

УДК 539.3

## АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО УСЛОВИЯ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПОДХОДА РАЙСА–ДРУКЕРА<sup>1</sup>

*Дунаев В. И.*<sup>2</sup>

ANALYSIS OF ENERGY CONDITIONS OF BRITTLE FRACTURE BASED ON THE RICE-DRUCKER METHOD

Dunaev V. I.

The energy analysis of the thermodynamic condition for brittle fracture of solids at single loading and constant temperature based on the Rice-Drucker method is investigated for the two known models which describe the increment of defect (crack) surface area. In the first model, on the sufficiently far surface from a defect, the stress values remain the same before and after the incrementation of defect surface area. After calculations this model leads to the Griffith's criterion, in which the alteration of an entropy constituent of internal energy is equal to zero. In the second model, on the sufficiently far surface from a defect, the displacements remain the same before and after the incrementation of defect surface area. After calculations this model leads to a new criterion, in which generally, the alteration of an entropy constituent of internal energy does not equal zero. The test problem of fracture of a plate with crack at uniform tension or compression is solved.

Keywords: internal energy, entropy constituent, asymptotic representations, criterion of brittle fracture.

### Введение

В работе [1], используя подход Райса-Друкера, приведен общий энергетический анализ хрупкого разрушения для двух частных случаев: нагружение тела осуществляется только заданными напряжениями, которые не изменяются до и после образования дефекта (модель А), и нагружение осуществляется только заданными перемещениями, которые не изменяются до и после образования дефекта (модель В). Модель А приводит к энергетическому критерию Гриффитса, в котором энтропийная составляющая высвобождающейся внутренней энергии равна нулю, а модель В — к новому критерию, в котором энтропийная составляющая внутренней энергии в общем случае не равна нулю. В работе [1] указано, что для вычисления интеграла энтропийной составляющей с достаточной точностью при помощи асимптотического представления перемещения в окрестности конца трещины необходимо рассмат-

ривать, кроме первого члена, также последующие члены этого разложения. В настоящей работе изложен общий анализ критерия хрупкого разрушения на основании подхода Райса-Друкера для произвольного нагружения тела и вычислен интеграл энтропийной составляющей при образовании трещины в случае всестороннего растяжения (сжатия) пластины с дефектом с учетом двух первых ненулевых членов указанной асимптотики для перемещения.

### 1. Критерий хрупкого разрушения твердых тел

В работах [1, 2], исходя из интегральной формы первого и второго законов термодинамики [3] для термодинамически необратимого процесса образования трещины, предложены энергетические условия, сформулированные для случая однократного нагружения при изотермических условиях

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-01-99014\_р офн).

<sup>2</sup>Дунаев Владислав Игоревич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: i\_dunaev@hotmail.com.

( $T = T_0 = \text{const}$ ) в виде

$$dU + dU^* = dA, \quad dS + dS^* > 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $U$  — внутренняя энергия твердого тела, занимающего объем  $V$ ,  $dA$  — работа массовых и поверхностных сил,  $S$  — энтропия твердого тела,  $T$  — абсолютная температура,

$$U^* = \oint_{\Sigma} u^* ds, \quad S^* = \oint_{\Sigma} \eta^* ds \quad (1.2)$$

внутренняя энергия и энтропия соответственно, которые затрачены на образование дефекта с поверхностью  $\Sigma$ ,  $u(x_i, t) > 0$  — удельная внутренняя энергия,  $\eta^*(x_i, t)$  — удельная энтропия, затраченные на образование единицы поверхности дефекта.

Выражение (1.1) с учетом равенства (1.2) представляет термодинамическое условие, определяющее процесс образования трещины. Второе выражение (1.1) с учетом второго равенства (1.2) указывает на необратимость этого процесса.

Так как внутренняя энергия  $U$  содержит потенциальную и энтропийную составляющие, из первого закона термодинамики (1.1) следует, что возникновение трещины сопровождается изменением потенциальной энергии и энтропии.

В случае однопараметрической модели дефекта только представительный параметр поверхности дефекта  $a = a(t)$  зависит от времени. Тогда первое условие (1.1) с учетом первого выражения (1.2) при  $u^* = \gamma = \text{const}$  имеет вид

$$\dot{a} \frac{dW}{da} = 0, \quad W = U - \gamma \Sigma - A. \quad (1.3)$$

Если  $\dot{a} = 0$ , то продвижение трещины невозможно. Тогда критерий возможного распространения трещины определяется выражением [2, 4]

$$\frac{dW}{da} = 0, \quad \dot{a} \geq 0. \quad (1.4)$$

При этом, случай  $\dot{a} = 0$  не может быть исключен. Остается неопределенным, произойдет движение трещины или нет.

Рассмотрим линейно-упругое тело с дефектом при плоском напряженном (деформированном) состоянии в изотермических условиях. Пусть  $\Sigma$  — контур поверхности изолированного дефекта. Обозначим через  $\Delta \Sigma$  вновь образовавшуюся часть поверхности дефекта, свободную от напряжений. Введем обозначения  $u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  — компоненты перемещений, напряжений и деформаций;  $V$  —

объем тела, ограниченного поверхностью  $S_0$  (рис. 1);  $u_i^{(1)} = u_i + \Delta u_i, \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}, V^{(1)} = V - \Delta V$  и  $\Sigma^{(1)}$  — те же обозначения, с учетом вновь образовавшейся части поверхности  $\Delta \Sigma$ .

В соответствии с подходом Райса-Друкера [5] условия (1.4) с учетом (1.3) запишем в виде

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta a} = 0, \quad (1.5)$$

$$\Delta W = \Delta U - \Delta A + \gamma \Delta \Sigma,$$

где  $U$  — внутренняя энергия, которая в этом случае равна [3]

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv + \alpha_0 T_0 k_1 \int_V \varepsilon_{ij} \delta_{ij} dv. \quad (1.6)$$

Здесь  $\alpha_0$  — линейный коэффициент теплового расширения,  $k_1 = E/(1 - \nu)$  — для плоского напряженного состояния,  $k_1 = E/(1 - 2\nu)$  — для плоской деформации,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Вычислим  $\Delta W$  для двух известных моделей [6] образования новой поверхности  $\Delta \Sigma$ .

В модели А (рис. 1) на достаточно удаленной от дефекта поверхности  $S'_0$ , ограничивающей область  $V'$ , и вне ее напряжения остаются одинаковыми до и после образования новой поверхности  $\Delta \Sigma$ . На поверхностях  $\Sigma^{(1)}$  и  $\Sigma$  напряжения равны нулю. Работа сил  $\Delta A$  на поверхности  $S'_0$  в этом случае не равна нулю т. к.  $\Delta u_i \neq 0$ . Тогда для модели А с учетом (1.6) получаем

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_{V' - \Delta V} [(\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij})(\varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}) - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}] dv - \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv +$$

$$+ \alpha_0 T_0 \chi_1 \left[ \int_{V' - \Delta V} (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \delta_{ij} dv - \int_{V'} \sigma_{ij} \delta_{ij} dv \right] - \oint_{S'_0} \sigma_{ij} \Delta u_i n_j ds + \gamma \Delta \Sigma, \quad (1.7)$$

$$\Delta A = \oint_{S'_0} \sigma_{ij} \Delta u_i n_j ds. \quad (1.8)$$

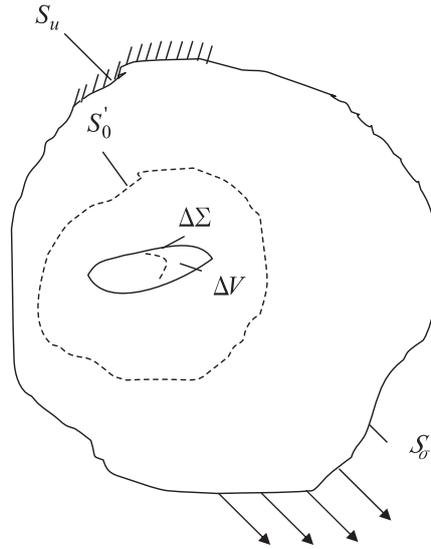


Рис. 1. Схема нагружения упругого тела при образовании изолированного дефекта: для модели А на контуре  $S'_0$  напряжения  $p_i^{(1)} = p_i$ ; для модели В на контуре  $S'_0$  перемещения  $u_i^{(1)} = u_i$ ;  $S_u$  — часть границы, на которой заданы перемещения;  $S_\sigma$  — часть границы, на которой заданы напряжения

где  $\chi_1 = 1$  для плоского напряженного состояния и  $\chi_1 = 1 + \nu$  для плоской деформации,  $n_j$  — направляющие косинусы внешней нормали к  $S'_0$ . Из (1.5) и (1.7), используя теорему взаимности, формулу Грина, уравнения равновесия, граничные условия для модели А и выполняя такие же преобразования, как в работах [1, 7], получим критерий Гриффитса

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta a} = - \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \left( \int_{\Delta\Sigma} \sigma_{ij} \Delta u_i n_j ds + \int_{\Delta\Sigma} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv - 2\gamma \Delta\Sigma \right) = 0. \quad (1.9)$$

В критерии (1.9) приращение энтропийной составляющей внутренней энергии равно нулю. Это является следствием предположений модели А.

В модели В (рис. 1) на достаточно удаленной от дефекта поверхности  $S'_0$  и вне ее перемещения остаются одинаковыми до и после образования новой поверхности  $\Delta\Sigma$ . На поверхности  $\Sigma^{(1)}$  и  $\Sigma$  напряжения равны нулю. Работа сил  $\Delta A$  (1.8) на поверхности  $S'_0$  в этом случае равна нулю, так как  $\Delta u_i = 0$ . Тогда для модели В получаем

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_{V'-\Delta V} [(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij})(\varepsilon_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij}) -$$

$$- \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}] dv - \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv + \alpha_0 T_0 k_1 \left[ \int_{V'-\Delta V} \Delta \varepsilon_{ij} \delta_{ij} dv - \int_V \varepsilon_{ij} \delta_{ij} dv \right] + \gamma \Delta\Sigma. \quad (1.10)$$

Используя это выражение и выполняя преобразования, приведенные в [1, 7], получим новый критерий хрупкого разрушения, отличный от критерия (1.9)

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta a} = - \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma_{ij} \Delta u_i n_j ds + \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv + \alpha_0 T_0 k_1 \left( \int_{\Sigma^{(1)}} \Delta u_i \delta_{ij} n_j dv + \int_{\Delta V} \varepsilon_{ij} \delta_{ij} dv \right) - \gamma \Delta\Sigma \right] = 0. \quad (1.11)$$

В критерии (1.11) приращение энтропийной составляющей внутренней энергии в общем случае не равно нулю. Это является следствием предположений модели В.

Если разрушение происходит в результате развития трещины, то  $\Delta V = 0$  и для при-

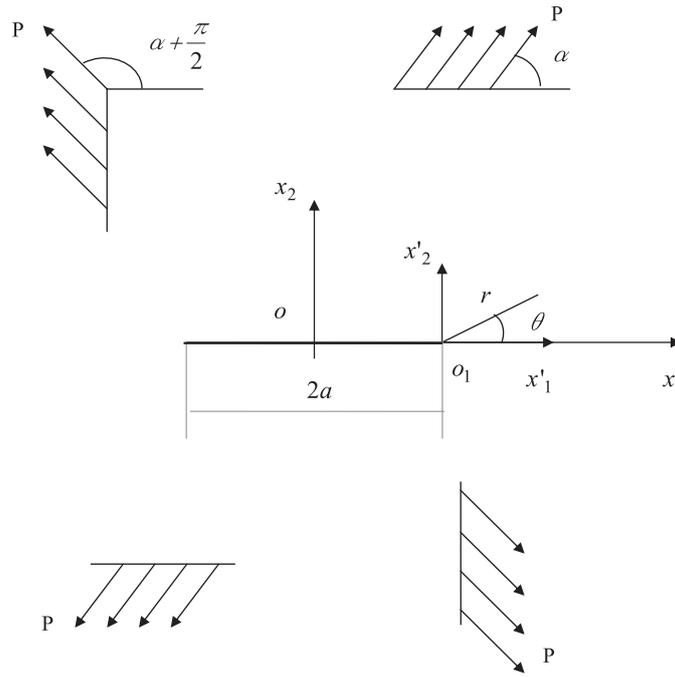


Рис. 2. Тело с трещиной при двухосном растяжении (сжатии)

ращения полной энергии (1.10) имеем

$$\begin{aligned} \Delta W &= -\frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma_{ij} \Delta u_i n_j ds - \\ &- \alpha_0 T_0 k_1 \int_{\Sigma^{(1)}} \Delta u_i \delta_{ij} n_j ds + \gamma \Delta\Sigma = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma^+} \sigma_{ij} (\Delta u_i^+ - \Delta u_i^-) n_j^+ ds - \\ &- \alpha_0 T_0 k_1 \int_{\Sigma^{(1)+}} (\Delta u_i^+ - \Delta u_i^-) \delta_{ij} n_j^+ ds + \\ &+ 2\gamma \Delta\Sigma^+, \quad (1.12) \end{aligned}$$

где знаки (+) и (-) относятся к значению величин, взятых на верхнем и нижнем берегах трещины соответственно,  $n_j^- = -n_j^+$ .

## 2. Задача о разрушении пластины при всестороннем растяжении-сжатии

Рассмотрим случай всестороннего растяжения (сжатия) плоскости усилиями  $P_1 = P_2 = P$  с трещиной длиной  $2a$ , расположенной вдоль оси  $0x_1$  (рис. 2), края трещины свободны от напряжений. В силу симметрии задачи проанализируем состояние в окрестности одного конца трещин.

Из выражения (1.12) получаем

$$\begin{aligned} \Delta W &= -\frac{1}{2} \int_a^{a+\Delta a} \sigma_{22}(x_1, 0) [\Delta u_2^+(x_1, 0) - \\ &- \Delta u_2^-(x_1, 0)] dx_1 - \\ &- \alpha_0 T_0 k_1 \int_0^{a+\Delta a} [\Delta u_2^{(1)+}(x_1, 0) - \\ &- \Delta u_2^{(1)-}(x_1, 0)] dx_1 + 2\gamma \Delta a. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Подставляя (2.1) в условие (1.5) и учитывая, что  $-u_2^{(1)-} = u_2^{(1)+} = u_2^{(1)}$ ,  $-u_2^- = u_2^+ = u_2$  в силу симметрии задачи, находим

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta a} &= - \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \left[ \frac{1}{2} \int_a^{a+\Delta a} \sigma_{22} u_2^{(1)} dx_1 + \right. \\ &\left. + \alpha_0 T_0 k_1 \int_0^{a+\Delta a} u_2^d dx_1 \right] + \gamma = 0. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Решение рассматриваемой краевой задачи, используемое для вычисления интегралов, входящих в (2.2), может быть выражено через одну функцию комплексного переменного [8] и имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{(2\Gamma + \bar{\Gamma}')z}{2\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{2}\bar{\Gamma}',$$

$$\begin{aligned}\Omega(z) &= \Phi(z) + \bar{\Gamma}', \\ \Psi(z) &= \bar{\Omega}(z) - \Phi(z) - z\Phi'(z).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\Gamma = \frac{P_1 + P_2}{4}, \quad \Gamma' = -\frac{P_1 - P_2}{2}e^{-2i\alpha},$$

а так же

$$\bar{\Omega}(z) = \overline{\Omega(\bar{z})}.$$

Полагая в выражениях (2.3)  $P_1 = P_2$ , а так же учитывая, что

$$\Phi(z) = \bar{\Phi}(z)$$

получаем решение поставленной краевой задачи

$$\Phi(z) = \frac{Pz}{2\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad \Psi(z) = -z\Phi'(z) \quad (2.4)$$

или, используя (2.4), введем другие обозначения

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2}Z_I, \quad \psi'(z) = -\frac{1}{2}zZ_I',$$

$$Z_I = \frac{Pz}{\sqrt{z^2 - a^2}} = 2\Phi(z). \quad (2.5)$$

Здесь  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  — комплексные потенциалы Колосова–Мухелишвили [8]. Функция  $Z_I$  получена Вестергардом [8] полуобратным методом. Используя соотношения Колосова–Мухелишвили [8], выразим компоненты тензора напряжений и проекции вектора перемещений через функцию  $Z_I$  из (2.5) [9]

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \operatorname{Re} \left[ Z_I - \frac{1}{2}\bar{z}Z_I' + \frac{1}{2}zZ_I' \right] = \\ &= \operatorname{Re} Z_I - x_2 \operatorname{Im} Z_I',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= \operatorname{Re} \left[ Z_I + \frac{1}{2}\bar{z}Z_I' - \frac{1}{2}zZ_I' \right] = \\ &= \operatorname{Re} Z_I + x_2 \operatorname{Im} Z_I',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\bar{z}Z_I' - zZ_I'] = \\ &= -x_2 \operatorname{Im} (iZ_I') = -x_2 \operatorname{Re} Z_I', \\ 2\mu u_{1,2} &= \frac{\chi \mp 1}{2} \operatorname{Re} Z_0 - x_2 \operatorname{Im} Z_I,\end{aligned}\quad (2.6)$$

где

$$\frac{dZ_0}{dz} = Z_I, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \chi = 3 - 4\nu$$

— для плоской деформации,

$$\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$$

— для плоского напряженного состояния.

Первый интеграл в условии (2.2) описывает изменение потенциальной энергии тела при возрастании длины трещины на величину  $\Delta a$ . Его можно вычислить, если известны поля напряжений и перемещений «вблизи» конца трещины. В работах [9, 10], исходя из соотношений (2.6) при  $z - a = re^{i\theta}$ , исследована асимптотика для напряжений и перемещений в окрестности точки  $(a, 0)$ . Удерживая первые члены асимптотики, получаем

$$\sigma_{22} = \frac{K_1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right],$$

$$\begin{aligned}u_2 &= \frac{K_1}{2\mu} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \times \\ &\times \sin \frac{\theta}{2} \left[ \chi + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right],\end{aligned}\quad (2.7)$$

где  $K_1 = P(\pi a)^{1/2}$  — коэффициент интенсивности.

Подставляя напряжение  $\sigma_{22}$  при  $\theta = 0$ ,  $r = x$  и перемещение  $u_2 = u_2^{(1)}$  при  $K_1 = P(\pi(a + \Delta a))^{1/2}$ ,  $\theta = \pi$ ,  $r = \Delta a - x$  в первый интеграл выражения (2.2), получим

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_{22} u_2^{(1)} dx_1 &= \\ &= \frac{K_1^2(\chi + 1)}{8\pi\mu} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} d\xi = \frac{K_1^2}{16\mu}(\chi + 1),\end{aligned}\quad (2.8)$$

что совпадает с точным значением этого интеграла [10].

Для вычисления второго интеграла в выражении (2.2) асимптотическое представление для перемещения  $u_2$  (2.7) заведомо грубое, поскольку интегрирование проводится на интервале  $(0, a + \Delta a)$ . Из выражения (2.2) имеем

$$\begin{aligned}\alpha_0 T_0 k_1 \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{a+\Delta a} (u_2^{(1)} - u_2) dx &= \\ &= \alpha_0 T_0 k_1 \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \left[ \int_0^{a+\Delta a} u_2^{(1)} dx - \int_0^a u_2 dx \right],\end{aligned}\quad (2.9)$$

т. к. на интервале  $(a, a + \Delta a)$  перемещения в теле до образования новой поверхности равны нулю в силу симметрии задачи.

Из выражения для перемещения  $u_2$  (2.6) найдем точные значения  $u_2$  и  $u_2^{(1)}$  на верхнем берегу разреза

$$u_2 = \frac{P(\chi + 1)}{4\mu} \sqrt{a^2 - x_1^2};$$

при  $z = x_1, |x_1| \leq a$ ,

$$u_2^{(1)} = \frac{P(\chi + 1)}{4\mu} \sqrt{(a + \Delta a)^2 - x_1^2},$$

при  $z = x_1, |x_1| \leq a + \Delta a$ .

Подставляя полученные значения перемещений в интегралы (2.9) и переходя после интегрирования к пределу, получим

$$\begin{aligned} \alpha_0 T_0 k_1 \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \left( \int_0^{a+\Delta a} \Delta u_2^{(1)} dx - \int_0^a u_2^d dx \right) &= \\ &= \frac{\alpha_0 T_0 k_1 P(\chi + 1)}{8\mu} \pi a = \\ &= \frac{\alpha_0 T_0 k_1 \sqrt{a} K_1}{8\mu} (\chi + 1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Учитывая (2.8), (2.12) из условия (2.2), находим

$$\begin{aligned} \frac{K_1^2}{16\mu} (\chi + 1) + \\ + \frac{\alpha_0 T_0 k_1 \sqrt{a} K_1}{8\mu} (\chi + 1) - \gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тогда из (2.11) окончательно получим

$$P^2 + 2\alpha_0 T_0 k_1 P - \frac{16\mu}{\pi} \frac{\gamma}{(\chi + 1) a} = 0,$$

откуда определим критические напряжения при всестороннем растяжении  $P^+$  и всестороннем сжатии  $P^-$

$$P^\pm = -\alpha_0 T_0 k_1 \pm \sqrt{(\alpha_0 T_0 k_1)^2 + \frac{16\mu}{\pi} \frac{\gamma}{(\chi + 1) a}},$$

причем

$$\begin{aligned} P^+ + P^- &= -2\alpha_0 T_0 k_1, \\ P^+ P^- &= -\frac{16\mu}{\pi} \frac{\gamma}{(\chi + 1) a}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отметим, что асимптотические представления для напряжений и перемещений (2.7), справедливые в малой окрестности у конца трещины, позволяют эффективно вычислять потенциальную составляющую приращения внутренней энергии и дают существенную погрешность при вычислении энтропийной составляющей внутренней энергии. Действительно, вычислим предел (2.9), используя асимптотическое представление перемещения (2.7) при  $r = (a + \Delta a - x)$ ,  $\theta = \pi$ ,  $K_1 = P\sqrt{\pi(a + \Delta a)}$ , тогда

$$u_2^{(1)} = \frac{P\sqrt{a + \Delta a}}{2\sqrt{2\mu}} \sqrt{a + \Delta a - x} (\chi + 1),$$

при  $r = a - x$ ,  $\theta = \pi$ ,  $K_1 = P\sqrt{\pi a}$

$$u_2^- = \frac{P\sqrt{a}}{2\sqrt{2\mu}} \sqrt{a - x} (\chi + 1).$$

Подставляя эти перемещения в (2.9), находим

$$\begin{aligned} \alpha_0 T_0 k_1 \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{a+\Delta a} \Delta u_2^{(1)} dx &= \\ &= \frac{\alpha_0 T_0 k_1 P(\chi + 1) a}{3\sqrt{2\mu}}. \end{aligned}$$

Полученное значение больше точного (2.12) приблизительно на 19%.

Рассмотрим вычисление интеграла энтропийной составляющей (2.9), учитывая последние члены асимптотики (2.7) для перемещения  $u_2$ . Исследуем асимптотику для перемещения  $u_2$

$$2\mu u_2 = \frac{\chi + 1}{2} \text{Im } Z_0 - x_2 \text{Re } Z_I,$$

при  $z_1 = z - a = re^{i\theta}$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$  в окрестности точки  $(a, 0)$ .

Поскольку на границе разреза при  $\theta = \pi$  второе слагаемое в выражении для перемещения  $u_2$  обращается в ноль, рассмотрим асимптотические представления для первого слагаемого.

Тогда

$$Z_0 = P\sqrt{z^2 - a^2} = P\sqrt{2az_1} \sqrt{1 + \frac{z_1}{2a}}.$$

Разлагая в ряд Тейлора функцию  $(1 + \frac{z_1}{2a})^{1/2}$ , получаем

$$Z_0 = P\sqrt{2az_1} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{z_1}{2a} \right) - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \left( \frac{z_1}{2a} \right)^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left( \frac{z_1}{2a} \right)^3 + \dots \right] = A_1 z_1^{1/2} + A_3 z_1^{3/2} + A_5 z_1^{5/2} + \dots, \quad (2.13)$$

где

$$A_1 = \frac{P\sqrt{2a}}{1}, \quad A_3 = \frac{P\sqrt{2a}}{4a}, \quad A_5 = \frac{P\sqrt{2a}}{32a^2}, \dots$$

Отметим, что соотношение (2.13) представляет функцию Гурса [11] вида

$$Z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z_1^{\lambda_n}, \quad \lambda_n = \frac{n}{2} \text{ при } n = 1, 3, 5, \dots; \\ A_n = 0 \text{ при } n = 2, 4, 6, \dots$$

Для дальнейших вычислений ограничимся двумя первыми ненулевыми членами асимптотики

$$Z_0 = A_1 z_1^{1/2} + A_3 z_1^{3/2}.$$

Подставляя  $z_1 = r e^{i\theta}$  для перемещения  $u_2$ , получим

$$u_2 = \frac{\chi + 1}{4\mu} \left( A_1 r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + A_3 r^{3/2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{r \sin \theta}{2\mu} \operatorname{Re} Z_I,$$

$$\sqrt{1} = 1, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Из этого выражения при  $\theta = \pi$ ,  $r = a - x$  имеем

$$u_2 = \frac{K_1(a)(\chi + 1)}{2\mu} \left( \frac{a - x}{2\pi} \right)^{1/2} \times \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{a - x}{a} \right) \right],$$

и при  $\theta = \pi$ ,  $r = a + \Delta a - x$  получаем

$$u_2^{(1)} = \frac{K_1(a + \Delta a)(\chi + 1)}{2\mu} \times \left( \frac{a + \Delta a - x}{2\pi} \right)^{1/2} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{a + \Delta a - x}{a + \Delta a} \right) \right].$$

Вычисляя с учетом последних выражений интегралы (2.9) и переходя к пределу, получим окончательно

$$\alpha_0 T_0 k_1 \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \left( \int_0^{a+\Delta a} \Delta u_2^{(1)} dx - \int_0^a u_2 dx \right) = \frac{17}{30\sqrt{2}} \frac{\alpha_0 T_0 k_1 P(\chi + 1)}{\mu} a.$$

Этот результат отличается от точного значения (2.12) менее, чем на 1,8%. Таким образом, удерживание в исследуемой асимптотике одного дополнительного члена приводит к практически удовлетворительному результату.

### Заключение

Используя подход Райса–Друкера, получено представление критерия хрупкого разрушения тела с изолированной трещиной, учитывающее энтропийную составляющую внутренней энергии. Известно, что для вычисления потенциальной составляющей внутренней энергии достаточно учитывать первые члены асимптотики соответственно для напряжений и перемещений в окрестности конца трещины. Показано, что для выделения (с достаточной точностью) энтропийной составляющей, следуя этому подходу, необходимо учитывать последующие члены асимптотического разложения функции смещений в окрестности конца трещины.

### Литература

1. Дунаев И.М., Дунаев В.И. Общий энергетический анализ хрупкого разрушения для критерия типа Гриффитса // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. 2000. №3. С. 60–61.
2. Dunaev I. M., Dunaev V. I. Analysis of the thermodynamic conditions for brittle fracture // Comptes Rendus Mecanique Academie des sciences. Published by Elsevier SAS. 332. 2004. P. 789–794.
3. Илюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Из-во МГУ, 1990. 310 с.
4. Maugin G. A. The thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge university press, 1992. 350 p.
5. Rice J., Drucker D. Energy changes in stressed bodies due to void crack growth // IJFM. 1967. Vol. 3. №1. P. 19–28.

6. *Гудьер Дж.* Математическая теория равновесных трещин // Разрушение. М.: Мир, Т. 2, 1975. С. 13–82.
7. *Дунаев И. М., Дунаев В. И.* Энергетическое условие разрушения термоупругих твердых тел // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 69–81.
8. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
9. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
10. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения // Разрушение. М.: Мир, Т. 2, 1975. С. 204–335.
11. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. М.: Мир, Т. 2, 1975. С. 83–203.

Ключевые слова: внутренняя энергия, энтропийная составляющая, асимптотические представления, критерий хрупкого разрушения.

---

Статья поступила 26 ноября 2008 г.  
Кубанский государственный университет, г. Краснодар  
© Дунаев В. И., 2008