

УДК 533.6

**ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ ПРИ
АПЕРИОДИЧЕСКОМ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ
ОГРАНИЧЕННЫМ СЖИМАЕМЫМ ПОТОКОМ**

Ефремов И. И.¹, Липован П. С.², Лукащик Е. П.³

TRANSITION CHARACTERISTICS OF LIFTING FORCE IN CASE OF APERIODIC MOTION OF THIN PROFILE IN LIMITED COMPRESSIBLE FLUID

Efremov I. I., Lipovan P. S., Lukashchik E. P.

The non-stationary problem of aperiodic motion of a profile in the limited flow of ideal compressible fluid is considered. The action of compressible flow on the thin profile is described by models of vortical layers. Using the Fourier and Laplace transforms, the mathematical problem formulated is reduced to a singular integral equation. The kernel of the equation is calculated by the theory of residues. The discrete vortex method is applied for the numerical solution of a singular equation. The transmission function of lifting force of the profile is constructed in the space of Laplace images, and then this function is converted into a transition characteristic by inverse Laplace transformation.

Keywords: thin profile, compressible fluid, lifting force, transition characteristics.

1. Постановка задачи

В работе исследуется динамическое поведение профиля в дозвуковом потоке идеальной сжимаемой жидкости, ограниченной сверху и снизу непроницаемыми плоскостями. Длина полуходры профиля a и скорость невозмущенного потока V_∞ считаются соответственно единицами длины и скорости.

Введем жестко связанную с несущим профилем систему координат Oxy , направив ось Ox вдоль корневой хорды вниз по течению. Профиль находится посередине потока на расстоянии h от его границ. На профиль набегает стационарный поток со скоростью V_∞ . Профиль и его след создают поле возмущенных скоростей $\mathbf{V} = \operatorname{grad} \varphi(x, y, t)$, где $\varphi(x, y, t)$ функция, удовлетворяющая следующим соотношениям [1]:

– уравнению неразрывности жидкости в подвижной системе координат

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} -$$

$$-2M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \quad (1.1)$$

– граничному условию непротекания потока сквозь поверхность профиля

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = V_y(x, t), \quad |x| < 1;$$

– граничному условию непротекания потока сквозь твердые границы

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=h} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=-h} = 0;$$

– условию отсутствия перепада давления на поверхности следа

$$[\varphi_t + V_\infty \varphi_x] = 0, \quad y = 0, \quad x > 1,$$

– условиям отсутствия возмущений впереди на бесконечности и ограниченности возмущений позади профиля.

Здесь принято обозначение

$$[f] = f_+ - f_-.$$

¹Ефремов Ион Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: i.efremov@math.kubsu.ru.

²Липован Павел Семенович, аспирант кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета.

³Лукащик Елена Павловна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета.

Индексами (+) и (–) отмечены значения соответствующей величины при подходе к оси Ox со стороны положительных и отрицательных значений ординат соответственно.

В работе рассматриваются динамические характеристики профиля, переходящего под влиянием скачкообразного возмущения скорости из одного стационарного состояния в другое. Этот переход будет носить апериодический характер.

Связь между кинематическими и динамическими величинами в потоке описывается линеаризованным интегралом Коши–Лагранжа

$$p - p_\infty = -\rho(\varphi_t + V_\infty \varphi_x).$$

Здесь p_∞ — давление в невозмущенном потоке.

Применим преобразование Лапласа [2]

$$L[\varphi(x, y, t)] = \int_0^\infty \varphi(x, y, t) e^{-st} dt$$

к исходным функциям. Тогда в пространстве изображений при использовании замены

$$\varphi(x, y, s) = \tilde{\varphi}(x, \tilde{y}, s) e^{\nu x},$$

$$\tilde{y} = y\sqrt{1 - M^2}, \quad \nu = \frac{sM^2}{1 - M^2},$$

уравнение неразрывности (1.1) приводится к уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi(x, y, s) - \lambda^2\varphi(x, y, s) = 0, \quad \lambda = \frac{sM}{1 - M^2}.$$

Здесь и в дальнейшем штрихи при новых переменных опускаем.

Обтекание профиля приводит к движению жидкости с образованием поверхностей тангенциального разрыва скоростей, которые в кинематическом отношении эквивалентны вихревым слоям. При обтекании профиля происходит непрерывный сход с острой выходной кромки вихревых пелен, движущихся затем вместе с потоком. В соответствии с теоремой Томсона о неизменности во времени циркуляции по замкнутому контуру, охватывающему бесконечно удаленную точку, вследствие образования и распространения свободных вихрей, изменяется интенсивность присоединенных вихрей, пропорциональная разности давлений, действующих на профиль. Интенсивность присоединенных

вихрей выразим через потенциал возмущенных скоростей, используя интеграл Коши–Лагранжа

$$\gamma(x) = [\varphi_x + \mu\varphi], \quad |x| \leq 1,$$

$$\mu = \frac{s}{1 - M^2}.$$

Интенсивность свободных вихрей пропорциональна скорости изменения интенсивности присоединенных вихрей.

2. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

Запишем граничные условия задачи с учетом преобразования Лапласа

1) непротекание профиля:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{V_y(x)e^{-\nu x}}{\sqrt{1 - M^2}}, \quad y = 0, \quad |x| < 1;$$

2) непротекание твердых границ:

$$\varphi_y = 0, \quad y = \pm H, \quad H = h\sqrt{1 - M^2};$$

3) непрерывность давления в следе:

$$[\varphi_x + \mu\varphi] = 0, \quad |x| > 1. \quad (2.1)$$

При использовании преобразования Фурье

$$\Phi(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx$$

уравнение Гельмгольца сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} - (\lambda^2 + \alpha^2)\Phi = 0, \quad (2.2)$$

$$\Phi(\alpha, y) = \begin{cases} \Phi_1(\alpha, y), & y > 0, \\ \Phi_2(\alpha, y), & y < 0. \end{cases}$$

Краевые условия задачи в пространстве обобщенных функций принимают вид

$$\Phi_{1y}(\alpha, y)|_{y=0} = \Phi_{2y}(\alpha, y)|_{y=0} = V(\alpha),$$

где

$$V(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(x, 0) e^{i\alpha x} dx,$$

$$\Phi_{1y}(\alpha, y)|_{y=H} = \Phi_{2y}(\alpha, y)|_{y=-H} = 0. \quad (2.3)$$

Запишем преобразование Фурье для интенсивности присоединенных вихрей

$$\Gamma(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) e^{i\alpha x} dx = (-i\alpha + \mu) \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi] e^{i\alpha x} dx.$$

Тогда краевая задача в пространстве обобщенных функций приводит к функциональному уравнению

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) \frac{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}}{2i(\alpha + i\mu)} \operatorname{th}(H\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}) &= \\ &= V(\alpha). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обратное преобразованием Фурье является сверткой финитной обобщенной функции и обобщенной функции медленного роста [2]. Запишем свертку этих функций с учетом финитности $\gamma(s)$

$$\int_{-1}^1 \gamma(s) k(x-s) ds = \frac{V_y(x)e^{-\nu x}}{\sqrt{1-M^2}}, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} k(x) &= \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}}{\alpha + i\mu} \operatorname{th}(H\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}) e^{-i\alpha x} d\alpha. \end{aligned}$$

Это интегральное уравнение является основным разрешающим уравнением для нахождения неизвестной интенсивности $\gamma(x)$ присоединенных вихрей и расчета перепада давления вдоль профиля.

3. Вычисление ядра интегрального уравнения

Для вычисления ядра интегрального уравнения применим теорию вычетов, заменяя интеграл суммой вычетов в простых полюсах

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{\operatorname{sign}(x)}{2H} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2 e^{-|x|\sqrt{b_k^2 + \lambda^2}}}{b_k^2 + \lambda^2 - \operatorname{sign}(x)\mu\sqrt{b_k^2 + \lambda^2}} - \\ &- \frac{(\operatorname{sign}(x) + 1)\mu e^{-\mu x}\sqrt{1-M^2}}{4} \times \\ &\times \operatorname{tg}(H\mu\sqrt{1-M^2}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$b_k^2 = \left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 (2k-1)^2, \quad k \geq 1.$$

С другой стороны, ядро сингулярного уравнения $k(x)$ можно представить в виде суммы слагаемых, выражющихся через цилиндрические функции Макдональда $K_0(x)$, $K_1(x)$ и сходящихся интегралов

$$\begin{aligned} k(x) &= -\frac{\lambda}{2\pi} K_1(\lambda|x|) \operatorname{sign}(x) - \frac{\mu}{2\pi} K_0(\lambda x) + \\ &+ \frac{\mu^2 - \lambda^2}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin(\alpha x) + \mu \cos(\alpha x)}{(\alpha^2 + \mu^2)\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} d\alpha + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}}{\alpha^2 + \mu^2} \frac{\alpha \sin(\alpha x) + \mu \cos(\alpha x)}{1 + e^{2H\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}}} d\alpha. \end{aligned}$$

Результаты расчета функции $k(x)$, выполненные обоими методами, показали их равносильность. При этом метод вычисления ядра при помощи теории вычетов (3.1) является более простым и эффективным для небольших значений ширины потока.

4. Численное решение интегрального уравнения

Численное решение сингулярного интегрального уравнения (2.5) можно получить методом дискретных вихрей, основанным на квадратурных формулах типа прямоугольников [3]. Вихревая интенсивность для циркуляционного обтекания профиля должна быть неограниченной у передней кромки и ограниченной у задней кромки. В этом случае безразмерные координаты присоединенных вихрей s_j и расчетных точек (коллокаций) x_i определяются следующим образом:

$$x_i = -1 + \left(i - \frac{1}{4}\right) \frac{2}{N}, \quad s_j = -1 + \left(j - \frac{3}{4}\right) \frac{2}{N},$$

где N — число вихрей.

Тогда система линейных алгебраических уравнений, соответствующая сингулярному интегральному уравнению (2.5), будет иметь вид

$$\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma(s_j) k(x_i - s_j) = \frac{V_y(x_i)e^{-\nu x_i}}{\sqrt{1-M^2}}.$$

Для вычисления подъемной силы необходимо совершить переход от интеграла к сумме

$$C_y(s) = \int_{-1}^1 \gamma(s) e^{\nu s} ds = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(s_i) e^{\nu s_i}.$$

5. Решение краевой задачи для полной вихревой интенсивности

Рассматриваемую задачу можно решать также в терминах полной вихревой интенсивности $\tilde{\gamma}$

$$\tilde{\gamma}(x) = [\varphi_x] = \varphi_{x+} - \varphi_{x-}.$$

Полная вихревая интенсивность профиля представляет собой сумму интенсивностей присоединенных и свободных вихрей, сносимых набегающим потоком

$$\tilde{\gamma} = \gamma_{\text{пр}} + \gamma_{\text{своб.}}$$

Носителем функции $\tilde{\gamma}(x)$ является луч $x \geq -1$. Найдем $\tilde{\gamma}(x)$ при $x \geq 1$.

Для функции

$$\tilde{\Gamma}(x) = \int_{-1}^x \tilde{\gamma}(\xi) d\xi$$

по условию на следе имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\tilde{\Gamma}(x)}{dx} + \mu \tilde{\Gamma}(x) = 0, \quad x \geq 1$$

и начальное условие (2.1)

$$\tilde{\Gamma}(1) = \int_{-1}^1 \tilde{\gamma}(\xi) d\xi.$$

В результате решения задачи получим выражение для интенсивности в вихревом следе

$$\tilde{\gamma}(x) = -\mu e^{-\mu(x-1)} \int_{-1}^1 \tilde{\gamma}(\xi) d\xi, \quad x \geq 1. \quad (5.1)$$

Применение преобразования Фурье к полной вихревой интенсивности $\tilde{\gamma}$ приводит к уравнению

$$\bar{\Gamma}(\alpha) \frac{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}}{2i\alpha} \operatorname{th}(H\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}) = V(\alpha),$$

$$\bar{\Gamma}(\alpha) = \int_{-1}^{\infty} \tilde{\gamma}(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi.$$

Обратным преобразованием Фурье получим интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{+\infty} \tilde{\gamma}(s) k_0(x-s) ds = V_y(x) \frac{e^{-\nu x}}{\sqrt{1-M^2}}, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} k_0(x) &= \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}}{\alpha} \operatorname{th}(H\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}) e^{-i\alpha x} d\alpha. \end{aligned}$$

Выражение (5.1) позволяет описать влияние вихревого следа отдельной функцией и упростить интегральное уравнение (5.2)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \tilde{\gamma}(s) (k_0(x-s) - f(x)) ds &= \\ &= V_y(x) \frac{e^{-\nu x}}{\sqrt{1-M^2}}, \quad (5.3) \end{aligned}$$

где

$$f(x) = \mu \int_1^{\infty} e^{-\mu(\xi-1)} k_0(x-\xi) d\xi.$$

Подынтегральные функции вычисляются с помощью теории вычетов по формулам

$$\begin{aligned} k_0(x) &= \frac{\operatorname{sign}(x)}{2H} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2 e^{-|x|\sqrt{b_k^2 + \lambda^2}}}{b_k^2 + \lambda^2} + \\ &\quad + \frac{\operatorname{sign}(x) + 1}{4H} H \lambda \operatorname{th}(H\lambda), \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\mu}{2H} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2 e^{(x-1)\sqrt{b_k^2 + \lambda^2}}}{(b_k^2 + \lambda^2) (\mu + \sqrt{b_k^2 + \lambda^2})}.$$

Интегральное уравнение (5.3) аппроксимируется системой

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma(s_j) (k_0(x_i - s_j) - f(x_i)) &= \\ &= \frac{V_y(x_i) e^{-\nu x_i}}{\sqrt{1-M^2}}. \end{aligned}$$

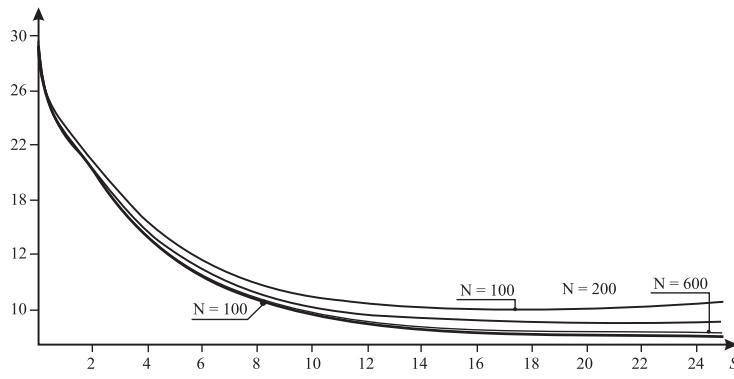


Рис. 1. Функция $C_y(s)$ для модели с полной вихревой интенсивностью (жирная линия) и модели с присоединенными вихрями (тонкие линии)

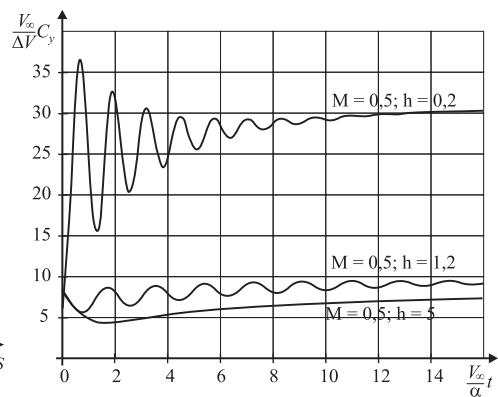


Рис. 2. Переходная функция $C_y(t)$ для различных h

Передаточная функция для подъемной силы примет вид

$$C_y(s) = \frac{2}{N} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) \sum_{i=1}^N \gamma(s_i) e^{\nu s_i} + \frac{2}{N} \frac{e^\nu}{M^2} \sum_{i=1}^N \gamma(s_i).$$

Результаты расчетов для различных моделей и разного числа вихрей, приведенные на рис. 1, показывают, что использование полной вихревой интенсивности (толстая линия) приводит к более эффективному алгоритму вычисления передаточной функции подъемной силы при больших s . В дальнейшем при аппроксимации передаточной функции $C_y(s)$ будет использована модель полной вихревой интенсивности.

6. Переходная функция коэффициента подъемной силы

Получив дискретно заданную функцию $C_y(s)$, сгладим ее дробно-рациональной функцией

$$C_y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \frac{4}{M} a_3 s^3}{1 + a_0 s + a_1 s^2 + a_3 s^3}.$$

При выборе аппроксимирующей функции используется начальное значение коэффициента подъемной силы равное $\frac{4}{M}$ [6]. Степень полиномов выбрана с учетом того, что знаменатель должен иметь один отрицательный действительный корень, характеризующий апериодическую составляющую переходного процесса, и два комплексно-сопряженных,

которые характеризуют колебательность переходного процесса [5]. При этом для устойчивости переходного процесса необходимо чтобы все коэффициенты знаменателя были положительными и $a_0 a_1 > a_3$.

Коэффициенты аппроксимирующей функции находим с помощью метода наименьших квадратов.

Получив требуемую аппроксимирующую функцию, применим к ней обратное преобразование Лапласа

$$C_y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} C_y(s) \right\},$$

что приведет к аналитическому выражению переходной функции $C_y(t)$

$$C_y(t) = c_1 + c_2 e^{-\gamma t} + c_3 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + c_4 e^{-\alpha t} \sin(\beta t). \quad (6.1)$$

На рис. 2 приведены переходные функции подъемной силы профиля для различных величин отстояния профиля от границ потока при $M = 0,5$.

7. Асимптотическое решение для малых отстояний

Рассмотрим решение краевой задачи (2.2)–(2.3) для случая малых h . Используем первое приближение функции $\text{th}(x) = x - O(x^3)$, тогда функциональное уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{\Gamma(\alpha)(\alpha^2 + \lambda^2)H}{2i(\alpha + i\mu)} = V_y(\alpha).$$

Введем замену

$$P(\alpha) = -\frac{\Gamma(\alpha)}{i(\alpha + i\mu)},$$

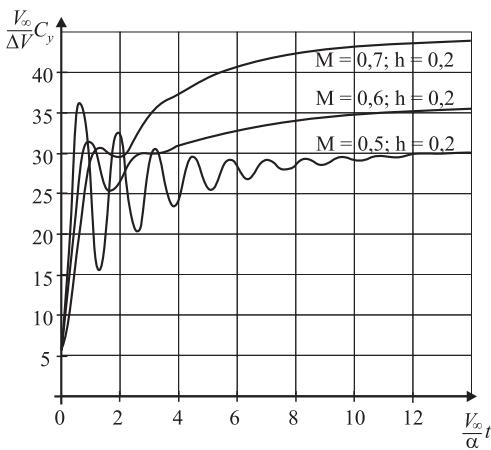


Рис. 3. Переходные функции $C_y(t)$ численного решения

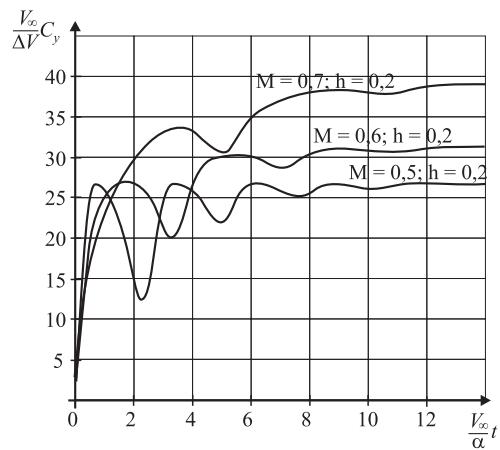


Рис. 4. Переходные функции $C_y(t)$ асимптотического

тогда

$$P(\alpha)(-\alpha^2 - \lambda^2) = \frac{2}{H} V_y(\alpha). \quad (7.1)$$

Выразим интенсивность вихревого слоя

$$\Gamma(\alpha) = -i(\alpha + i\mu)P(\alpha),$$

$$\gamma(x) = \frac{dp(x)}{dx} + \mu p(x).$$

Обратное преобразование Фурье приведет (7.1) к краевой задаче

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2} - \lambda^2 p(x) = \frac{2}{H} \frac{V_y(x)e^{-\nu x}}{\sqrt{1 - M^2}},$$

$$p(-1) = 0, \quad \frac{dp(x)}{dx} + \mu p(x)|_{x=1} = 0. \quad (7.2)$$

Решив краевую задачу, найдем передаточную функцию коэффициента подъемной силы по формуле

$$C_y(s) = \int_{-1}^1 \left(\frac{dp(x)}{dx} + \mu p(x) \right) e^{\nu x} dx.$$

Передаточная функция $C_y(s)$ является мероморфной функцией и может быть представлена как отношение двух целых функций

$$C_y(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

где

$$A(s) = (\mu + \lambda)e^{2\lambda} + (\mu - \lambda)e^{-2\lambda}.$$

Корни характеристического уравнения $A(s) = 0$

$$s_l = -\frac{1 - M^2}{4M} \ln \frac{1 + M}{1 - M} \pm i \frac{l\pi(1 - M^2)}{2M}, \\ l = 0, 1, 2$$

имеют отрицательную действительную часть, следовательно, переходный процесс устойчив.

В пространстве оригиналов [4] находим

$$C_y(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B(\alpha_l)e^{\alpha_l t}}{\alpha_l A'(\alpha_l)}$$

8. Анализ результатов

Графики (рис. 3 и 4) показывают наличие колебательной составляющей у переходной функции. Численный и асимптотический метод определения переходного процесса при единичном скачке воздействия качественно согласованы и отражают наличие колебательной составляющей, влияние которой возрастает при уменьшении скорости потока.

Заметим, что в работе [6] представлена переходная функция в случае безграничного потока, содержащая только апериодические составляющие. Такой результат получен путем аппроксимации переходной характеристики суммой апериодических составляющих, введенной a priori без анализа передаточных функций $C_y(s)$.

Аналитическое решение (6.1) учитывает как апериодическую, так и колебательную составляющую переходного процесса, что улучшает качественные характеристики решения.

Литература

1. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995. 520 с.
2. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. *Самойлович Г. С.* Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. М.: Наука, 1969. 332 с.
4. *Дёч Г.* Руководство к практическому преобразованию Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
5. *Попов Е. П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1989. 304 с.
6. *Бисплингхофф Р. Л.* Аэроупругость / Р.Л Бисплингхофф, Х. Эшли, Р.Л. Халфман. М.: Иностранная литература, 1958. 800 с.

Ключевые слова: тонкий профиль, сжимаемая жидкость, подъемная сила, переходная характеристика.

Статья поступила 1 ноября 2008 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Ефремов И. И., Липован П. С., Лукащик Е. П., 2008