}^{\nu}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu})=(\mathbf{D}^{\nu})^{-1}\mathbf{M}^{\nu},$$
$$\mathbf{N}^{\nu\tau}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu})=(\mathbf{D}^{\nu})^{-1}\mathbf{M}^{\tau},$$
$$\mathbf{R}^{\nu\tau}(\alpha_1^{\nu},\alpha_2^{\nu})=(\mathbf{D}^{\nu})^{-1}\mathbf{D}^{\tau},$$

$$\mathbf{n}_c^\nu(x_1^\nu, x_2^\nu) = F_2^{-1}\mathbf{N}_c^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu),$$

$$\mathbf{n}_c^{\nu\tau}(x_1^\nu, \xi_1^\tau, x_2^\nu, \xi_2^\tau) = \\ = F_2^{-1}\mathbf{N}_c^{\nu\tau}(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)\exp i(\mathbf{c}_\tau^\nu\boldsymbol{\alpha}^\nu, \boldsymbol{\xi}^\tau),$$

$$\mathbf{r}_c^{\nu\tau}(x_1^\nu, \xi_1^\tau, x_2^\nu, \xi_2^\tau) = \\ = F_2^{-1}\mathbf{R}_c^{\nu\tau}(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)\exp i(\mathbf{c}_\tau^\nu\boldsymbol{\alpha}^\nu, \boldsymbol{\xi}^\tau);$$

$$1 \leqslant \nu \leqslant T, \quad c = b, d.$$

Анализ этих формул показывает, что первые слева интегральные операторы обратимы интегральным методом факторизации, изложенным в [5, 12, 13], и являются, как и в работах [10, 11], главными.

Заметим, что изложенный вывод интегральных уравнений (4), (5) и (6), (7) для блочной структуры из двух блоков позволяет без труда получить интегральные уравнения для блочной структуры, содержащей произвольное число блоков. Более того, подобный вид имеет СИУ также и для блочной структуры, у которой области, занятые блоками, не являются выпуклыми. Однако в этом случае главные операторы не обязательно имеют ядра, зависящие от разности аргументов. В случае блочной структуры так же, как и в случае одного тела, можно построить приближенное решение, опустив малые члены. В этом случае интегральные уравнения имеют вид

$$\iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}_{b\nu}} \mathbf{k}_b^\nu(x_1^\nu - \xi_1^\nu, x_2^\nu - \xi_2^\nu)\mathbf{t}_b^\nu(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu)d\xi_1^\nu d\xi_2^\nu = \\ = \mathbf{u}_b^\nu(x_1^\nu, x_2^\nu),$$

$$(x_1^\nu, x_2^\nu) \in \partial\Omega_{b\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant T;$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_{p\nu}} \mathbf{k}_d^\nu(x_1^\nu - \xi_1^\nu, x_2^\nu - \xi_2^\nu)\mathbf{t}_c^\nu(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu)d\xi_1^\nu d\xi_2^\nu = \\ = \mathbf{u}_c^\nu(x_1^\nu, x_2^\nu),$$

$$(x_1^\nu, x_2^\nu) \in \partial\Omega_{d\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant T;$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_{b\nu}} \mathbf{n}_b^\nu(x_1^\nu - \xi_1^\nu, x_2^\nu - \xi_2^\nu)\mathbf{u}_b^\nu(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu)d\xi_1^\nu d\xi_2^\nu = \\ = \mathbf{t}_b^\nu(x_1^\nu, x_2^\nu),$$

$$(x_1^\nu, x_2^\nu) \in \partial\Omega_{b\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant T;$$

$$\iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}_{p\nu}} \mathbf{n}_d^\nu(x_1^\nu - \xi_1^\nu, x_2^\nu - \xi_2^\nu)u_c^\nu(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu)d\xi_1^\nu d\xi_2^\nu = \\ = \mathbf{t}_c^\nu(x_1^\nu, x_2^\nu),$$

$$(x_1^\nu, x_2^\nu) \in \partial\Omega_{d\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant T.$$

Здесь $c = d$, $p = d$ при $(x_1^\nu, x_2^\nu) \in \partial\Omega_{b\nu}$; $c = b$, $p = bd$ при $(x_1^\nu, x_2^\nu) \in \partial\Omega_{bd\nu}$.

Обратив интегральные уравнения, вносим точные или приближенные их решения в интегральные представления решений краевых задач и получаем их в следующем виде:

$$\mathbf{u}_c^\nu = F_3^{-1}\big(\mathbf{K}_c(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu)\big)^{-1}\iint\limits_{\partial\Omega_c}\boldsymbol{\omega}_c^\nu,$$

$$c = b, d.$$

В дальнейшем можно воспользоваться приемами, изложенными в [10,11], позволяющими исследовать или вычислить двумерные интегралы.

4. Для исследования блочной структуры с разноразмерными блоками применяется интегральный метод факторизации решения интегральных уравнений в общем случае анизотропной теории деформируемого твердого тела. Кратко изложим анализ в случае интегрального уравнения для одного нанообъекта, занимающего выпуклую область Ω.

Интегральное уравнение краевой задачи для блочной структуры имеет вид

$$Kq = \\ = \int\limits_\Omega\int k\,(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)\,q\,(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2 = \\ = f\,(x_1, x_2)\,, \quad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

$$k\,(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int K\,(\alpha_1, \alpha_2)\,e^{-i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x})}d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

Предполагается, что функция $K\,(\alpha_1, \alpha_2)$ обладает следующими свойствами. Функция $K\,(\alpha_1, \alpha_2)$ в общем случае является аналитической функцией. Она описывается отношением аналитических функций двух комплексных переменных. Будем считать, что $K\,(\alpha_1, \alpha_2)$ обладает при вещественных γ_k асимптотическим поведением вида

$$M\,(\gamma_1,\, \gamma_2) = M(\gamma_1)\gamma_2^{-1}[1 + O(\gamma_2^{-1})],$$

$$0 \leqslant \gamma_1 \leqslant 2\pi, \quad \gamma_2 \to \infty,$$

$$\alpha_1 = \gamma_2\cos\gamma_1, \quad \alpha_2 = \gamma_2\sin\gamma_1,$$

$$M(\gamma_1, \gamma_2) = K(\gamma_2 \cos\gamma_1, \gamma_2 \sin\gamma_1).$$

Применяя теорию вирусов вибропрочности, изложенную в [14], решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$q(x_1, x_1) = p(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2),$$

$$p(x_1, x_2) = \\ = F_2^{-1}\Pi^{-1}\left\{\left\{\sum_{r=1}^{R}\frac{p_{1r}\Theta_r}{p_{2r}p_{1r}}\right\}_{\Omega}^{+} + (K_0^{-1}f)\right\},$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \left\{F_2^{-1}p_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, S)\int\limits_{\partial\Omega}\theta\right\}_{\Omega}^{+},$$

$$\left\{F_2^{-1}p_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, S)\int\limits_{\partial\Omega}\theta\right\}_{\Omega}^{-} = 0,$$

$$\left\{F_2^{-1}\Pi^{-1}\left\{\left\{\sum_{r=1}^{R}\frac{p_{1r}\Theta_r}{p_{2r}p_{1r}}\right\}_{\Omega}^{+} + \right.\right. \\ \left.\left. + (K_0^{-\mathbf{1}}f)\right\}\right\}_{\Omega}^{-} = 0.$$

Последние два соотношения представляют системы одномерных интегральных уравнений, нормально разрешимых. Они служат для определения неизвестных граничных функций $g_{km}(x_1, x_2)$, $k = 1, 2, \ldots, 2M$, $m = 1, 2, \ldots, R$.

Все обозначения заимствованы из работы [14].

Таким образом, в настоящей работе продемонстрирована возможность применения в разных областях науки и практической деятельности разработанной в Кубанском государственном университете теории блочных структур.

Литература

1. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и наноструктурах // ДАН. 2007. Т. 415. № 5. С. 596–599.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 163–167.
3. *Магницкий В. А.* Внутреннее строение и физика Земли. М.: Наука, 2006. 392 с.
4. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 168–172.
5. *Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А.* О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. 2008. Т. 418. № 3. С. 321–323.
6. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Лозовой В. В., Мухин А. С., Чмыхалов С. П.* К проблеме паспортизации сейсмических трасс // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 4. С. 8–15.
7. *Гусев А. И.* Наноматериалы, структуры, технологии. М.: Физматлит, 2007. 416 с.
8. *Пул Ч., Оуэнс Ф.* Нанотехнологии. М.: Техносфера, 2005. 336 с.
9. *Бабешко В. А., Бабешко О. М, Евдокимова О. В.* К проблеме оценки состояния материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 409. № 4. С. 481–485.
10. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О дифференциальном методе факторизации в задачах для сплошных сред // ДАН. Т. 421. № 1. 2008. С. 37–40.
11. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Дифференциальный метод факторизации в статических задачах // ДАН. Т. 423. № 6. 2008. С. 748–752.
12. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
13. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
14. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 473–477.

Ключевые слова: блочная структура, сейсмология, топологическая алгебра, интегральные уравнения, литосферные плиты, дифференциальный метод факторизации.

Статья поступила 15 декабря 2008 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Павлова А. В., Мухин А. С., Лозовой В. В., Федоренко А. Г., 2008