УДК 533.6

ПОТЕНЦИАЛ ВОЗМУЩЕННЫХ СКОРОСТЕЙ КАК ФУНКЦИЯ СКАЧКА ДАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО КРЫЛА ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Гайденко С. В.[1]

PERTURBED VELOCITY POTENTIAL AS A FUNCTION OF A PRESSURE JUMP IN THE PROBLEM OF NON-STATIONARY STREAMLINE OF A THIN WING BY SUBSONIC FLOW OF COMPRESSIBLE GAS

Gaidenko S. V.

A three-dimensional non-stationary differential problem for perturbed velocity potential is considered. The solution of the differential problem is shown in the integral form of the type of a dipole potential, the density of which is the pressure jump on the wing. The representation of the perturbed velocity potential allows us to calculate its normal derivative, which within the wing limit reduces to an integral equation of the second type.

Keywords: thin wing, subsonic flow, compressible gas, pressure jump, perturbed velocity potential, dipole potential.

Тонкое крыло в нестационарном потоке газа создает в окружающей среде поле возмущенных скоростей, потенциал которого может быть представлен системой источников или системой диполей. В первом случае плотностью потенциала простого слоя является нормальная составляющая скорости, заданная в плоскости движения крыла. Однако в математической модели обтекания крыла дозвуковым потоком газа нормальная составляющая скорости известна только в точках крыла. Позади крыла на вихревой пелене задано условие непрерывности давления, содержащее производную потенциала вдоль потока. На остальной части плоскости задано однородное условие Дирихле. Тем самым, плотность потенциала простого слоя вне крыла может быть найдена посредством решения двумерных интегральных уравнений в расширяющихся с течением времени областях сложной конфигурации. Для плоскопараллельного обтекания крыльевого профиля анализ этих областей приведен в [1]. В случае пространственного обтекания в [1, 2] рассматривается крыло со сверхзвуковыми кромками, то есть когда на контуре крыла выполнены условия, обеспечивающие в точках крыла и над ним известные значения плотности потенциала простого слоя в областях интегрирования. В [2] построена дискретная модель расчета напряженности присоединенных вихрей для крыла произвольной формы в плане при дозвуковом обтекании. Здесь крыло разбито на четырехугольные ячейки, в каждой из которых потенциал возмущенных скоростей представлен в форме потенциала двойного слоя с постоянной плотностью. Если в этой модели формально перейти к пределу, устремив к нулю параметры разбиения, то в пределе получится трехмерное интегральное уравнение первого рода, ядро которого имеет в плоскости крыла неинтегрируемую особенность. Это так называемое гиперсингулярное уравнение.

В [3] описано применение потенциала двойного слоя в краевых задачах для уравнения Гельмгольца с граничными условиями Неймана. Здесь формальный переход к пределу в граничных условиях приводит к гиперсингулярному уравнению. Численным методам решения таких уравнений посвящена монография [4].

В настоящей работе рассматривается дифференциальная задача для потенциала возмущенных скоростей, вызванных дозвуковым потоком сжимаемого газа, обтекающего тонкое крыло произвольной в плане формы. Решение дифференциальной задачи строится в интегральной форме типа по-

[1]Гайденко Станислав Викторович, канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: SVGaidenko@mail.ru

тенциала двойного слоя, плотностью которого является скачок давления на крыле. По постановке задачи этот скачок в каждый момент времени — финитная функция, сосредоточенная на крыле. Через нее выражаются все аэродинамические характеристики. Сам скачок давления в дальнейшем может быть определен из заданного на крыле условия Неймана. Полученные в настоящей работе представления потенциала возмущенных скоростей позволяют вычислить его нормальную производную, которая в пределе на крыле приводит к интегральному уравнению второго рода с регулярным интегральным оператором. Здесь решение интегрального уравнения в вершине характеристического конуса представлено через его интегральные средние значения по концентрическим окружностям внутри и на границе конуса в предыдущие моменты времени. Разностная аппроксимация этого интегрального уравнения представляет собой явный численный метод, что при переходе на очередной временной слой не требует решения системы линейных уравнений большой размерности с заполненной матрицей.

1. Постановка задачи

Рассматривается тонкое слабоизогнутое жесткое крыло конечного размаха, движущееся с постоянной дозвуковой скоростью V в потоке сжимаемой идеальной жидкости на расстоянии h от горизонтальной твердой поверхности и совершающее малые колебания около некоторого среднего положения. Возмущенное течение жидкости безвихревое.

Пусть начало прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ находится на крыле, ось Ox_1 направлена противоположно поступательному движению крыла, ось Ox_2 — по размаху крыла, ось Ox_3 — вертикально вверх. Пусть D — проекция крыла на плоскость Ox_1x_2, W — проекция на эту плоскость вихревой пелены за крылом. Закон деформации крыла как твердого тела считаем заданным уравнением $x_3 = f(x_1, x_2, t)$, где t — время. В силу тонкости и слабой изогнутости крыла граничные условия на крыле и вихревой пелене можно снести на их проекции. В рамках линейной по возмущениям теории математическая модель представляет собой следующую дифференциальную задачу для потенциала возмущенных скоростей $\varphi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Волновое уравнение в подвижной системе координат

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} - \frac{2M}{C}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x_1} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

выполняется при $t > 0$ в полупространстве $x_3 > -h$ всюду, за исключением ограниченной области D и полосы W, расположенных в плоскости $x_3 = 0$. Здесь C — скорость звука, $M = \frac{V}{C}$ — число Маха, $M < 1$.

На самом крыле задано условие непротекания, которое в линеаризованной форме имеет вид граничного условия

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x_1, x_2, t) + V\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2) \in D. \quad (1.2)$$

Позади крыла на вихревой пелене $(x_1, x_2) \in W$ выполняется условие непрерывности давления

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2, +0, t) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2, -0, t). \quad (1.3)$$

Здесь же при переходе через вихревую пелену нормальная составляющая возмущенной скорости $\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ предполагается непрерывной, но сам потенциал φ на крыле и вихревой пелене терпит разрыв. Кроме того, по условию Чаплыгина–Жуковского верхняя и нижняя струи газа подходят к задней кромке крыла с одинаковыми скоростями, что трактуется как условие непрерывности давления при переходе через кромку крыла, то есть равенство (1.3) выполняется также на задней кромке крыла, которой в проекции на плоскость $x_3 = 0$ соответствует общая часть границы множеств D и W.

На твердой границе также задано условие непротекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}(x_1, x_2, -h, t) = 0, \quad (x_1, x_2) \in R_2. \quad (1.4)$$

Начальные условия предполагаются нулевыми

$$\varphi(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (1.5)$$

для тех точек $\mathbf{x}$, в которых при $t > 0$ задано уравнение (1.1).

Кроме того, будем предполагать, что интересующее нас решение $\varphi(\mathbf{x}, t)$ дифференциальной задачи вместе с производными, задействованными в уравнении (1.1), допускает преобразование Лапласа, то есть модули этих функций оцениваются произведениями вида $G(\mathbf{x})e^{C_0 t}$ с некоторой общей положительной постоянной C_0. При этом полагаем, что множители $G(\mathbf{x})$ в оценке $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и ее первых производных стремятся к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$, а также считаем во всех случаях, что эти множители интегрируемы в R_3.

Основная цель настоящей работы — получить представление потенциала возмущенных скоростей через скачок давления на крыле

$$\gamma(t, x_1, x_2) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)(t, x_1, x_2, +0) - \\ - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)(t, x_1, x_2, -0).$$

По постановке задачи эта функция вне ограниченного множества D равна нулю.

2. Краевая задача для уравнения Гельмгольца

Пусть $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\varphi(\mathbf{x}, t)dt$ — преобразование Лапласа функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$, где комплексный параметр p имеет положительную вещественную часть: $\mathrm{Re}\, p \geqslant C_0 > 0$. Применим преобразование Лапласа к задаче (1.1)–(1.4) с учетом нулевых начальных условий (1.5). Преобразованное дифференциальное уравнение приводится к уравнению Гельмгольца линейной заменой независимых переменных

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = \sqrt{1 - M^2}x_2,$$
$$x_3' = \sqrt{1 - M^2}x_3$$

и представлением комплекснозначной функции $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, p)$ в виде $\Phi(\mathbf{x}', p)\, e^{\nu x_1}$, где $\nu = pMn$, $n = \frac{1}{C(1-M^2)}$,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3'^2} + \kappa^2\Phi = 0, \quad \kappa = ipn.$$

Уравнение Гельмгольца задано в полупространстве $x_3' > -H = -h\sqrt{1 - M^2}$ всюду, кроме множества $D' \cup W'$ в плоскости $x_3' = 0$. Здесь штрихами отмечены образы соответствующих множеств при линейном преобразовании.

Условие непрерывности давления позади крыла в новых переменных имеет вид $\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + pm\Phi\right] = 0$ при $(x_1, x_2') \in W'$. Здесь квадратные скобки обозначают скачок функции при $x_3 = 0$, то есть разность предельных значений при $x_3 \to +0$ и $x_3 \to -0$, а постоянная $m = \frac{n}{M} > n$.

Скачок давления на крыле $\gamma(x_1, x_2, t)$ после преобразования Лапласа в новых координатах представлен в виде $\Gamma(x_1, x_2', p)\, e^{\nu x_1} V$, $(x_1, x_2') \in D'$. Учитывая, что вне крыла давление непрерывно, считаем функцию $\Gamma(x_1, x_2', p) = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + pm\Phi\right]$ финитной в плоскости (x_1, x_2') с носителем на $\bar{D}'$ и равной нулю на общей части границ D' и W'.

Свяжем с потенциалом возмущенных скоростей $\varphi(\mathbf{x}, t)$ функцию

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},$$

которая в неподвижной системе координат (ξ_1, x_2, x_3, t), $\xi_1 = x_1 - Vt$, совпадает с производной по времени потенциала возмущенных скоростей

$$\theta(\xi_1 + Vt, x_2, x_3, t) = \frac{d}{dt}\left(\varphi(\xi_1 + Vt, x_2, x_3, t)\right).$$

Эту функцию называют потенциалом ускорений. Отметим, что дифференциальный оператор, задающий функцию $\theta(\mathbf{x}, t)$, однозначно обратим с учетом начального условия $\varphi(\mathbf{x}, 0) = 0$. Обратный оператор в подвижной системе координат

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int\limits_0^t \theta(x_1 - V(t - \tau), x_2, x_3, \tau)d\tau = \\ = \frac{1}{V}\int\limits_{x_1 - Vt}^{x_1} \theta\left(\xi_1, x_2, x_3, t + \frac{\xi_1 - x_1}{V}\right)d\xi_1.$$

Поскольку функция $\varphi(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет однородному уравнению (1.1), то ее производные также ему удовлетворяют. Значит, потенциал ускорений $\theta(\mathbf{x}, t)$ является решением этого уравнения. Верно и обратное утверждение для функции φ, определяемой последними равенствами.

Проведем для потенциала ускорений те же преобразования, что и для потенциала скоростей. После преобразования Лапласа потенциал ускорений перейдет в $\tilde{\theta}(\mathbf{x}, p)$, а в новых координатах функция

$\Theta(\mathbf{x}', p) = \frac{1}{V} e^{-\nu x_1} \tilde{\theta}(\mathbf{x}, p)$ будет связана с $\Phi(\mathbf{x}', p)$ равенством

$$\Theta(\mathbf{x}', p) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(\mathbf{x}', p) + pm\Phi(\mathbf{x}', p)$$

всюду, где поставлена задача для $\Phi(\mathbf{x}', p)$. В частности, скачок функции $\Theta(\mathbf{x}', p)$ при переходе через плоскость $x_3' = 0$ совпадет с финитной функцией $\Gamma(x_1, x_2', p)$. Полагая эту функцию известной, поставим для $\Theta(\mathbf{x}', p)$ дифференциальную задачу

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_3'^2} + \kappa^2 \Theta = 0 \qquad (2.1)$$

при $(x_1, x_2') \in R_2$, $x_3' \in (-H; 0) \cup (0; \infty)$,

$$\Theta(x_1, x_2', +0, p) - \Theta(x_1, x_2', -0, p) = \Gamma(x_1, x_2', p), \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_3'}(x_1, x_2', -H, p) = 0. \qquad (2.3)$$

Граничные условия заданы для всех точек (x_1, x_2') плоскости R_2, кроме, возможно, границы области D' в условии (2.2).

Поскольку интересующее нас решение $\Theta(\mathbf{x}', p)$ уравнения Гельмгольца терпит разрыв в плоскости $x_3' = 0$, то естественно искать это решение в форме потенциала двойного слоя, плотностью которого является скачок решения.

Как известно, в пространстве R_3 существуют два фундаментальных решения уравнения Гельмгольца. В наших обозначения это — $\frac{e^{\pm i\kappa|\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}'|}$. Напомним, что $\kappa = ipn$, $n > 0$, $\mathrm{Re}\, p \geqslant C_0 > 0$, и поскольку нас интересуют исчезающие на бесконечности решения, то выберем $-\frac{e^{-pn|\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}'|}$. Рассмотрим при $x_3' \neq 0$ потенциал двойного слоя

$$W(\mathbf{x}', p) = \iint\limits_{R_2} \Gamma(y_1, y_2', p) P(\mathbf{x}', y_1, y_2')\, dy_1 dy_2',$$

где

$$P(\mathbf{x}', y_1, y_2') = \frac{\partial}{\partial y_3'} \left(\frac{e^{-pn|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|}}{4\pi|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|} \right)_{|y_3'=0} = \frac{e^{-pn|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|}}{4\pi} \left(\frac{pnx_3'}{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|^2} + \frac{x_3'}{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|^3} \right)_{|y_3'=0}.$$

Свойства потенциала двойного слоя хорошо известны: при $x_3' \neq 0$ он удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и в точках непрерывности плотности имеет предельные значения при $x_3 \to \pm 0$, равные соответственно $\pm\frac{1}{2}\Gamma(x_1, x_2', p)$, то есть скачок его при переходе через плоскость $x_3' = 0$ равен плотности.

Решение задачи (2.1)–(2.3) можно получить с помощью потенциала двойного слоя

$$\Theta(\mathbf{x}', p) = W(\mathbf{x}, p) - W(x_1, x_2', x_3' + 2H, p).$$

Второе слагаемое непрерывно при $x_3' > -2H$, поэтому скачок $\Theta(\mathbf{x}', p)$ при $x_3' = 0$ совпадает со скачком первого слагаемого. Выполнение граничного условия (2.3) следует из нечетности по x_3' ядра, а значит, и самого потенциала двойного слоя, что влечет четность производной этой функции по x_3'.

Вернемся к прежним координатам

$$x_2 = \frac{x_2'}{\sqrt{1-M^2}}, \quad x_3 = \frac{x_3'}{\sqrt{1-M^2}}$$

и функциям

$$\tilde{\theta}(\mathbf{x}, p) = V e^{\nu x_1} \Theta(\mathbf{x}', p),$$

$$\tilde{\gamma}(y_1, y_2, p) = V e^{\nu y_1} \Gamma(y_1, y_2', p),$$

$$\tilde{\theta}(\mathbf{x}, p) = \tilde{w}(\mathbf{x}, p) - \tilde{w}(x_1, x_2, x_3 + 2h, p),$$

где

$$\tilde{w}(\mathbf{x}, p) = \iint\limits_{D} \tilde{\gamma}(y_1, y_2, p) \tilde{P}(\mathbf{x}, y_1, y_2, p)\, dy_1 dy_2,$$

$$\tilde{P}(\mathbf{x}, y_1, y_2, p) = x_3 \frac{1-M^2}{4\pi} e^{-pn(r + M(y_1 - x_1))} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{pn}{r^2} \right),$$

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (1-M^2)\left((x_2 - y_2)^2 + x_3^2\right)}.$$

С учетом формулы обращения

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{V} \int\limits_{-\infty}^{x_1} e^{-p\frac{x_1 - \xi_1}{V}} \tilde{\theta}(\xi_1, x_2, x_3, p)\, d\xi_1.$$

Подставив в это равенство функцию $\tilde{\theta}$ в виде разности потенциалов двойного слоя, получим

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, p) = \tilde{\varphi}_0(\mathbf{x}, p) - \tilde{\varphi}_h(\mathbf{x}, p),$$

где

$$\tilde{\varphi}_0(\mathbf{x},p)=\frac{1}{V}\int\limits_{-\infty}^{x_1}e^{-p\frac{x_1-\xi_1}{V}}\tilde{w}(\xi_1,x_2,x_3,p)d\xi_1,$$

$$\tilde{\varphi}_h(\mathbf{x},p)=\tilde{\varphi}_0(x_1,x_2,x_3+2h,p).$$

3. Интегральные представления потенциала возмущенных скоростей

Исследуем функцию $\tilde{\varphi}_0(\mathbf{x},p)$, соответствующую потенциалу возмущенных скоростей безграничного потока. С учетом нечетности этой функции по x_3 далее для определенности будем рассматривать $x_3>0$.

Для обращения преобразования Лапласа в равенстве

$$\tilde{\varphi}_0(\mathbf{x},p)=$$
$$=\frac{x_3\left(1-M^2\right)}{4\pi V}\int\limits_{-\infty}^{x_1}e^{-p\frac{x_1-\xi_1}{V}}\iint\limits_{R_2}\tilde{\gamma}(y_1,y_2,p)\times$$
$$\times e^{-pn(r+M(y_1-\xi_1))}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{pn}{r^2}\right)dy_1dy_2d\xi_1$$

поменяем порядок интегрирования, а затем вместо переменной ξ_1 введем новую переменную

$$t=\frac{x_1-\xi_1}{V}+n\left(r+M\left(y_1-\xi_1\right)\right),$$

где

$$r=\sqrt{\left(\xi_1-y_1\right)^2+(1-M^2)\left(\left(x_2-y_2\right)^2+x_3^2\right)}.$$

Функция $t(\xi_1)$ монотонна, так как

$$\frac{dt}{d\xi_1}=-\frac{1}{V}+n\left(\frac{\xi_1-y_1}{r}-M\right)<0.$$

Обратная функция

$$\xi_1(t)=x_1-tV+MR(\mathbf{x},\mathbf{y},t),$$

где

$$R(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=$$
$$=\sqrt{\left(tV-(x_1-y_1)\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2+x_3^2}.$$

Функция r в новых переменных имеет вид

$$r(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=R(\mathbf{x},\mathbf{y},t)-M\left(tV-(x_1-y_1)\right)\geqslant 0.$$

Крайнему значению $\xi_1=x_1$ соответствует минимальное значение t

$$t_0=n\left(r(\mathbf{x},\mathbf{y})+M\left(y_1-x_1\right)\right)$$

— время, за которое в точку $\mathbf{x}\in R_3$ приходит возмущение, возникшее в точке $(y_1,y_2,0)$. Здесь

$$r(\mathbf{x},\mathbf{y})=$$
$$=\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+(1-M^2)\left(\left(x_2-y_2\right)^2+x_3^2\right)}.$$

Поскольку $\xi_1(t_0)=x_1$, то из определения функции $\xi_1(t)$ следует равенство $MR(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0)=t_0V$, то есть $R(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0)=Ct_0$. Отметим, что величина t_0 является функцией разности $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ при нулевом значении y_3 так же, как $R(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ и $r(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$.

Из определения $\xi_1(t)$ вычисляется производная $\frac{d\xi_1}{dt}=-V\frac{r(\mathbf{x},\mathbf{y},t)}{R(\mathbf{x},\mathbf{y},t)}$. В результате преобразований получаем представление

$$\tilde{\varphi}_0(\mathbf{x},p)=\frac{x_3\left(1-M^2\right)}{4\pi}\times$$
$$\times\iint\limits_{R_2}\tilde{\gamma}(y_1,y_2,p)\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-pt}\left(\frac{1}{Rr^2}+\frac{pn}{Rr}\right)dtdy_1dy_2.$$

Для обращения преобразования Лапласа воспользуемся его свойствами: произведению пары изображений соответствует свертка оригиналов, а произведению изображений вида

$$p\tilde{\gamma}(p)\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-pt}f(t)dt$$

соответствует функция-оригинал

$$f(t_0)\gamma(t-t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}f'(\tau)\gamma(t-\tau)d\tau,$$

заданная так при $t\geqslant t_0$ и равная нулю при $t<t_0$. Отсюда получаем следующее представление потенциала возмущенных скоро-

стей безграничного потока

$$\varphi_0(\mathbf{x},t) = \frac{x_3\left(1-M^2\right)}{4\pi}\iint\limits_{R^2} \times$$

$$\times\left[\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\gamma(y_1,y_2,t-\tau)}{Rr^2}d\tau + \frac{n\gamma(y_1,y_2,t-t_0)}{R(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0)\, r(x,y,t_0)} + \right.$$

$$\left. + n\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(y_1,y_2,t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{Rr}\right)d\tau\right]dy_1dy_2.$$

После вычисления производной в последнем слагаемом

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{R(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)\cdot r(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)}\right) = -\frac{1}{nRr^2} + \frac{C}{R^3}$$

первый интеграл в представлении $\varphi_0(\mathbf{x},t)$ сократится

$$\varphi_0(\mathbf{x},t) =$$
$$= \frac{x_3}{4\pi C}\iint\limits_{K(\mathbf{x},t)} \frac{\gamma(y_1,y_2,t-t_0)}{R(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0)\cdot r(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0)}dy_1dy_2 +$$
$$+ \frac{x_3}{4\pi}\iint\limits_{K(\mathbf{x},t)}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\gamma(y_1,y_2,t-\tau)}{R^3(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)}d\tau dy_1dy_2. \quad (3.1)$$

Здесь область интегрирования $K(\mathbf{x},t)$ состоит из тех точек плоскости (y_1,y_2), которые удовлетворяют неравенству $t_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant t$ при фиксированных значениях t и $\mathbf{x}$. Несложно показать, что это неравенство равносильно

$$(tV-(x_1-y_1))^2 + (x_2-y_2)^2 \leqslant t^2C^2 - x_3^2,$$

то есть $K(\mathbf{x},t)$ — круг с центром $y_1 = x_1 - tV$, $y_2 = x_2$ радиуса $\sqrt{(tC)^2 - x_3^2}$ при $t > \frac{x_3}{C}$. Отметим, что этот же круг задается неравенством $R(\mathbf{x},\mathbf{y},t) \leqslant tC$.

Наименьшее значение функции $t_0(\mathbf{x},\mathbf{y})$ при фиксированных значениях $\mathbf{x}$ и t достигается при $y_1 = x_1 - Mx_3$, $y_2 = x_2$. Это минимальное значение обозначим $\tau_0 = nx_3\left(1-M^2\right) = \frac{x_3}{C}$.

Во втором слагаемом представления (3.1) функции $\varphi_0(\mathbf{x},t)$ область интегрирования в трехмерном пространстве (y_1,y_2,τ) без учета финитности функции $\gamma(y_1,y_2,t-\tau)$ представляет собой гиперболоид — расширяющееся кверху выпуклое вниз множество с нижней точкой $y_1 = x_1 - Mx_3$, $y_2 = x_2$, $\tau = \tau_0$, а сечения этого гиперболоида плоскостями $\tau = const$ являются кругами $K(\mathbf{x},\tau)$, центры которых с увеличением τ смещаются влево со скоростью V. В пределе при $x_3 \to 0$ гиперболоид превратится в обычный косой конус. Во внутреннем интеграле нижний предел интегрирования по τ определяется значением функции $t_0(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в данной точке $(y_1,y_2) \in K(\mathbf{x},t)$, то есть интеграл по τ берется по отрезку прямой, проходящей через точку (y_1,y_2) параллельно оси τ, а интегрирование ведется от точки пересечения этой прямой с боковой поверхностью гиперболоида до его верхнего основания, которое в плоскости $\tau = t$ является кругом $K(\mathbf{x},t)$.

Поменяем порядок интегрирования, взяв теперь внешний интеграл по τ вдоль высоты гиперболоида от τ_0 до t, а внутренний интеграл по кругу $K(\mathbf{x},\tau)$ при каждом $\tau \in (\tau_0,t]$. Но сначала упростим первый интеграл в (3.1), для чего представим область интегрирования $K(\mathbf{x},t)$ объединением по $\tau \in (\tau_0,t]$ окружностей, ограничивающих круги $K(\mathbf{x},\tau)$. Каждую окружность зададим угловым параметром $\alpha \in [0,2\pi)$: $y_1 = x_1 - \tau V + \sqrt{(C\tau)^2 - x_3^2}\cos\alpha$, $y_2 = x_2 + \sqrt{(C\tau)^2 - x_3^2}\sin\alpha$. Напомним, что при фиксированном значении τ такая окружность задается равенством $t_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tau$, а значит, во всех точках окружности $R(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0(\mathbf{x},\mathbf{y})) = C\tau$. Соответственно на этой окружности $r(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0(\mathbf{x},\mathbf{y})) = C\tau - M\sqrt{(C\tau)^2 - x_3^2}\cos\alpha$.

Якобиан перехода от координат (y_1,y_2) к координатам (τ,α) имеет вид $C^2\tau - V\sqrt{(C\tau)^2 - x_3^2}\cos\alpha$,

$$\frac{x_3}{4\pi C}\int\limits_{\tau_0}^{t}\int\limits_{0}^{2\pi}\gamma(t-\tau,y_1,y_2)\frac{1}{\tau}\, d\alpha d\tau.$$

Здесь для краткости сохраним обозначения аргументов y_1, y_2, имея в виду их представления через τ и α.

Обратимся теперь ко второму интегралу в (3.1). После изменения порядка интегрирования введем в каждом круге $K(\mathbf{x},\tau)$ полярные координаты $y_1 = x_1 - \tau V + \rho\cos\alpha$, $y_2 = x_2 + \rho\sin\alpha$, $\alpha \in [0,2\pi)$, $\rho \in \left[0,\sqrt{(C\tau)^2 - x_3^2}\right]$. Якобиан такой замены, как известно, есть ρ. В полярных координатах функция $R(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau) = \sqrt{\rho^2 + x_3^2}$. Второе слагаемое в

(3.1) принимает вид

$$\frac{x_3}{4\pi}\int\limits_{\tau_0}^{t}\int\limits_{0}^{\sqrt{(C\tau)^2-x_3^2}}\int\limits_{0}^{2\pi}\gamma\frac{\rho}{\left(\rho^2+x_3^2\right)^{3/2}}d\alpha d\rho d\tau.$$

Как видно, зависимость от α есть только в функции $\gamma\left(y_1,y_2,t-\tau\right)$. Введем обозначение для среднего значения этой функции по окружности радиуса ρ с центром $\left(y_1^0,y_2^0\right)$ в момент τ

$$S_\rho\left[\gamma\right]\left(y_1^0,y_2^0,\tau\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\gamma\left(y_1^0+\rho\cos\alpha,y_2^0+\rho\sin\alpha,\tau\right)d\alpha.$$

В новых обозначениях представление потенциала возмущенных скоростей безграничного потока следующее

$$\varphi_0\left(\mathbf{x},t\right)=\frac{x_3}{2C}\int\limits_{\tau_0}^{t}\frac{1}{\tau}S_{\sqrt{(C\tau)^2-x_3^2}}\left[\gamma\right]d\tau+$$
$$+\frac{x_3}{2}\int\limits_{\tau_0}^{t}\int\limits_{0}^{\sqrt{(C\tau)^2-x_3^2}}S_\rho\left[\gamma\right]\frac{\rho}{\left(\rho^2+x_3^2\right)^{3/2}}d\rho d\tau. \tag{3.2}$$

Здесь в обоих интегралах аргументы усреднений $\left(x_1-V\tau,x_2,t-\tau\right)$.

В частном случае крыла бесконечного размаха последнее представление совпадает с приведенным в работе [5], где для его вывода использовался метод, основанный на преобразованиях Лапласа по времени и Фурье по пространственной переменной вдоль потока.

4. Предельные значения нормальной производной потенциала возмущенных скоростей

Для определения функции γ надо использовать условие непротекания (1.2), которое задано для производной по x_3 потенциала скоростей при $x_3=0$. Это условие не предполагает дифференцируемость по нормали потенциала скоростей на крыле. Оно понимается как предел при $x_3\to\pm0$ соответствующей производной.

Для существования и явного представления этого предела необходима гладкость искомой функции $\gamma\left(x_1,x_2,\tau\right)$. Именно, предполагаем, что эта функция дважды непрерывно дифференцируема по совокупности своих аргументов во всех внутренних точках области D, имеет вместе с обеими производными по времени интегрируемую в D мажоранту, которая монотонна по x_1 в окрестности передней кромки. Обе производные по x_2 считаем локально ограниченными вблизи передней кромки.

Приведем предельные значения нормальной производной потенциала возмущенных скоростей для безграничного потока [6].

Для произвольной внутренней точки $\left(x_1,x_2\right)$ области D обозначим через $\tau_1\left(x_1,x_2\right)$ момент времени, когда точка $\left(x_1-V\tau,x_2\right)$ достигает передней кромки крыла. Тогда для любого момента $t<\tau_1\left(x_1,x_2\right)$ справедливо равенство

$$\lim_{x_3\to0}\frac{\partial\varphi_0\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial x_3}=-\frac{1}{2C}\gamma\left(x_1,x_2,t\right)+$$
$$+\frac{1}{2C}\int\limits_0^t\frac{1}{\tau}\left(S_{C\tau}\left[\gamma\right]-\gamma\right)d\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{C\tau}\frac{1}{\rho^2}\left(S_\rho\left[\gamma\right]-\gamma\right)d\rho d\tau.$$

Здесь аргументы функции γ и ее усреднения $S_\rho[\gamma]$ в обоих слагаемых одинаковы: $\left(x_1-V\tau,x_2,t-\tau\right)$, а подынтегральные функции особенностей не имеют, так как локально во внутренних точках $S_\rho[\gamma]-\gamma=O\left(\rho^2\right)$.

Поскольку для каждой внутренней точки крыла $\left(x_1,x_2\right)$ момент τ_1 выхода $\left(x_1-V\tau,x_2\right)$ на переднюю кромку зависит от близости этой точки к передней кромке, то вблизи кромки полученное представление предела справедливо для значений t, близких к нулю. Приведем иное представление предела, справедливое для любого момента времени $t>0$,

$$-\frac{1}{2C}\gamma\left(x_1,x_2,t\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\lim_{\delta\to0}\int\limits_{\delta/C}^{t}\left\{\frac{1}{C\tau}\left(S_{C\tau}\left[\gamma\right]-S_\delta\left[\gamma\right]\right)+\right.$$
$$\left.+\int\limits_\delta^{C\tau}\frac{1}{\rho^2}\left(S_\rho\left[\gamma\right]-S_\delta\left[\gamma\right]\right)d\rho\right\}d\tau=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial t}\left(x_1,x_2,t\right)+V\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1,x_2,t\right).$$

Здесь аргументы всех усреднений под интегралами те же, что и выше, а предел при

$\delta \to 0$ существует в силу наложенных на функцию γ предположений.

В задаче с экраном в интегральном уравнении должна быть учтена производная функции $\varphi_0(\mathbf{x}, t)$ при $x_3 = 2h$, которая влияет на решение этого уравнения при $t > \frac{2h}{C}$.

Литература

1. *Красильщикова Е. А.* Тонкое крыло в сжимаемом потоке. М.: Наука, 1986. 286 с.
2. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
3. *Лифанов И. К., Ставцев С. Л.* Интегральные уравнения и распространение звука в мелком море // Дифференциальные уравнения. Т. 40. № 9. 2004. С. 1256–1270.
4. *Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001. 507 с.
5. *Гайденко С. В.* Нестационарное обтекание тонкого профиля дозвуковым потоком сжимаемого газа вблизи твердой границы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 4. С. 35–42.
6. *Гайденко С. В.* Нестационарное обтекание тонкого крыла конечного размаха дозвуковым потоком газа вблизи твердой границы / Кубанский гос. университет. Краснодар, 2006. 29 с. Деп. в ВИНИТИ 13.06.06, № 783-В2006.

Ключевые слова: тонкое крыло, дозвуковой поток, сжимаемый газ, скачок давления, потенциал возмущенных скоростей, потенциал двойного слоя.

Статья поступила 16 марта 2009 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар