Механика

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ БЛОЧНЫХ СТРУКТУР АКАДЕМИКА М. А. САДОВСКОГО[1]

Бабешко В. А.[2]***, Бабешко О. М.***[3]***, Евдокимова О. В.***[4]

SOLVING OF THE BLOCK STRUCTURE PROBLEM STATED BY ACAD. M. A. SADOVSKY

Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V.

The development of block structure theory is described. According to Academician M. A. Sadovsky, this theory is very important in the problem of earthquake forecasting. The examples of applying the theory are presented.

Keywords: block structure, block element, factorization method.

В решении проблемы прогноза сейсмического события, землетрясения, академик М. А. Садовский занимал принципиальную позицию, считая, что в рамках описания глубинного строения Земли как слоистой структуры этого сделать невозможно. Им было высказано мнение, что только переход к описанию строения литосферных плит как блочных структур может дать положительный результат [1–4]. Он и его ученики проделали огромную работу по обоснованию этой точки зрения, ими собран значительный фактический материал, проведены определенные физико-математические исследования. М. А. Садовский считал, что следует разработать математическую теорию для блочных структур, такую же, какая создана для слоистых сред, например, в [5, 6]. С ее помощью необходимо проводить анализ волновых процессов и напряженно-деформированного состояния среды, что позволит улавливать гораздо более сложные процессы, нежели те, которые позволяет исследовать слоистая модель. Совершенно ясно, что, построив теорию блочных структур, можно на новом уровне изучать не только проблемы сейсмичности. Существенные уточнения будут иметь результаты, ранее полученные по теории слоистых сред, в таких областях как акустика океана, дефектоскопия материалов, создание материалов с управляемыми свойствами и наноматериалов, поиск полезных ископаемых, распространение радиоволн в ионосфере, сейсмостойкое строительство, экология и других.

Созданием теории блочных структур занималась ученые Кубанского государственного университета и Южного научного центра Российской академии наук, в настоящее время она построена. Некоторые ее фрагменты опубликованы в [7–14] и других статьях авторов, а также в работах, приведенных в списках литературы к ним. Эта теория оказалась намного сложнее теории слоистых

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (09-08-00170, 08-08-00468, 09-08-00171, 08-08-00669), программы Юг России (08-01-99012, 08-01-99013, 08-01-99016, 08-08-99090, 08-08-99091, 09-01-96500, 09-08-96503, 09-08-96522, 09-08-96527), проект НШ-2298.2008.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

[3]Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[4]Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

сред, являющейся ее частным случаем. Разработка ее потребовала существенного переосмысления имеющихся аналитических, полуаналитических и численных методов изучения неоднородных сред и привела к необходимости создания принципиально нового подхода к исследованию, прежде всего, краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Был создан новый, не повторяющий известные методы — дифференциальный метод факторизации [7–14]. Этот метод долгое время не был замечен учеными, занимавшимися разработкой факторизационных подходов.

Причина, возможно, состоит в том, что он потребовал привлечения большого набора не применявшихся вместе современных методов математики. В частности, внешнего анализа, методов топологии, теории функций многих комплексных переменных, форм-вычетов Лере, факторизации матриц-функций нескольких комплексных переменных, теории представления групп. В его основе лежат тонкие свойства топологической алгебры, связанные с автоморфизмом топологических многообразий, разделом математики, не часто используемым в приложениях [7–14]. Самым непростым при исследовании этих краевых задач явился отказ от использования традиционных для них Соболевских пространств, в которых ищется решение. Потребовался переход в нетрадиционные, сугубо топологические пространства медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_S$. Параллельно с дифференциальным методом факторизации развивался интегральный метод факторизации [10, 15]. Оба метода сопутствуют друг другу при исследовании и решении как краевых задач, так и интегральных уравнений и их систем.

1. Построенная теория уже нашла ряд важных приложений, в частности, при построении математических моделей для оценки напряженности литосферных плит, в материаловедении, строительстве, нанотехнологиях [11–14]. Ниже излагается еще одно приложение теории, позволяющее выделить новый математический объект — блочный элемент, а вместе с этим создать метод блочного элемента, который не повторяет известные и может служить новым средством исследования и решения больших систем дифференциальных уравнений в частных производных, применяемых в самых разных областях механики, физики, экологии, биофизики, инженерных приложениях.

Метод блочного элемента отчасти похож на метод конечного элемента, развитый в работах [16, 17] и др. На основе метода конечного элемента создан большой набор компьютерных программ. Среди них следует отметить, например, такие как ANSYS Mechanical, Multiphysics, Structural, CivilFEM, AUTODYN и другие, позволяющие производить вычисления решений различных краевых задач в вышеперечисленных областях.

В то же время метод конечного элемента имеет существенные недостатки, отмеченные самими его создателями [16]. К числу главных следует отнести замену сплошной среды конечным числом элементов меньшей размерности. В результате локальное описание решений краевых задач носит лишь приближенный характер. В методе конечного элемента носитель должен быть ограниченным. Области задания краевых задач также должны быть ограниченными. Носители конечного элемента, как правило, берутся в двухмерном случае в форме треугольника или прямоугольника, в том числе криволинейного, а в трехмерном — в форме пирамиды или параллелепипеда, которые также могут быть криволинейными. Функции формы, задаваемые на таком носителе, являются полиномами двух или трех переменных соответственно, содержащими несколько неизвестных коэффициентов, т. е. являются сплайнами. Порядки входящих в них полиномов диктуются порядком производных в дифференциальных уравнениях краевых задач. При этом важную роль играют вершины, рёбра и грани вводимых таким образом носителей, на которых выделяются избранные точки — узлы. Они выбираются в форме множеств в вершинах пирамиды или треугольника, а также на ребрах или гранях. Функции формы [16, 17] строятся, исходя из требования однозначного определения коэффициентов, по их значениям в узлах носителя. В то же время следует отметить и ряд недостатков этого метода. Полиномы сплайна лишь приближенно описывают решение краевой задачи в зоне носителя. Наличие функций формы конечного элемента в полиномиальном виде не позволяет анализировать волновые составляющие решения, особенно в краевых задачах для сред при многочисленных воздействиях различными физическими полями. Кроме это-

го, если решение содержит сильно осциллирующие функции, то полиномиальная функция формы их не сможет правильно представить. Эти проблемы становятся актуальными в связи с часто встречающимися композициями микроразмерных и наноразмерных материалов. Повышение порядка производных в дифференциальных уравнениях усложняет построение конечных элементов, их функций формы [16]. Уменьшение размеров сплайнов конечных элементов ухудшает сходимость вычислительных процессов [18]. В то же время большим достоинством метода конечного элемента является ленточность или почти диагональность матрицы «жесткости», возникающей при применении этого метода, что существенно облегчает вычислительный процесс. Наличие многочисленных вычислительных программ, о котором говорилось выше, несомненно, позволяет отнести метод конечных элементов к числу эффективнейших вычислительных средств настоящего времени.

Блочный элемент свободен от главного недостатка конечного элемента — он сохраняет сплошность среды, что выражается в точном удовлетворении соответствующих дифференциальных уравнений краевых задач [7–14].

Как и конечный элемент, блочный элемент имеет носитель, вне которого он равен нулю, но его носителем может являться любая область — ограниченная, полуограниченная или неограниченная, т. е. с границами, уходящими в бесконечность. Носителями блочного элемента могут быть как выпуклые области — экспоненциальная факторизация, так и многосвязные, в случае обобщенной факторизации [19]. Блочные элементы строятся по определенному алгоритму однотипно для систем дифференциальных уравнений в частных производных любого конечного порядка. Они имеют представление в форме интеграла по границе области носителя [7–14]. Дифференциальные уравнения соответствующих краевых задач могут иметь любой порядок производных и не привязаны к наличию у них функционалов — интегралов энергии. Применение метода конечного элемента для таких краевых задач крайне сложно.

2. Метод блочного элемента не повторяет другой важный вычислительный метод, а именно, граничного элемента [20–22]. Последний предполагает построение фундаментального решения дифференциальных уравнений, несущего на границе области рассматриваемой краевой задачи сингулярные и иные особенности [20–22]. Количество особенностей растет с увеличением порядка производных, а их свойства усложняются. Разница этих двух методов состоит также в удовлетворении граничных условий: в методе граничного элемента — функциональное, в методе блочного элемента — топологическое, но приводящее к тому же результату. Кроме этого, в методе блочного элемента факторизация оставляет в представлении решения только нужные составляющие, а получаемые псевдодифференциальные уравнения не только достаточно просто регуляризуются, но даже исследуются аналитически и допускают различные варианты приближенных решений [7–14]. В методе граничного элемента приходится решать интегральные уравнения со сложными, в том числе, сингулярными особенностями в случае высоких порядков производных в дифференциальных уравнениях. Метод блочного элемента, порожденный блочной структурой, вводимой сеткой, разбивающей область задания краевой задачи на блоки, приводит, как и метод конечного элемента, к почти диагональной системе псевдодифференциальных уравнений. Можно выделить и другие достоинства этого метода, но главным можно назвать его исследовательские возможности, позволяющие производить анализ решений краевых задач, не прибегая к конкретным вычислениям. Метод позволяет пролонгировать решение на всю исследуемую область.

Отметим, что метод блочного элемента, как и другие методы, не лишен недостатков. Главным является принадлежность блочного элемента (как функции) к пространству медленно растущих обобщенных функций [7–14].

Однако этот недостаток легко преодолевается путем игнорирования обобщенной функции, происхождение которой связано с дифференцированием ступенчатой функции на границе носителя блочного элемента. Классическая составляющая решения продолжается с сохранением требуемой гладкости из блока в блок.

3. Блочный элемент можно строить для любой конечной системы дифференциальных уравнений в частных производных, причем порядок производных может быть любым ограниченным. Разумеется, представление элемента не будет простым, но он строится по определенному алгоритму автоматиче-

ски. Ниже в качестве примера построен блочный элемент следующей двумерной краевой задачи в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ для дифференциального уравнения вида

$$\big[A_{11}(x_1,x_2)\partial^2 x_1 + A_{22}(x_1,x_2)\partial^2 x_2 + \\ + A(x_1,x_2)\big]\varphi(x_1,x_2) = 0 \quad (1)$$

с некоторыми граничными условиями, например, Дирихле или Неймана.

Здесь коэффициенты $A_{kk}(x_1,x_2)$, $A(x_1,x_2)$ являются положительными гладкими функциям. Детали построения опущены, алгоритм изложен в работах [7–14].

Введем в области Ω прямоугольную сетку, настолько плотную, что в интересующей зоне этой области коэффициенты $A_{kk}(x_1,x_2)$, $A(x_1,x_2)$ можно было считать постоянными. Будем обозначать их A_{kk}, A, а область выбранного прямоугольника сетки — Ω_0 с границей $\partial\Omega_0$. Пусть в исходной системе координат она описывается соотношениями $|x_1| \leqslant a, \quad |x_2| \leqslant b$.

В области Ω_0 решим дифференциальным методом факторизации краевую задачу (1), применяя алгоритм, изложенный в [14]. В процессе его применения осуществляется касательное расслоение ориентированной границы $\partial\Omega_0$ и вводятся правые локальные координаты с внешними нормалями x_2^k и касательными x_1^k. Локальные координаты располагаются на сторонах прямоугольника, следуют против часовой стрелки с начальным индексом $k=1$ на верхней стороне.

Введем операторы преобразования Фурье

$$F\left(\alpha_1^k\right)\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x_1^k\right)\exp\left(i\alpha_1^k x_1^k\right)dx_1^k,$$

$$F^{-1}\left(x_1^k\right)\Phi = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\alpha_1^k\right)\exp\left(-i\alpha_1^k x_1^k\right)d\alpha_1^k,$$

$$F\left(\alpha_1^k,\alpha_2^k\right)\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x_1^k,x_2^k\right)\times \\ \times\exp i\left(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k\right)dx_1^k dx_2^k,$$

$$F^{-1}\left(x_1^k,x_2^k\right)\Phi = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\alpha_1^k,\alpha_2^k\right)\times \\ \times\exp\left[-i\left(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k\right)\right]d\alpha_1^k d\alpha_2^k,$$

$$k = \overline{1,4}.$$

Применяя процедуру построения автоморфизма многообразий в методе факторизации, вычисляя формы-вычеты Лере, получим в локальных системах координат псевдодифференциальные уравнения блочного элемента в виде [7–14]

$$F^{-1}\left(x_1^1\right)\Bigg\{\int\limits_{-a}^{a}\Big[-A_{22}\left(\varphi'_{12} - i\alpha_{2-}^1\varphi_1\right)\times \\ \times\exp\left(i\alpha_1^1\eta_1^1\right)d\eta_1^1 - A_{22}\left(\varphi'_{32} + i\alpha_{2-}^1\varphi_3\right)\times \\ \times\exp\Big[-i(2\alpha_{2-}^1 b + \alpha_1^1 x_1^3)\Big]dx_1^3\Big] - \\ -\int\limits_{-b}^{b}\Big[A_{11}\left(\varphi'_{22} + i\alpha_1^1\varphi_2\right)\times \\ \times\exp\Big[-i\left(\alpha_{2-}^1 b - \alpha_{2-}^1 x_1^2 + \alpha_1^1 a\right)\Big]dx_1^2 - \\ - A_{11}\left(\varphi'_{42} - i\alpha_1^1\varphi_4\right)\times \\ \times\exp\Big[-i\left(\alpha_{2-}^1 b + \alpha_{2-}^1 x_1^4 - \alpha_1^1 a\right)\Big]dx_1^4\Big]\Bigg\} = 0,$$

$$x_1^1 \in [-a,a];$$

$$F^{-1}\left(x_1^2\right)\Bigg\{\int\limits_{-b}^{b}\Big[-A_{11}\left(\varphi'_{22} - i\alpha_{2-}^2\varphi_2\right)\times \\ \times\exp\left(i\alpha_1^2\eta_1^2\right)d\eta_1^2 - A_{11}\left(+\varphi'_{42} + i\alpha_{2-}^2\varphi_4\right)\times \\ \times\exp\left[-i\left(2\alpha_{2-}^2 a + \alpha_1^2 x_1^4\right)\right]dx_1^4\Big] + \\ +\int\limits_{-a}^{a}\Big[A_{22}\left(-\varphi'_{12} + i\alpha_1^2\varphi_1\right)\times \\ \times\exp\left[-i\left(\alpha_{2-}^2 a - \alpha_1^2 b + \alpha_{2-}^2 x_1^1\right)\right]dx_1^1 + \\ + A_{22}\left(-\varphi'_{32} - i\alpha_1^2\varphi_3\right)\times \\ \times\exp\left[-i\left(\alpha_{2-}^2 a + \alpha_1^2 b - \alpha_{2-}^2 x_3^2\right)\right]dx_1^3\Big]\Bigg\} = 0,$$

$$x_1^2 \in [-b,b],$$

$$F^{-1}\left(x_1^3\right)\left\{\int\limits_{-a}^{a}\Big[-A_{22}\left(\varphi'_{32}-i\alpha_{2-}^3\varphi_3\right)\times\right.$$
$$\times\exp\left(i\alpha_1^3\eta_1^3\right)d\eta_1^3-A_{22}\left(\varphi'_{12}+i\alpha_{2-}^3\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp\Big[-i(2\alpha_{2-}^3b+\alpha_1^3x_1^1\Big]dx_1^1\Big]+$$
$$+\int\limits_{-b}^{b}\Big[-A_{11}(\varphi'_{22}-i\alpha_1^3\varphi_2)\times$$
$$\times\exp\Big[-i\left(\alpha_{2-}^3b-\alpha_1^3a+\alpha_{2-}^3x_1^2\right)\Big]dx_1^2-$$
$$-A_{11}\left(\varphi'_{42}+i\alpha_1^3\varphi_4\right)\times$$
$$\left.\times\exp\Big[-i\left(\alpha_{2-}^3b+\alpha_1^3a-\alpha_{2-}^3x_1^4\right)\Big]dx_1^4\Big]\right\}=0,$$
$$x_1^3\in[-a,a];$$

$$F^{-1}\left(x_1^4\right)\left\{\int\limits_{-b}^{b}\Big[-A_{11}\left(\varphi'_{42}-i\alpha_{2-}^4\varphi_3\right)\times\right.$$
$$\times\exp\left(i\alpha_1^4\eta_1^4\right)d\eta_1^4-A_{11}\left(\varphi'_{22}+i\alpha_{2-}^4\varphi_2\right)\times$$
$$\times\exp\Big[-i\left(2\alpha_{2-}^4a+\alpha_1^4x_1^2\right)\Big]dx_1^2+\Big]$$
$$+\int\limits_{-a}^{a}\Big[-A_{22}\left(\varphi'_{12}+i\alpha_1^4\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp\Big[-i\left(\alpha_{2-}^4a+\alpha_1^4b-\alpha_{2-}^4x_1^1\right)\Big]dx_1^1+$$
$$+A_{22}\left(\varphi'_{32}-i\alpha_3^4\varphi_3\right)\times$$
$$\left.\times\exp\Big[-i\left(\alpha_{2-}^4a-\alpha_1^4b+\alpha_{2-}^4x_1^3\right)\Big]dx_1^3\Big]\right\}=0,$$
$$x_1^4\in[-b,b].$$

Этот класс уравнений может исследоваться и решаться методом интегральной факторизации [10, 15]. Общее представление решения $\varphi_k(x_1^k,x_2^k)$, т. е. блочного элемента, после обращения системы псевдодифференциальных уравнений строится в каждой локальной системе координат x_1^k, x_2^k. Ниже приводится представление блочного элемента в двух системах координат — x_1^1, x_2^1 и x_1^2, x_2^2 соответственно

$$\varphi_1\left(x_1^1,x_2^1\right)=F^{-1}\left(x_1^1,x_2^1\right)\times$$
$$\times K_1^{-1}\left\{\int\limits_{-a}^{a}\Big[-A_{22}\left(\varphi'_{12}-i\alpha_2^1\varphi_1\right)\times\right.$$
$$\times\exp\left(i\alpha_1^1\eta_1^1\right)d\eta_1^1-$$
$$-A_{22}\left(\varphi'_{32}+i\alpha_2^1\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp\Big[-i\left(2\alpha_2^1b+\alpha_1^1x_1^3\right)\Big]dx_1^3\Big]-$$
$$-\int\limits_{-b}^{b}\Big[A_{11}\left(\varphi'_{22}+i\alpha_1^1\varphi_2\right)\times$$
$$\times\exp\Big[-i\left(\alpha_2^1b-\alpha_2^1x_1^2+\alpha_1^1a\right)\Big]dx_1^2-$$
$$-A_{11}\left(\varphi'_{42}-i\alpha_1^1\varphi_4\right)\times$$
$$\left.\times\exp\Big[-i\left(\alpha_2^1b+\alpha_2^1x_1^4-\alpha_1^1a\right)\Big]dx_1^4\Big]\right\},$$

$$\varphi_2\left(x_1^2,x_2^2\right)=F^{-1}\left(x_1^2,x_2^2\right)\times$$
$$\times K_2^{-1}\left\{\int\limits_{-b}^{b}\Big[-A_{11}\left(\varphi'_{22}-i\alpha_2^2\varphi_2\right)\exp\left(i\alpha_1^2\eta_1^2\right)d\eta_1^2-\right.$$
$$-A_{11}\left(\varphi'_{42}+i\alpha_2^2\varphi_4\right)\exp\Big[-i\left(2\alpha_2^2a+\alpha_1^2x_1^4\right)\Big]dx_1^4\Big]+$$

$$+\int\limits_{-a}^{a}\Big[A_{22}\left(-\varphi'_{12}+i\alpha_1^2\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp\Big[-i\left(\alpha_2^2a-\alpha_1^2b+\alpha_2^2x_1^1\right)\Big]dx_1^1-$$
$$-A_{22}\left(\varphi'_{32}+i\alpha_1^2\varphi_3\right)\times$$
$$\left.\times\exp\Big[-i\left(\alpha_2^2a+\alpha_1^2b-\alpha_2^2x_3^2\right)\Big]dx_1^3\Big]\right\},$$

$$K_1\left(\alpha_1^m,\alpha_2^m\right)=A_{11}\left(\alpha_1^m\right)^2+A_{22}\left(\alpha_2^m\right)^2-A,$$
$$m=1,3,$$
$$K_2\left(\alpha_1^n,\alpha_1^n\right)=A_{22}\left(\alpha_1^n\right)^2+A_{11}\left(\alpha_2^n\right)^2-A,$$
$$n=2,4,$$
$$\alpha_{2\pm}^m\left(\alpha_1^m\right)=\pm i\sqrt{A_{22}^{-1}(A_{11}\left(\alpha_1^m\right)^2-A)},$$
$$m=1,3,$$
$$\alpha_{2\pm}^n\left(\alpha_1^n\right)=\pm i\sqrt{A_{11}^{-1}(A_{22}\left(\alpha_1^n\right)^2-A)},$$
$$n=2,4.$$

Здесь приняты следующие обозначения: в производной φ'_{kn} и функции φ_k первый индекс обозначает номер системы координат, в которой рассматривается функция, второй —

координату, по которой осуществляется дифференцирование. Разумеется, при использовании формул перехода от одной системы координат к другой получаем одну и ту же функцию $\varphi(x_1, x_2)$.

Из интегрального представления решений видно, что оно доступно для аналитического исследования в любой из введенных локальных систем координат. Соотношения сопряжения блочных элементов для систем дифференциальных уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние упругих тел произвольной формы, демонстрируются в работе [9].

Литература

1. *Садовский М. А., Красный Л. И.* Блоковая тектоника литосферы // ДАН СССР. 1986. Т. 287. №6. С. 1451–1454.
2. *Садовский М. А.* Естественная кусковатость горной породы // ДАН СССР. 1979. Т. 247. №4. С. 829–831.
3. *Садовский М. А.* О распределении размеров твердых отдельностей // ДАН СССР. 1983. Т. 269. №1. С. 69–72.
4. *Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф.* Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. М.: Наука, 1987. 104 с.
5. *Бреховских Л. М., Годин О. А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 412 с.
6. *Петрашень Г. И.* Распространение упругих волн в слоисто- изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями. Л.: «Учен. зап. ЛГУ». 1952, №162. Вып. 26. С. 3–189.
7. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и наноструктурах // ДАН. Т. 415. №5. 2007. С. 596–599.
8. *Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А.* О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. Т. 418. №3. 2008. С. 321–323.
9. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Павлова А. В.* Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. Т. 424. №1. 2009. С. 36–39.
10. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. №2. С. 168–172.
11. *Евдокимова О. В.* Дифференциальный метод факторизации в неоднородных и нестационарных задачах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. №2. С. 51–55.
12. *Евдокимова О. В.* Дифференциальный метод факторизации в механике разрушения, материаловедении и сейсмологии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №4. С. 32–42.
13. *Евдокимова О. В.* О факторизации матриц-функций, возникающих в проблеме прочности материалов сложного строения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. №2. С. 8–11.
14. *Евдокимова О. В., Бабешко В. А., Федоренко А. Г., Бабешко О. М.* О дифференциальном методе факторизации в сложных макро-, микро- и наноструктурах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. №1. С. 24–29.
15. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. №4. С. 473–477.
16. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
17. *Деклу Ж.* Метод конечных элементов. М.: Мир, 1976. 96 с.
18. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
19. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Обобщенная факторизация в краевых задачах в многосвязных областях // ДАН. 2003. Т. 392. №2. С. 163–167.
20. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 496 с.
21. *Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 526 с.
22. *Баженов В. Г., Игумнов Л. А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

Ключевые слова: блочная структура, блочный элемент, метод факторизации.

Статья поступила 27 февраля 2009 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., 2009