УДК 539.3:534.1

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ[1]

***Ляпин А. А.*[2], *Селезнёв М. Г.*[3], *Селезнёв Н. М.*[4]**

DYNAMIC CONTACT PROBLEM FOR A THREE-LAYER HALF-SPACE WITH A CYLINDRICAL CAVITY

Lyapin A. A., Seleznev M. G., Seleznev N. M.

An approach to the solution of dynamic contact problems for a multilayered half-space with a cylindrical cavity in the form of an iterative process is offered. The process takes into account the mutual distance of the stamp contact area on the media surface and the cavity boundary, as well as physical and geometrical parameters correlation in the layered structure.

Keywords: contact problem, multilayered half-space, cylindrical cavity, iterative process.

1. Постановка задачи

Полосовой недеформируемый штамп с плоским основанием шириной $2b$ и центром в точке $x = x_0$ жестко сцеплен с верхним слоем трехслойного полупространства с полостью, расположенной в одном из слоев структуры. Штамп совершает установившиеся гармонические с частотой ω колебания единичной амплитуды, ориентированные по оси Oz.

Слои толщиной H_j $(j = 1, 2)$ жестко сцеплены между собой и с подстилающим полупространством $(j = 3)$, характеризуются модулями сдвига μ_j, плотностями ρ_j.

В каждом из слоев структуры вводим локальную систему координат (декартову (x, y_j, z) или, для слоя с полостью, цилиндрическую (r, φ, z), связанную с центром полости) (рис. 1).

Движение среды в каждом из слоев определяется уравнениями линейной теории упругости в перемещениях [1], в случае антиплоских колебаний, ориентированных вдоль оси Oz, имеющих вид

$$\mu_j \Delta U_z(x, y_j, t) = \rho_j \frac{\partial^2 U_z(x, y_j, t)}{\partial t^2},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}.$$

Смещение в j-м слое обозначим $U_{zj}(x, y, t) = u_{zj}(x, y)e^{-i\omega t}$ (t — время). Сдвиговые напряжения традиционно обозначаем τ_{yz} для плоской поверхности, для цилиндрической — τ_{rz}. Связь напряжений и деформаций определяется соотношениями закона Гука [1].

На плоской поверхности верхнего слоя при $y = 0$ имеем следующие граничные условия:

$$|x - x_0| \leqslant b: \; u_z(x, t) = \exp(-i\omega t);$$

$$|x - x_0| > b: \; \tau_{yz} = 0.$$

Пусть полость, представляющая собой круговой цилиндр радиуса a с образующей, параллельной оси Oz, расположена во втором слое структуры. На границе полости задана осциллирующая с частотой ω система усилий

$$r = a: \quad \tau_{rz}^{(j)} = \tau(\varphi) \exp(-i\omega t). \qquad (1.1)$$

На бесконечности задаются условия излучения энергии колебаний, для корректного выполнения которых используем принцип предельного поглощения [2, 3].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (07-08-00730) и Федерального агентства по образованию (проект 1.1.08).

[2]Ляпин Александр Александрович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Ростовского военного института ракетных войск; e-mail: lyapin@aaanet.ru.

[3]Селезнёв Михаил Георгиевич, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой «Информационные системы в строительстве» Ростовского государственного строительного университета.

[4]Селезнёв Николай Михайлович, аспирант кафедры «Информационные системы в строительстве» Ростовского государственного строительного университета.

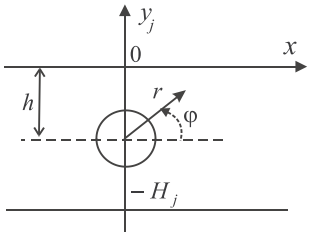


Рис. 1. Введение локальных систем координат в слое с полостью. Случай $j = 1$ соответствует расположению полости в верхнем слое, $j = 2$ — в среднем, для $j = 3$ — в полупространстве ($H_3 = \infty$)

2. Вывод определяющих соотношений

Рассмотрим изолированный слой, на границах которого заданы осциллирующие с частотой ω распределенные напряжения (на границе первого и второго слоев — $R_1(x)$, на границе с полуплоскостью — $R_2(x)$)

$$\begin{aligned} y_j = 0 &: \tau_{yz}(x,t) = R_{j-1}(x)e^{-i\omega t}, \\ y_j = -H_j &: \tau_{yz}(x,t) = R_j(x)e^{-i\omega t}, \\ & j = 1,2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Закон распределения контактных напряжений под штампом $\tau_{yz}(x,t) = q(x)\exp(-i\omega t)$ на этом этапе считаем известным. Решение задачи для j-го слоя без полости, полученное методом интегральных преобразований с использованием принципа предельного поглощения [2,3], имеет вид

$$\begin{aligned} u_{zj}(x,y) = \\ = \frac{1}{2\pi\mu_j}\int\limits_\Gamma e^{i\alpha x}\sigma_j^{-1}[K_{1j}(\alpha,y_j,\omega)\bar R_{j-1}(\alpha)+ \\ + K_{2j}(\alpha,y_j,\omega)\bar R_j(\alpha)]\,d\alpha. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_{1j}(\alpha,y_j,\omega) = \\ = \left[e^{\sigma_j(H_j+y_j)} + e^{-\sigma_j(H_j+y_j)}\right]\Delta^{-1}(H_j), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$j = 1,2,$$

$$K_{2j}(\alpha,y_j,\omega) = (e^{\sigma_j y_j} + e^{-\sigma_j y_j})\Delta^{-1}t(H_j),$$

$$\bar R_j(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_j(\xi)e^{-i\alpha\xi}d\xi;$$

$$\Delta(H_j) = e^{\sigma_j H_j} - e^{-\sigma_j H_j},$$

$$\bar R_0(\alpha) = \bar q(\alpha) = \int\limits_{-1}^{+1} q(\xi)e^{-i\alpha\xi}d\xi, \quad j = 1,2,$$

$$\sigma_j = (\alpha^2 - \theta_j^2)^{0,5}; \quad \theta_j = \frac{\omega b}{V_{sj}};$$

$$V_{sj} = \sqrt{\mu_j/\rho_j}.$$

Всюду далее чертой вверху обозначается преобразование Фурье функции по координате x, где α — параметр преобразования.

Введем безразмерные параметры, связанные с длиной, $\tilde x = x/b$, $\tilde y_j = y_j/b$, $\tilde u_{zj} = u_{zj}/b$, $\tilde r = r/b$, $\tilde a = a/b$, $\tilde H_j = H_j/b$, $\tilde h = h/b$, $\tilde\alpha = \alpha b$. Для простоты записи волну далее опустим.

Контур интегрирования Γ в комплексной плоскости, определенный использованием принципа предельного поглощения [1,2], обходит положительные вещественные особенности подынтегральных функций снизу, отрицательные — сверху, а на остальной части совпадает с вещественной осью. Для полупространства без полости имеем

$$\begin{aligned} u_{z3}(x,y_3) = \\ = \frac{1}{2\pi\mu_3}\int\limits_\Gamma \sigma_3^{-1}\bar R_2(\alpha)e^{i\alpha x+\sigma_3 y_3}d\alpha. \end{aligned}$$

При расположении полости в одном из элементов структуры (пусть это будет средний слой), следуя [3,4], решение задачи ищем в виде

$$\begin{aligned} U_{z2}(x,y_2,t) = \\ = U_{z2}^{(1)}(x,y_2,t) + U_{z2}^{(2)}(r,\varphi,t), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $U_{z2}^{(1)} = u_{z2}^{(1)}(x,y_2)e^{-i\omega t}$ — решение задачи для однородного слоя с граничными условиями

$$y_2 = 0: \quad \tau_{yz}(x,t) = X_1(x)e^{-i\omega t},$$

$$y_2 = -H_2: \quad \tau_{yz}(x,t) = X_2(x)e^{-i\omega t},$$

$U_{z2}^{(2)}(r,\varphi,t) = u_{z2}^{(2)}(r,\varphi)e^{-i\omega t}$ — решение задачи для пространства с цилиндрической полостью радиуса a, загруженной произвольно

распределенной системой осциллирующих с частотой ω усилий $Y(\varphi)$

$$r = a: \quad \tau_{rz} = \mu_2 \frac{\partial U_{z2}^{(2)}(r,\varphi,t)}{\partial r} = Y(\varphi)e^{-i\omega t}.$$

Здесь $u_{z2}^{(1)}(x, y_2)$ имеет вид (2.2), (2.3) при замене $R_j(x)$ на $X_j(x)$ — неизвестные вспомогательные функции напряжений, через которые определяются характеристики НДС слоя с полостью, $u_{z2}^{(2)}(r,\varphi)$ имеет вид

$$u_{z2}^{(2)}(r,\varphi) = \frac{1}{\mu_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{Y_k H_k^{(1)}(\theta_2 r)}{G_{k0}(a)} e^{ik\varphi}, \quad (2.5)$$

$$G_{k0}(\xi) = \left[kH_k^{(1)}(\theta_2\xi) - H_{k+1}^{(1)}(\theta_2\xi) \right].$$

Здесь и далее Y_k — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $Y(\varphi)$

$$Y_k = \int_{-\pi}^{\pi} Y(\varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi,$$

$H_k^{(1)}(\xi)$ — функции Ханкеля первого рода [4]. Связь локальных декартовых координат для среднего слоя (x, y_2) и цилиндрических координат (r,φ) определена соотношениями:

$$y_2 = -h + r\sin\varphi; \quad x = r\cos\varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + (y_2 + h)^2}; \quad \varphi = \arctan\frac{h + y_2}{x}.$$

Неизвестные функции напряжений $X_j(x)$, $Y(\varphi)$ определяем при удовлетворении представления (2.4) граничным условиям в напряжениях по границам слоя с полостью (2.1) в преобразованиях Фурье по координате x и (1.1) — на цилиндрической поверхности. В результате, используя соотношения закона Гука в декартовой и цилиндрической системах координат для (2.4) и свойства преобразования Фурье, получаем

$$\bar{X}_1(\alpha) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k L_{k1}(\alpha) = \bar{R}_1(\alpha), \quad (2.6)$$

$$\bar{X}_2(\alpha) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k L_{k2}(\alpha) = \bar{R}_2(\alpha),$$

$$Y_k = \tau_k - \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma L_{k3}^{(1)}(\alpha)\bar{X}_1(\alpha)d\alpha + L_{k3}^{(2)}(\alpha)\bar{X}_2(\alpha)d\alpha, \quad (2.7)$$

здесь

$$L_{k1}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{G_{k0}\left(\sqrt{\xi^2 + (h-H_2)^2}\right) h}{\sqrt{\xi^2 + h^2}} + L_k(\alpha) \frac{ikH_k^{(1)}\left(\theta_2\sqrt{\xi^2+h^2}\right)\xi}{(\xi^2+h^2)} \right] \times G_{k0}^{-1}(a) E(\alpha,\xi) d\xi, \quad (2.8)$$

$$L_{k2}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{G_{k0}\left(\sqrt{\xi^2 + (h-H_2)^2}\right)(h-H_2)}{\sqrt{\xi^2 + (h-H_2)^2}} + \frac{ikH_k^{(1)}\left(\theta_2\sqrt{\xi^2+(h-H_2)^2}\right)\xi}{\left(\xi^2+(h-H_2)^2\right)} \right] G_{k0}^{-1}(a) E(\alpha,\xi) d\xi,$$

$$E(\alpha,\xi) = e^{-i(\alpha\xi + \arctan\left[\xi^{-1}(h-H_2)\right])},$$

$$L_{k3}^{(1)}(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[i\alpha K_{12}(\alpha, (-h + a\sin\varphi), \omega)\cos\varphi + \frac{\Delta(H_2 - h + a\sin\varphi)}{\Delta(H_2)} \right] e^{-ik\varphi} d\varphi,$$

$$L_{k3}^{(2)}(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[i\alpha K_{22}(\alpha, (-h + a\sin\varphi), \omega)\cos\varphi + \frac{\Delta(-h + a\sin\varphi)}{\Delta(H_2)} \right] e^{i\alpha a\cos\varphi} d\varphi,$$

$$\tau_k = \int_{-\pi}^{\pi} \tau(\varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi.$$

Через функции напряжений $X_1(x)$, $X_2(x)$, $Y(\varphi)$, входящие в (2.6), (2.7) можно получить представление для расчета полей смещений в слое с полостью в виде (2.4), (2.5), (2.2), (2.3). Здесь следует отметить, что функциональные уравнения (2.6) фактически позволяют выразить неизвестные напряжения вдоль границ контакта слоев $\bar{R}_j(\alpha)$ через вспомогательные функции напряжений $\bar{X}_j(\alpha)$, $Y_k \leftrightarrow Y(\varphi)$.

Система трех уравнений (2.6) включает 5 неизвестных функций — $X_j(x)$, $R_j(x)$, $Y(\varphi)$. Для ее доопределения используем условия жесткого сцепления — равенства амплитудных функций перемещений слоев вдоль границ их контакта в преобразованиях Фурье

$$\bar{u}_{z1}(\alpha,-H_1)=\bar{u}_{z2}(\alpha,0),$$

$$\bar{u}_{z2}(\alpha,-H_2)=\bar{u}_{z3}(\alpha,0).$$

В результате, учитывая представления (2.6), получим дополнительно два функциональных уравнения

$$\begin{aligned}\sigma_1^{-1}K_{11}(\alpha,-H_1,\omega)\,\bar{q}(\alpha)+&\\ +[\sigma_1^{-1}K_{21}(\alpha,-H_1,\omega)-&\\ -\sigma_2^{-1}\frac{\mu_1}{\mu_2}K_{12}(\alpha,0,\omega)]\bar{X}_1(\alpha)-&\\ -\sigma_2^{-1}\frac{\mu_1}{\mu_2}K_{22}(\alpha,0,\omega)\;\bar{X}_2(\alpha)=&\\ =\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Y_k\Bigg[\frac{H_k^{(1)}(\theta_2 r)}{G_{k0}(a)}-&\\ -K_{21}(\alpha,-H_1,\omega)\,L_{k1}(\alpha)+&\\ \sigma_2^{-1}\frac{\mu_2}{\mu_1}\Big\{K_{12}(\alpha,0,\omega)L_{k1}(\alpha)+&\\ +K_{22}(\alpha,-H_1,\omega)L_{k2}(\alpha)\Big\}\Bigg],&\quad(2.9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&K_{12}(\alpha,-H_2,\omega)\,\bar{X}_1(\alpha)+\\ &+\bar{X}_2(\alpha)\left(K_{22}(\alpha,-H_2,\omega)-\frac{\mu_2}{\mu_3}(\sigma_2\sigma_3)^{-1}\right)=\\ &=\sigma_2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Y_k\Bigg[-G_{k0}^{-1}(a)\times\\ &\times\int_{-\infty}^{+\infty}H_k^{(1)}\left(\theta_2\sqrt{\xi^2+(h-H_2)^2}\right)\times\\ &\times e^{i(\alpha\xi+k\left[\arctan\frac{h-H_2}{\xi}\right]}d\xi-K_{12}(\alpha,-H_2,\omega)L_{k1}(\alpha)-\\ &-K_{22}(\alpha,-H_2,\omega)\,L_{k2}(\alpha)+\frac{\mu_2}{\mu_3}\sigma_3^{-1}L_{k2}(\alpha)\Bigg].\end{aligned}$$

Таким образом, получена система трех интегральных уравнений (2.7), (2.9) для определения вспомогательных функций напряжения $X_j(x)$, $Y(\varphi)$ при заданной функции распределения контактных напряжений.

При постановке контактной задачи заданы смещения подошвы штампа $|x-x_0|\leqslant 1: u_{z1}(x,0)=f(x)$ (при сдвиговых колебаниях штампа с плоским основанием $f(x)=\text{const}$), а закон распределения контактных напряжений $q(x)$ неизвестен, т. е. в системе трех интегральных уравнений (2.7), (2.8) имеем четыре неизвестные функции. Приравнивая смещение поверхности верхнего слоя в области контакта функции $f(x)$, получаем четвертое уравнение, замыкающее систему интегральных уравнений контактной задачи для трехслойного полупространства с полостью, в виде

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi\mu_1}\int_\Gamma e^{i\alpha x}\sigma_j^{-1}K_{1j}(\alpha,0,\omega)\,\bar{q}(\alpha)\;d\alpha=\\ &=f(x)-\frac{1}{2\pi\mu_1}\int_\Gamma K_{2j}(\alpha,y_j,\omega)\Bigg[\bar{X}_1(\alpha)+\\ &+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Y_kL_{k1}(\alpha)\Bigg]d\alpha.\quad(2.10)\end{aligned}$$

Таким образом, система интегральных уравнений контактной задачи для трехслойного полупространства с полостью включает уравнения (2.7),(2.9), (2.10).

В случае, когда соотношения геометрических, физических и механических характеристик слоистого полупространства с полостью определяют относительно малое ее влияние на закон распределения контактных напряжений, можно эффективно строить итерационный процесс решения полученной системы интегральных уравнений.

3. Алгоритм построения последовательных приближений

Первое приближение (закон распределения контактных напряжений $q_1(x)$) включает два этапа. На первом этапе полагаем $Y_k=\tau_k$ и решаем интегральное уравнение контактной задачи для соответствующей слоистой структуры без полости с возмущенной правой частью (для неизвестных функций далее индекс вверху соответствует номеру приближения)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi\mu_1}\int_\Gamma e^{i\alpha x}\sigma_j^{-1}K_{1j}(\alpha,0,\omega)\,\bar{q}^{(1)}(\alpha)\;d\alpha=\\ &=f(x)-\frac{1}{2\pi\mu_1}\int_\Gamma\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tau_kL_{k1}(\alpha)\;d\alpha.\quad(3.1)\end{aligned}$$

После этого решаем систему двух функциональных уравнений (2.9) относительно

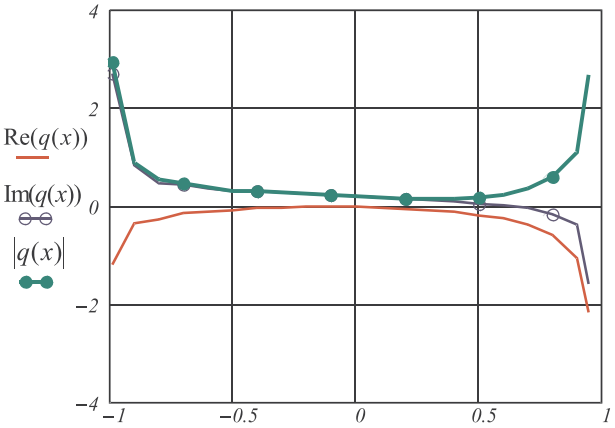


Рис. 2. Распределение контактных напряжений под штампом для 21 точки коллокации. Погрешность не превышает 5 %

преобразований Фурье неизвестных функций напряжений $\bar{X}_1(\alpha)$, $\bar{X}_2(\alpha)$. В результате получаем первые приближения для неизвестных функций $\bar{q}^{(1)}(\alpha)$, $\bar{X}_1^{(1)}(\alpha)$, $\bar{X}_2^{(1)}(\alpha)$. После этого определяем значения $Y_k = Y_k^{(1)}$, подставляя в (2.7) значения $\bar{X}_1^{(1)}(\alpha) = \bar{X}_1(\alpha)$, $\bar{X}_2(\alpha) = \bar{X}_2^{(1)}(\alpha)$.

Во втором и последующих приближениях на первом этапе решаем интегральное уравнение первого рода (2.10), в правой части которого подставлены $\bar{X}_1^{(1)}(\alpha)$, $Y_k^{(1)}$, после чего решаем систему функциональных уравнений (2.9) (при данном $Y_k^{(1)}$), используем уравнение (2.7) для определения $Y_k^{(2)}$ и т. д.

Структура системы интегральных уравнений задачи определяет, что

$$q^{(2)}(x) = q^{(1)}(x) + \delta_1(x);$$

$$q^3(x) = q^{(1)}(x) + \delta_1(x) + \delta_2(x);$$

$$\ldots$$

При малости операторов системы поправочные слагаемые $\delta_j(x)$ с ростом j имеют более высокий порядок малости относительно друг друга. На каждом этапе метода последовательных приближений можно определять только поправочное слагаемое $\delta_j(x)$, решая уравнение (3.1) для правой части, соответствующей последнему поправочному слагаемому.

Ключевым моментом реализации итерационного процесса является решение интегрального уравнения (2.10) с изменяемой от приближения к приближению правой частью [5]. Решение системы интегральных уравнений контактной задачи осуществлялось на основе представления ее решения в виде функционального ряда с неопределенными коэффициентами по полной ортогональной системе функций с выделением корневой особенности

$$q(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x), \qquad (3.2)$$

$$\varphi_0(x) = 1/\sqrt{1 - x^2},$$

и последующим ее сведением к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) путем удовлетворения интегрального уравнения в заданном наборе точек коллокации. Исследование СЛАУ проводилось методом редукции с практической оценкой сходимости метода. Наличие слагаемого с корневой особенностью улучшает сходимость метода.

Как показал цикл пробных расчетов, оптимальным является выбор в качестве базисных функций полиномов Лежандра: $\varphi_{n+1}(x) = P_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, обладающих свойством ортогональности на отрезке $[-1, 1]$. В качестве примера на рис. 2. представлен характерный закон распределения контактных напряжений на поверхности трехслойного полупространства нормальной структуры (толщины слоев равны единице, скорости распространения сдвиговых волн возрастают с глубиной от слоя к слою в два раза (при $V_{s1} = 200$ м/сек), $b = 1$; $x_0 = -1$, полость, радиуса 0,25 толщины слоя, расположена под правой кромкой штампа в центре среднего слоя, приведенная частота ко-

лебаний $\theta_1 = 0,5$) при удержании в (3.2) 20 членов ряда ($N = 20$).

Численная реализация изложенного алгоритма позволяет определить практическую скорость сходимости итерационного процесса, вне зависимости от того, за счет каких параметров (малость полости, соотношения жесткостей слоев и др.) достигается малость операторов системы. Преимуществом подобного подхода является возможность построения нескольких приближений решения, в то время как аналитическими средствами, как правило, удается получить только нулевое и первое приближения. К недостаткам подхода относится неизбежное накопление погрешности расчетов, определяющее техническое ограничение на число итераций. Этот фактор следует контролировать при расчетах.

Цикл численных расчетов показал, что при расположении полости в среднем слое структуры и различных соотношениях упругих характеристик слоев, в большинстве случаев итерационный процесс сходится.

Литература

1. *Новацкий В. С.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. *Ляпин А. А., Селезнев М. Г., Собисевич Л. Е., Собисевич А. Л.* Механико-математические модели в задачах активной сейсмологии. М.: ОИФЗ РАН, Московский филиал ГНИЦ ПГК при КубГУ Министерства образования РФ, 1999. 294 с.
4. *Ляпин А. А.* О возбуждении волн в слоистой среде с локальным дефектом // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 5. С. 87–91.
5. *Янке Э., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 344 с.
6. Механика контактных взаимодействий / Под редакцией акад. РАН И. И. Воровича и акад. РАЕН В. М. Александрова. М.: Физматлит. 2001. 672 с.

Ключевые слова: контактная задача, многослойное полупространство, цилиндрическая полость, итерационный процесс.

Статья поступила 7 ноября 2008 г.
Ростовский военный институт ракетных войск, г. Ростов-на-Дону
Ростовский государственный строительный университет, г. Ростов-на-Дону
© Ляпин А. А., Селезнёв М. Г., Селезнёв Н. М., 2008