УДК 533.6

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ СЖИМАЕМОГО ГАЗА ВБЛИЗИ ТВЕРДОЙ ГРАНИЦЫ

Гайденко С. В.[1]

NONSTATIONARY CIRCUMFLUENCE OF A THIN WING PROFILE BY SUBSONIC FLOW OF COMPRESSIBLE GAS NEAR THE SOLID BOUNDARY

Gaidenko S. V.

A nonstationary boundary value problem for the perturbed velocity potential is considered. The Fourier and Laplace transforms in the spaces of generalized functions convert the problem into a two-dimensional singular integral equation relative to pressure jump on the wing profile. We derive the kernel of this equation in the explicit form by inverse transforms. Also, the integral representation for the perturbed velocity potential is obtained as a function of the pressure jump.

Keywords: wing profile, subsonic flow, compressible gas, pressure jump, perturbed velocity potential.

В нестационарной теории крыла [1, 2] известно интегральное представление потенциала возмущенных скоростей через нормальную составляющую скорости, заданную в плоскости движения крыла. Однако в математической модели обтекания крыла потоком газа нормальная составляющая скорости известна только в точках крыла, а впереди и позади крыла заданы смешанные граничные условия, из которых нормальная составляющая скорости может быть определена посредством решения интегральных уравнений. Этим методом в [1] построен потенциал возмущенных скоростей, вызванных движением тонкого профиля над твердой поверхностью. Здесь трехмерное пространство разбито на счетное множество областей, границы которых определяются огибающими поверхностями семейств характеристических конусов. В каждой такой области потенциал скоростей представлен громоздкой суммой, слагаемые которой связаны рекуррентными интегральными соотношениями. Рекурсия возникает вследствие периодического отражения возмущений от твердой поверхности.

В монографии [2] на основе физических представлений построен потенциал скоростей, индуцируемых одиночным нестационарным вихрем с постоянной напряженностью, возникшей мгновенно в начальный момент времени. Здесь же вычислена вертикальная скорость в плоскости сносимого потоком свободного вихря. Основываясь на этих формулах, можно заменить профиль системой дискретных вихрей и предельным переходом прийти к интегральному представлению потенциала возмущенных скоростей с переменной напряженностью, а также к интегральному уравнению первого рода относительно напряженности непрерывно распределенных вдоль профиля присоединенных вихрей. Это интегральное уравнение приведено в [3, 4]. Так как напряженность является производной по времени скачка давления на профиле, относительно последнего уравнением будет интегро-дифференциальное.

В рассматриваемой математической модели представляет интерес не сам потенциал скоростей, а скачок давления на крыле. В настоящей работе на основе дифференциальной задачи для полуограниченного потока выведено сингулярное интегральное уравнение первого рода [5]. Это уравнение относительно скачка давления эквивалентно уравнению, приведенному в [3, 4]. Однако применяемая здесь техника интегральных преоб-

[1]Гайденко Станислав Викторович, канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: SVGaidenko@mail.ru.

разований и их точного обращения позволяет получить вне профиля интегральное представление потенциала возмущенных скоростей через скачок давления на профиле. Такое представление приводит к интегральному уравнению второго рода.

Современное состояние теории крылового профиля отражено в монографии [6].

1. Постановка задачи

Рассматривается бесконечно тонкий профиль крыла бесконечного размаха длиной $2a$, движущийся с постоянной скоростью V в дозвуковом потоке газа на расстоянии h от твердой поверхности и совершающий малые колебания около некоторого среднего положения. В подвижной системе координат, ось Ox которой направлена вдоль хорды профиля, а ось Oy вертикально вверх, уравнение неразрывности для потенциала возмущенных скоростей $\varphi(x,y,t)$ безвихревого потока имеет вид

$$\left(1-M^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{2M}{C}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0,$$

где C — скорость звука, $M=\frac{V}{C}$ — число Маха, t — время.

Дифференциальное уравнение выполняется при $t>0$ в полуплоскости $x\in(-\infty,\infty)$, $y>-h$ всюду за исключением луча $x\in[-a,\infty)$ на прямой $y=0$. На самом профиле задано линеаризованное условие непротекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,0,t)=V_y(x,t),$$

которое выполняется на отрезке прямой $y=0$ при $-a<x<a$. Здесь

$$V_y(x,t)=V\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t},\quad f(x,t)$$

— известные ординаты крыла. Позади профиля при $x>a$ выполняется условие непрерывности давления

$$\left(V\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(x,+0,t)=\left(V\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(x,-0,t).$$

На твердой границе задано условие непротекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,-h,t)=0.$$

Начальные условия предполагаются однородными: $\varphi(x,y,t)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,y,t)=0$ для тех точек (x,y), в которых при $t>0$ выполняется уравнение неразрывности. Кроме того, предполагаем, что решение $\varphi(x,y,t)$ равномерно по $t>0$ стремится к нулю при $x^2+y^2\to 0$.

Основная цель в рассматриваемой задаче — отыскание неизвестного скачка давления

$$\gamma(x,t)=\left(V\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(x,+0,t)-\left(V\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(x,-0,t)$$

на профиле $-a<x<a$.

2. Вывод уравнения в свертках

Будем предполагать, что задача имеет решение $\varphi(x,y,t)$, допускающее вместе со своими производными преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье (возможно, обобщенное) по переменной $x\in(-\infty,\infty)$. Сначала применим к поставленной дифференциальной задаче преобразование Лапласа

$$\tilde\varphi(x,y,p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\varphi(x,y,p)\,dt.$$

С учетом однородных начальных условий получим краевую задачу для эллиптического уравнения с комплексным параметром p. Это уравнение приводится к каноническому виду линейной заменой независимых переменных $x'=x$, $y'=y\sqrt{1-M^2}$ и представлением функции $\tilde\varphi(x,y,p)$ в виде

$$\hat\varphi\left(x',y',p\right)e^{\nu x'},$$

где

$$\nu=pMn,\quad n=\frac{1}{\left(1-M^2\right)C}>0.$$

Опуская штрихи при новых независимых переменных, получим для комплекснозначной функции $\hat\varphi(x,y,p)$ уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2\hat\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat\varphi}{\partial y^2}+\mathrm{K}^2\hat\varphi=0,$$

где

$$K=ipn,\quad x\in(-\infty,\infty),$$

$$y > -H = -h\sqrt{1-M^2},$$

кроме луча $(x,0)$ для $x \geqslant -a$. Аналогично преобразуются граничные условия. Неизвестный скачок давления на профиле $\gamma(x,t)$ после преобразования Лапласа по t перейдет в функцию

$$\tilde{\gamma}(x,p) = \left[V\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x} + p\tilde{\varphi}\right], \quad |x| < a,$$

которая в новых координатах будет представлена в виде

$$\tilde{\gamma}(x,p) = \hat{\gamma}(x,p)\, e^{\nu x} V, \quad |x| < a.$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок функции при $y = 0$, то есть разность предельных значений при $y \to +0$ и $y \to -0$, а постоянная $m = \frac{n}{M} > n$. Теперь искомой будет функция

$$\hat{\gamma}(x,p) = \left[\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x} + pm\hat{\varphi}\right].$$

Учитывая, что вне профиля давление непрерывно, будем считать функцию $\hat{\gamma}(x,p)$ продолженной нулем вне отрезка $|x| \leqslant a$.

Далее при каждом фиксированном значении параметра p, $\operatorname{Re} p > 0$, будем искать решение задачи $\hat{\varphi}(x,y,p)$ в пространстве обобщенных функций медленного роста [7] по переменной x при каждом значении $y > -H$, $y \neq 0$. Предельные значения этих функций и их производных при $y \to -H$ и $y \to \pm 0$ будем понимать в топологии указанного пространства.

Образ функции $\hat{\varphi}(x,y,p)$ при преобразовании Фурье по переменной x с параметром α обозначим $\Phi(\alpha,y,p)$. Под действием преобразования Фурье уравнение Гельмгольца перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} - \left(\alpha^2 - \mathrm{K}^2\right)\Phi = 0,$$

решение которого с учетом граничных условий будем искать в виде пары функций

$$\Phi_-(\alpha,y,p) = \frac{\Gamma(\alpha,p)}{2i(\alpha+\mu)}\left(e^{\beta y} + e^{-\beta(2H+y)}\right)$$

при $-H \leqslant y < 0$

$$\Phi_+(\alpha,y,p) = \frac{\Gamma(\alpha,p)}{2i(\alpha+\mu)}\left(e^{-2\beta H} - 1\right) e^{-\beta y}$$

при $y > 0$.

Здесь

$$\beta(\alpha,p) = \sqrt{\alpha - K}\sqrt{\alpha + K}.$$

Ветви радикалов выбраны так, что $\operatorname{Re}\beta > 0$ для вещественных значений α. Этим, в частности, обусловлено отсутствие слагаемого $e^{\beta y}$ в $\Phi_+(\alpha,y,p)$, которое при вещественных α не удовлетворяет условию

$$\lim_{y\to+\infty}\Phi(\alpha,y,p) = 0.$$

Поскольку введенный здесь параметр $\mu = ipm$ при $\operatorname{Re} p > 0$ не может быть вещественным, то при вещественных α функция $\frac{1}{\alpha+\mu}$ является мультипликатором в пространстве обобщенных функций медленного роста. Фурье-образ $\Gamma(\alpha,p)$ финитной по x функции $\hat{\gamma}(x,p)$ также является мультипликатором в пространстве обобщенных функций медленного роста.

Итак, предельные значения $\frac{d\Phi_\pm}{dy}$ совпадают при $y = 0$ и представлены в виде

$$-\beta\left(e^{-2\beta\cdot H} - 1\right)\frac{\Gamma(\alpha,p)}{2i(\alpha+\mu)} = F\left[\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y}(x,0,p)\right],$$

где F — оператор преобразования Фурье.

Применим к этому равенству обратное преобразование Фурье F^{-1}, представив предварительно равенство в виде

$$F\left[\hat{k}(x,p)\right] F\left[\hat{\gamma}(x,p)\right] = F\left[\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y}(x,0,p)\right],$$

где

$$\hat{k}(x,p) = F^{-1}\left[\frac{\beta\left(1 - e^{-2\beta H}\right)}{2i(\alpha+\mu)}\right].$$

Поскольку $\hat{\gamma}(x,p)$ — финитная по x функция, ее свертка с обобщенной функцией медленного роста переходит при преобразовании Фурье в произведение [7]. Поэтому после обратного преобразования Фурье получаем уравнение

$$\left(\hat{\gamma} * \hat{k}\right) = \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y}(x,0,p) \text{ при } x \in R.$$

Учитывая граничное условие непротекания, заданное при $|x| < a$, получаем на этом интервале при каждом фиксированном значении p уравнение относительно функции $\hat{\gamma}(x,p)$

$$\int_{-a}^{a}\hat{\gamma}(s,p)\hat{k}(x-s,p)\,ds = \frac{e^{-\nu x}}{\sqrt{1-M^2}}\tilde{V}_y(x,p).$$

Ядро этого интегрального уравнения определяется обратным преобразованием Фурье по переменной x. Приведем ядро к интегралу Лапласа вида $\int\limits_0^\infty e^{-pt}k\,(x,t)\,dt$, что позволит перейти непосредственно к интегральному уравнению для искомой функции $\gamma\,(x,t)$.

3. Обращение интегральных преобразований

Определим выбор ветвей радикалов функции

$$\beta\,(\alpha,p)=\sqrt{\alpha-K}\sqrt{\alpha+K},$$

где $K=ipn$, $n>0$, $\mathrm{Re}\,p>0$. В плоскости комплексного переменного α проведем два разреза-луча $\alpha=ip\tau$ и $\alpha=-ip\tau$, $\tau\geqslant n$. Эти лучи лежат на прямой, проходящей через точки K и $-K$ перпендикулярно вектору $\mathbf{p}$, расположенному в правой полуплоскости. Пусть

$$\varphi_p=\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,p}{\mathrm{Re}\,p}$$

— угол между вектором $\mathbf{p}$ и положительным направлением вещественной оси, $-\frac{\pi}{2}<\varphi_p<\frac{\pi}{2}$. Далее считаем $\arg p=\varphi_p$, а $\arg\,(-p)=\pi+\varphi_p$. В плоскости с разрезами положим

$$\varphi_p-\frac{3\pi}{2}<\arg\,(\alpha-\mathrm{K})<\varphi_p+\frac{\pi}{2},$$

$$\varphi_p-\frac{\pi}{2}<\arg\,(\alpha+\mathrm{K})<\varphi_p+\frac{3\pi}{2}.$$

В [5] показано, что при таком выборе ветвей радикалов функция $\beta\,(\alpha,p)$ для вещественных значений α имеет положительную вещественную часть. Там же установлена асимптотика $\beta\,(\alpha,p)$ при $|\alpha|=R\to\infty$: при фиксированном p равномерно по $\arg\alpha$ на полуокружностях выполняются равенства

$$\beta\,(\alpha,p)=\alpha+o\,(1)\,,$$

$$\varphi_p-\frac{\pi}{2}<\arg\alpha<\varphi_p+\frac{\pi}{2},$$

$$\beta\,(\alpha,p)=-\alpha+o\,(1)\,,$$

$$\varphi_p+\frac{\pi}{2}<\arg\alpha<\varphi_p+\frac{3\pi}{2}.$$

Теперь обратимся к вычислению обратного преобразования Фурье в ядре $\hat{k}\,(x,p)$. В силу указанной асимптотики на вещественной оси переменного α имеем $\beta\,(\alpha,p)=|\alpha|+o\,(1)$ при $|\alpha|\to\infty$, следовательно,

$$\frac{\beta\,(\alpha,p)}{\alpha+\mu}=\mathrm{sign}\,\alpha+o\,(1)$$

вдоль вещественной оси. Тем самым, преобразование Фурье здесь следует понимать в смысле обобщенных функций медленного роста. В теории обобщенных функций известно, что

$$F^{-1}\,[\mathrm{sign}\,\alpha]\,(x)=\frac{1}{\pi i}\mathrm{P}\frac{1}{x},$$

где $\mathrm{P}\frac{1}{x}$ — обобщенная функция, действующая на основные как интеграл в смысле главного значения.

Рассмотрим сначала часть ядра, соответствующую безграничному потоку

$$\hat{k}_0\,(x,p)=\frac{1}{2i}F^{-1}\left[\frac{\beta\,(\alpha,p)}{\alpha+\mu}\right]=$$

$$=\frac{1}{2i}F^{-1}\left[\frac{\beta\,(\alpha,p)}{\alpha+\mu}-\mathrm{sign}\,\alpha\right]-\frac{1}{2\pi}\mathrm{P}\frac{1}{x}.$$

Напомним, что полюс $-\mu$ не лежит на вещественной оси. С учетом установленной асимптотики при $|\alpha|\to\infty$ функция в квадратных скобках вдоль вещественной прямой убывает не медленнее $\frac{1}{|\alpha|}$ и, следовательно, принадлежит $L_2\,(-\infty,\infty)$. То есть далее преобразование Фурье можно считать классическим в смысле L_2.

Итак, ядро для безграничного потока представимо в виде

$$\hat{k}_0(x,p)=$$
$$=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\left(\frac{\beta\,(\alpha,p)}{\alpha+\mu}-\mathrm{sign}\,\alpha\right)d\alpha-$$
$$-\frac{1}{2\pi}P\frac{1}{x},$$

где интеграл понимается как предел в $L_2\,(-\infty<x<\infty)$ последовательности интегралов по симметричным интервалам $-R<\alpha<R$.

При преобразовании интеграла используется теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру от аналитической функции. Чтобы можно было воспользоваться леммой Жордана, отрезок $-R\leqslant\alpha\leqslant R$ замыкается полуокружностью в верхней полуплоскости для $x<0$ и в нижней полуплоскости для $x>0$. Рассуждения в обоих случаях идентичны, но в нижней полуплоскости лежит полюс $-\mu$, что после применения формул Сохоцкого приводит к появлению интеграла в смысле главного значения.

Окончательно для всех действительных $x \neq 0$ имеем ядро, соответствующее безграничному потоку, в виде интеграла Лапласа с множителем $\frac{p}{x}$

$$\hat{k}_0(x,p) = -\frac{1}{2\pi}\frac{p}{x}\int\limits_{n|x|}^{\infty} e^{-pt}\frac{\sqrt{t^2-(nx)^2}}{t-mx}dt,$$

где при положительных значениях x интеграл понимается в смысле главного значения.

Теперь обсудим вывод аналогичного представления для экранной части ядра

$$\hat{k}_H(x,p) = F^{-1}\left[\frac{\beta(\alpha,p)\,e^{-2\beta(\alpha,p)\cdot H}}{2i(\alpha+\mu)}\right].$$

Здесь преобразование Фурье классическое, так как на вещественной оси функция в квадратных скобках особенностей не имеет, а при $|\alpha| \to \infty$ экспоненциально убывает, поскольку $\beta(\alpha,p) = |\alpha| + o(1)$ при вещественных α. Следовательно,

$$\hat{k}_H(x,p) = -\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x - 2\beta H}\frac{\beta(\alpha,p)}{\alpha+\mu}d\alpha.$$

Чтобы преобразовать этот интеграл к интегралу Лапласа, найдем в плоскости α пути $\alpha(t)$, на которых показатель экспоненты равен $-pt$. То есть найдем решения $\alpha(t)$ иррационального уравнения $i\alpha x + 2\beta(\alpha,p)H = pt$. Решения последнего уравнения удовлетворяют также квадратному уравнению

$$\alpha^2\left(4H^2+x^2\right) + 2i\alpha ptx - p^2\left(t^2-4H^2n^2\right) = 0.$$

Для $x > 0$ при $nx \leqslant t \leqslant n\sqrt{4H^2+x^2}$ одно из решений квадратного уравнения представляет собой множество точек отрезка, соединяющего

$$\alpha = -\text{K} = -ipn \text{ и } \alpha_0 = -ipn\frac{x}{\sqrt{4H^2+x^2}}.$$

Другое решение квадратного уравнения при тех же значениях t составляет отрезок, примыкающий к α_0 со стороны начала координат. Будем искать оба решения квадратного уравнения при $t \geqslant n\sqrt{4H^2+x^2}$. Для таких значений t введем неотрицательную функцию

$$Q(t) = \sqrt{t^2 - n^2\left(4H^2+x^2\right)}.$$

Рассмотрим пути

$$\alpha_1(t) = -\frac{p}{4H^2+x^2}\left(itx + 2HQ(t)\right) \text{ и}$$

$$\alpha_2(t) = -\frac{p}{4H^2+x^2}\left(itx - 2HQ(t)\right).$$

При $t \geqslant n\sqrt{4H^2+x^2}$ эти пути выходят из одной точки α_0, для $x > 0$ находящейся на отрезке, соединяющем нуль и полюс $-\mu = -ipm$, но расположенной к нулю ближе точки $-K = -ipn$. При $t \to \infty$ путь $\alpha_1(t)$ асимптотически приближается к лучу

$$\alpha = -\frac{pt}{4H^2+x^2}\left(2H + ix\right),$$

направленному вдоль вектора $-p(2H+ix)$. То есть на этом луче

$$\arg\alpha = \arg(-p) + \operatorname{arctg}\frac{x}{2H} = \varphi_p + \pi + \operatorname{arctg}\frac{x}{2H}$$

и, значит, луч пересекает левую полуокружность $|\alpha| = R > |\text{K}|$, на которой $\arg\alpha \in \left(\varphi_p + \frac{\pi}{2}; \varphi_p + \frac{3\pi}{2}\right)$. Тем самым, весь путь $\alpha_1(t)$ находится слева от прямой, содержащей разрезы. При $t > n\sqrt{4H^2+x^2}$ функция $Q(t)$ положительна, поэтому нет других пересечений этих путей с прямой, содержащей разрезы. Аналогично путь $\alpha_2(t)$ асимптотически приближается к лучу

$$\alpha = \frac{pt}{4H^2+x^2}\left(2H - ix\right),$$

пересекающему правую полуокружность. Отметим, что оба пути не пересекают свои асимптоты, так как всегда $Q(t) < t$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при описанном выборе ветвей радикалов пути $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ удовлетворяют иррациональному уравнению.

Чтобы привести ядро $\hat{k}_H(x,p)$ к интегралу Лапласа, преобразуем интеграл Фурье по вещественной оси в интегралы по путям $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$. Для этого соединим путь $\alpha_1(t)$ с отрицательной вещественной полуосью дугой C'_R окружности $|\alpha| = R$ настолько большого радиуса, что при достаточно больших значениях t путь $\alpha_1(t)$, прижимаясь к асимптоте, не будет пересекать вещественную ось. Аналогично дуга C''_R правой полуокружности соединит путь $\alpha_2(t)$ с положительной вещественной полуосью. Чтобы в результате предельного перехода при $R \to \infty$ интегралы по дугам исчезли, достаточно стремления к $-\infty$ вещественной части показателя экспоненты подынтегральной функции. При указанном выборе ветвей радикалов функции $\beta(\alpha, p)$ это условие также выполняется [5].

Представим ядро в виде суммы $4\pi i\hat{k}_H(x,p) = -I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_{n\sqrt{4H^2+x^2}}^{\infty} e^{-pt}\frac{\beta(\alpha_1(t), p)}{\alpha_1(t)+\mu}\frac{d\alpha_1(t)}{dt}dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{n\sqrt{4H^2+x^2}}^{\infty} e^{-pt}\frac{\beta(\alpha_2(t), p)}{\alpha_2(t)+\mu}\frac{d\alpha_2(t)}{dt}dt.$$

Преобразуем подынтегральные функции. Так как

$$\alpha_1(t) = -\frac{p}{4H^2+x^2}(itx + 2HQ(t))$$

и на этом пути $2H\beta(\alpha, p) = pt - i\alpha x$, а

$$Q'(t) = \frac{t}{Q(t)},$$

то

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{p}{4H^2+x^2}\left(ix + 2H\frac{t}{Q(t)}\right).$$

Функцию $\beta(\alpha_1(t), p)$ получим как

$$\frac{p}{4H^2+x^2}(2Ht + ixQ(t)).$$

В знаменателе для удобства представим $\mu = ipm$ в виде $\frac{ip\tilde{m}}{4H^2+x^2}$. Тогда

$$I_1 = \frac{p}{4H^2+x^2}\times$$
$$\times\int\limits_{n\sqrt{4H^2+x^2}}^{\infty} e^{-pt}\frac{[2Ht + ixQ(t)]^2}{Q(t)[2HQ(t) + i(tx-\tilde{m}])}dt.$$

Отметим, что здесь подынтегральная функция имеет в начальной точке интегрируемую степенную особенность.

Включая аналогичные преобразования для интеграла I_2, получим

$$\hat{k}_H(x,p) = \frac{p}{2\pi(4H^2+x^2)}\int\limits_{n\sqrt{4H^2+x^2}}^{\infty} e^{-pt}\frac{\xi_1}{\xi_2}dt,$$

$$\xi_1 = 4H^2t^2(tx-\tilde{m}) - xQ^2(t)\times$$
$$\times\left(8H^2t + x(tx-\tilde{m})\right),$$

$$\xi_2 = Q(t)\left((2HQ(t))^2 + (tx-\tilde{m})^2\right).$$

Приведенное выше представление ядра в виде интеграла Лапласа справедливо для всех действительных значений $x \neq 0$.

Вернемся к интегральному уравнению с неизвестной функцией $\hat{\gamma}(x,p)$ и ядром $\hat{k}(x,p)$. Необходимо обратить преобразование Лапласа и получить уравнение для искомой функции $\gamma(x,t)$. Запишем представление ядра $\hat{k}_H(x,p)$ в виде

$$\hat{k}_H(x,p) = \frac{p}{2\pi(4H^2+x^2)}\times$$
$$\times L\left[\hat{\mathrm{K}}_H(x,t)\,\eta\left(t - n\sqrt{4H^2+x^2}\right)\right],$$

где $\hat{\mathrm{K}}_H(x,t)$ — функция-оригинал под интегралом, $\eta(t)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $t < 0$ и единице при $t \geqslant 0$.

Как известно, умножение на экспоненту функции-изображения соответствует сдвигу аргумента у функции-оригинала

$$e^{pnMx}L\left[\hat{\mathrm{K}}_H(x,t)\,\eta\left(t - n\sqrt{4H^2+x^2}\right)\right] =$$
$$= L\Big[\hat{\mathrm{K}}_H(x, t+nMx)\,\eta\times$$
$$\times\left(t - n\left(\sqrt{4H^2+x^2} - Mx\right)\right)\Big].$$

Здесь следует отметить, что

$$\sqrt{4H^2+x^2} - Mx > |x| - Mx > 0$$

при любых значениях $x \neq 0$, т.к. $0 \leqslant M < 1$. Преобразуем функцию в квадратных скобках при $t > n\left(\sqrt{4H^2+x^2} - Mx\right)$, а затем заменим t на $t + nMx$. После замены будем иметь

$$\left(1-M^2\right)Q^2(t+nMx) = \frac{1}{V^2}Q^2(x,t),$$

где введена функция

$$Q(x,t) = \sqrt{(Vt)^2 - M^2\left((x-Vt)^2 + 4h^2\right)}.$$

Разность $tx - \tilde{m}$ после замены примет вид

$$-\frac{1}{V}\left(x(x-Vt) + 4h^2\right).$$

После аналогичного сдвига аргумента функции-оригинала в представлении ядра

$$\hat{k}_0(x,p) = -\frac{p}{2\pi x} V p \int\limits_{n|x|}^{\infty} e^{-pt} \frac{\sqrt{t^2 - (nx)^2}}{t - mx} dt$$

будем иметь

$$e^{pnMx}\hat{k}_0(x,p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-M^2}} \frac{p}{x} L\left[\frac{Q_0(x,t)}{x - Vt}\right],$$

где функция

$$Q_0(x,t) = \sqrt{(Vt)^2 - M^2(x - Vt)^2}$$

рассматривается при неотрицательном подкоренном выражении

$$t \geqslant \frac{|x| - Mx}{C(1-M^2)} = \frac{x}{C(M + \operatorname{sign} x)} > 0.$$

Таким образом, уравнение относительно неизвестной функции-изображения $\tilde{\gamma}(x,p)$ имеет вид

$$\int\limits_{-a}^{a} \tilde{\gamma}(s,p) L\left[\mathrm{K}_0(x-s,t) - \mathrm{K}_{2h}(x-s,t)\right] ds = \frac{2\pi V}{p} \tilde{V}_y(x,p),$$

при $|x| < a$.

Здесь

$$\mathrm{K}_0(x,t) = \frac{Q_0(x,t)}{x \cdot (x - Vt)},$$

$$\mathrm{K}_{2h}(x,t) = \frac{\left(Q^2(x,t) - 4h^2M^2\right)\left(x(x-Vt) + 4h^2\right)}{Q(x,t)\left[4h^2Q^2(x,t) + \left(x(x-Vt) + 4h^2\right)^2\right]} - \frac{8h^2Q(x,t)}{4h^2Q^2(x,t) + \left(x(x-Vt) + 4h^2\right)^2}.$$

Функцию $K_{2h}(x,t)$ считаем заданной при положительном подкоренном выражении в $Q(x,t)$

$$t > \frac{\sqrt{x^2 + 4h^2(1-M^2)} - Mx}{C(1-M^2)}.$$

В теории операционного исчисления известно, что произведению функций-изображений соответствует свертка оригиналов при определенных ограничениях на оригиналы [7, 8]. Функции $\frac{Q_0(x,t)}{x-Vt}$ и $\mathrm{K}_{2h}(x,t)$ при $t \to \infty$ ограничены равномерно на любом ограниченном множестве значений x. Как уже отмечалось, функция $\mathrm{K}_{2h}(x,t)$ имеет интегрируемую особенность в начальный момент t, а $\frac{Q_0(x,t)}{x-Vt}$ имеет особенность типа ядра Коши, которое хорошо изучено и как обобщенная функция допускает преобразование Лапласа. Неизвестный скачок давления $\gamma(x,t)$ предполагается абсолютно интегрируемой непрерывной в полуполосе $\{-a < x \leqslant a, 0 \leqslant t < \infty\}$ функцией с возможной интегрируемой особенностью на передней кромке крыла $x = -a$.

Вернемся в последнем интегральном уравнении к функциям-оригиналам на исходном интервале $-a < x < a$. При этом учтем, что деление на p изображения означает интегрирование оригинала

$$\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{0}^{t} \gamma(s,\tau)\left[\mathrm{K}_0(x-s,t-\tau) - \mathrm{K}_{2h}(x-s,t-\tau)\right] d\tau ds = 2\pi V \int\limits_{0}^{t} V_y(x,\tau)\, d\tau,$$

при $|x| < a$.

Функции $\mathrm{K}_0(x,t)$ и $\mathrm{K}_{2h}(x,t)$ отличны от нуля только при положительных подкоренных выражениях, поэтому для заданных значений x и t интегрирование ведется не по всему прямоугольнику $\{(s;\tau):\ -a < s < a, 0 < \tau < t,\}$. Так, функция $\mathrm{K}_0(x-s,t-\tau)$ отлична от нуля в треугольнике с вершиной $s = x, \tau = t$ и основанием

$$x - \frac{M+1}{M} Vt < s < x + \frac{1-M}{M} Vt$$

при $\tau = 0$.

С ростом t основание этого треугольника выходит за интервал $-a < s < a$. Подынтегральная функция имеет особенности первого порядка на высоте и на медиане этого треугольника. Повторные интегралы типа Коши существуют, и в данном случае в соответствии с формулой Пуанкаре–Бертрана допускают изменение порядка интегрирования. Функция $K_{2h}(x-s,t-\tau)$ отлична от нуля на множестве точек (s,τ) между осью абсцисс $\tau=0$ и кривой

$$\tau = t - \frac{\sqrt{(x-s)^2 + 4h^2\left(1-M^2\right)} - M\left(x-s\right)}{C\left(1-M^2\right)},$$

верхняя точка которой имеет координаты

$$s = x - 2Mh, \quad \tau = t - \frac{2h}{C}.$$

То есть влияние экрана в ядре интегрального уравнения проявляется с запаздыванием по времени на $\frac{2h}{C}$ и по длине на $2hM$.

В заключение отметим, что решение рассмотренной в настоящей работе задачи — потенциал возмущенных скоростей полуограниченного потока можно представить в виде разности

$$\varphi\left(x,y,t\right) = \varphi_0\left(x,y,t\right) - \varphi_0\left(x,y+2h,t\right).$$

Здесь нечетная по y функция $\varphi_0\left(x,y,t\right)$ — потенциал возмущенных скоростей безграничного потока, который может быть получен по той же схеме. Для $t>0$, $y>0$ и $x\in R$ справедливо следующее его представление

$$\varphi_0\left(x,y,t\right) = \frac{y}{2\pi}\int\limits_{y/C}^{t} C\tau \times$$

$$\times \int\limits_{-\sqrt{(C\tau)^2-y^2}}^{\sqrt{(C\tau)^2-y^2}} \frac{\gamma\left(x-V\tau-\lambda, t-\tau\right)}{\left(y^2+\lambda^2\right)\sqrt{(C\tau)^2-y^2-\lambda^2}} d\lambda d\tau.$$

Литература

1. *Красильщикова Е. А.* Тонкое крыло в сжимаемом потоке. М: Наука, 1986. 286 с.
2. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М: Наука, 1971. 767 с.
3. *Ефремов И. И., Лукащик Е. П.* Математическое моделирование нестационарного обтекания тонких профилей дозвуковым потоком вблизи экрана // Математическое моделирование в научных исследованиях: Материалы Всероссийской научной конференции. Ставрополь, 2000. С. 104–109.
4. *Efremov I. I., Lukashchik E. P., Storozheva A. G.* Transition aerodynamical characteristics of a biplane in subsonic flow // High Speed Hydrodynamics: International Summer Scientific School. Cheboksary, 2002. P. 15–16.
5. *Гайденко С. В.* Нестационарное обтекание тонкого профиля дозвуковым потоком газа вблизи твердой границы / Кубанский гос. университет. Краснодар, 2005. 30 с. Деп. в ВИНИТИ 07.07.05, № 955-В2005.
6. *Филиппов С. И.* Гидродинамика крылового профиля вблизи границ раздела. Казань: издательство Казанского математического общества, 2004. 200 с.
7. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М: Наука, 1976. 280 с.
8. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. М: Высшая школа, 1975. 407 с.

Ключевые слова: профиль крыла, дозвуковой поток, сжимаемый газ, скачок давления, потенциал возмущенных скоростей.

Статья поступила 25 ноября 2008 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар