

УДК 532.5+533.6

ОБРАТНЫЕ ВОЛНЫ В ГИДРОДИНАМИКЕ И АЭРОДИНАМИКЕ

Ефремов И. И.¹

REVERSE WAVES IN HYDRODYNAMICS AND AERODYNAMICS

Efremov I. I.

The work considers two examples of the existence of reverse waves at the flow of a pulsating source by heavy fluid of infinite depth or by compressible flow of finite depth. The analysis of the fact of reverse waves occurrence is conducted using dispersive curves of dependence of wave numbers on frequency.

Keywords: pulsate source, heavy fluid, compressible flow, dispersive curves, reverse waves.

Проблеме обратных волн в различных областях физики в последние 50 лет уделяется достаточно большое внимание. Обзор значительной части работ по этой тематике приведен в [1].

Наибольшее внимание в [1] уделено явлениям обратных волн в радиоэлектронике, где обратные волны конструктивно используются на уровне реальных технических разработок. В [2, 3] изучаются обратные волны в упругих слоях. В гидродинамике появление обратной волны впервые фактически отмечено М. Д. Хаскиндом [4] при исследовании поверхностных волн, вызванных движущимся источником, хотя термин «обратные волны» им не используется. Обратные волны возникают также при обтекании тел ограниченным потоком сжимаемой жидкости.

Данная работа посвящена исследованию возможности появления обратных волн в двух вышеупомянутых задачах гидроаэромеханики на основе единого подхода.

1. Обратные волны в гидродинамике поверхностных волн

Рассмотрим волны, возникающие при движении в несжимаемой весоной жидкости с постоянной скоростью V_0 источника, пульсирующего с постоянной частотой ω . Эта задача решена М. Д. Хаскиндом в [4]. Рассмотрим эту задачу отличным от [4] методом. Соответствующая краевая задача имеет вид ($\varphi(x, y)$ — комплексная амплитуда потенциа-

ла скорости)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad y < 0.$$

На свободной поверхности жидкости заданы условия

— постоянства давления

$$-i\omega\varphi - V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varepsilon\varphi + g\eta = 0, \quad y = 0;$$

— свободная поверхность является линией тока

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -i\omega\eta + V_0 \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad y = 0.$$

Здесь $\eta = \eta(x)$ — комплексная амплитуда отклонений свободной поверхности от прямой $y = 0$, $\varepsilon > 0$ — искусственный коэффициент диссипации, который в окончательном решении следует устремить к нулю, g — ускорение силы тяжести.

Стандартными методами, изложенными в [2, 3, 5], с использованием преобразования Фурье можно показать, что потенциал скорости единичного точечного источника в начале координат, пульсирующего на свободной поверхности весоной жидкости и обтекаемого потоком, определяется формулой

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \eta e^{-2h|\alpha|} e^{|\alpha|y - i\alpha x} d\alpha,$$

$$\eta = 1 - \frac{V_0^2 \alpha^2 + (2\omega V_0 + i\varepsilon V_0)\alpha + g|\alpha| + \omega^2 + i\varepsilon\omega}{V_0^2 \alpha^2 + (2\omega V_0 + i\varepsilon V_0)\alpha - g|\alpha| + \omega^2 + i\varepsilon\omega}.$$

¹Ефремов Ион Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: i.efremov@math.kubsu.ru

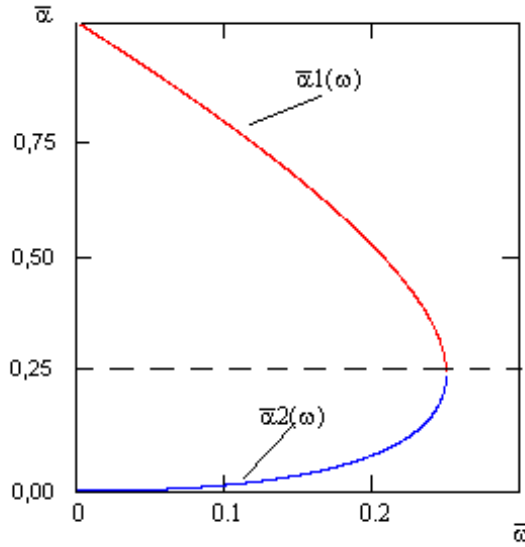


Рис. 1. Дисперсионная кривая поверхностных гравитационных волн при обтекании пульсирующего источника ($\bar{\alpha} = \alpha \frac{V_0^2}{g}$, $\bar{\omega} = \omega \frac{V_0}{g}$)

Здесь Γ_1 — контур вдоль действительной оси комплексной плоскости α , обеспечивающий выполнение принципа предельного поглощения.

Дисперсионное соотношение, определяющее волновую картину, имеет вид

$$V_0^2 \alpha^2 + (2\omega V_0 + i\varepsilon V_0 \mp g)\alpha + \omega^2 + i\varepsilon\omega = 0, \quad (1.1)$$

где α — волновое число.

В случае, когда $\frac{V_0 \omega}{g} < \frac{1}{4}$, уравнение (1.1) имеет 4 корня

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\omega}{V_0} + \frac{g}{2V_0^2} \pm \frac{g}{2V_0^2} s - i\frac{\varepsilon}{2}(1 \pm s^{-1}) + O(\varepsilon^2),$$

$$\alpha_{3,4} = -\frac{\omega}{V_0} - \frac{g}{2V_0^2} \pm \frac{g}{2V_0^2} s_1 - i\frac{\varepsilon}{2}(1 \pm s_1^{-1}) + O(\varepsilon^2),$$

$$s = \sqrt{1 - \frac{4\omega V_0}{g}}, \quad s_1 = \sqrt{1 + \frac{4\omega V_0}{g}}.$$

Анализ поведения корней при положительном $\varepsilon \rightarrow 0$ показывает, что три корня из четырех (кроме α_1) являются регулярными, α_1 — нерегулярный, так как он выходит при $\varepsilon \rightarrow 0$ на положительную действительную полуось снизу, тогда как регулярный полюс α_2 появляется на положительной полуоси сверху. Полюсы α_3 и α_4 — выходят на отрицательную действительную полуось снизу.

На рис. 1 показаны дисперсионные кривые, соответствующие корням α_1 , α_2 . При этом дисперсионная кривая нерегулярного

корня $\alpha_1(\omega)$ имеет отрицательную производную по ω .

Дисперсионные кривые корней α_1 и α_2 смыкаются при $\frac{\omega V_0}{g} = \frac{1}{4}$ и далее при $\frac{1}{4} < \frac{\omega V_0}{g} < \frac{1}{2}$ корни α_1 и α_2 становятся комплексными. При частотах, больших $\frac{g}{2V_0}$, действительные α_1 и α_2 не существуют. Отрицательные корни, которые определяют волны, уходящие вниз по потоку, при всех частотах остаются действительными.

Таким образом, пульсирующий и движущийся источник в коротком диапазоне частот и скоростей $0 < \frac{\omega V_0}{g} < \frac{1}{4}$ создаёт обратные волны — при отрицательной фазовой скорости они уносят энергию с положительной скоростью вниз по потоку.

Заметим, что неподвижный пульсирующий источник не создает обратных волн, а генерирует лишь регулярные волны, расходящиеся от источника со скоростями $c_{\pm} = \pm \frac{g}{\omega}$.

2. Обратные волны в аэроакустике

Рассмотрим далее обтекание пульсирующего источника слоем сжимаемой жидкости толщины H .

Уравнением, которому подчиняется потенциал течения жидкости, является уравнением Гельмгольца в подвижной системе ко-

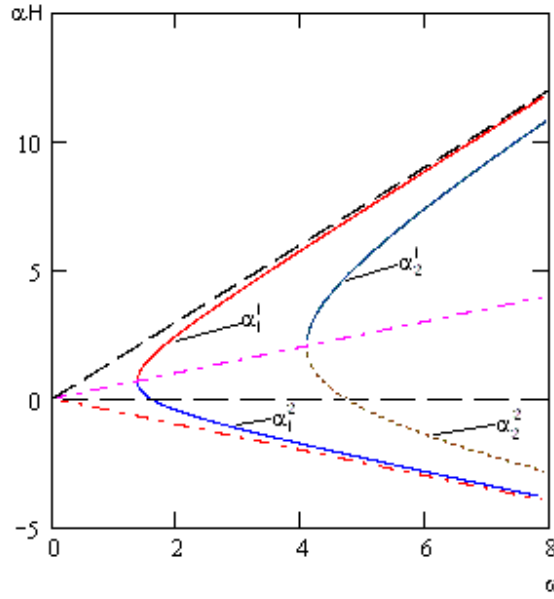


Рис. 2. Дисперсионные кривые, асимптоты и срединная линия для звуковых волн в слое сжимаемой жидкости при обтекании пульсирующего источника

ординат [6]

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2i \frac{M\omega}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0, \quad (2.1)$$

$$-H < y < 0.$$

Здесь c — скорость звука, $M = V_0/c$ — число Маха.

Краевыми условиями будут

- на свободной поверхности $\varphi = 0$, $y = 0$;
- на твердом дне $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, $y = -H$.

Часто при решении задач уравнение (2.1) приводят к классическому уравнению Гельмгольца для приведенного потенциала скорости. Однако при таком преобразовании волновая картина в новых переменных будет искажена по сравнению с исходной физической картиной.

Дисперсионное уравнение будет иметь вид

$$\operatorname{ch} \left(H \sqrt{(1 - M^2) \alpha^2 - 2M \frac{\omega}{c} \alpha - \frac{\omega^2}{c^2}} \right) = 0.$$

Действительные корни, соответствующие распространяющимся волнам, находятся из уравнения

$$(1 - M^2) \alpha^2 - 2M \frac{\omega}{c} \alpha - \frac{\omega^2}{c^2} = - \left(\frac{2n-1}{2H} \pi \right)^2,$$

отсюда

$$\alpha_n = \frac{M \frac{\omega}{c} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2n-1}{2M} \pi \sqrt{1 - M^2} \right)^2}}{1 - M^2}.$$

Приняв ширину канала за единицу длины, для безразмерных величин $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 H$, $\bar{\omega} = \frac{\omega H}{c}$ получим соотношение

$$\bar{\alpha}_1 = M \bar{\omega} \pm \sqrt{\bar{\omega}^2 - \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 - M^2} \right)^2}.$$

Дисперсионная кривая зависимости $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1(\bar{\omega})$ для $M = 0,5$ на рис. 2. представлена двумя ветвями, смыкающимися при $\bar{\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - M^2}$. Восходящая ветвь соответствует регулярным волнам, а нисходящая при $\frac{\pi}{2} \sqrt{1 - M^2} < \bar{\omega} < \frac{\pi}{2}$ имеет отрицательную производную по $\bar{\omega}$ при положительных значениях волнового числа $\bar{\alpha}_1^-(\bar{\omega})$. Указанная ограниченная по безразмерной частоте область соответствует обратным волнам.

Дисперсионные кривые имеют асимптоты

$$\bar{\alpha}_1^\pm = (M \pm 1) \bar{\omega}$$

и ось симметрии.

$$\bar{\alpha}_1 = M \bar{\omega}.$$

Область обратных волн расширяется с ростом числа Маха M и с уменьшением толщины слоя.

При больших номерах мод картина аналогична, диапазон обратных волн при этом расширяется пропорционально $(2n - 1)$.

3. Заключение

В статье рассмотрены задачи об обратных волнах в гидродинамике и аэроакустике. Анализ этих явлений подводит к мысли, что в задачах гидроаэромеханики обратные волны возникают при наличии по крайней мере двух характерных скоростей: скорости основного потока и скорости прогрессивных поверхностных волн $\frac{g}{\omega}$ или скорости звука c .

Принятая в работе методика исследования может быть применена для изучения возможности появления обратных волн в слое несжимаемой жидкости конечной глубины, а также в аэродинамических решетках турбомашин при дозвуковых скоростях.

Литература

1. *Бырдин В. М.* Обратные волны... // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50. №12. С. 1413–1432.
2. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
4. *Хаскинд М. Д.* О волновых движениях тяжелой жидкости // ПММ. 1954. Т. XVIII. Вып. 1. С. 15–26.
5. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Прякина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 247 с.
6. *Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмен Р. Л.* Аэроупругость. М.: Иностранная литература, 1958. 800 с.
7. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.

Ключевые слова: пульсирующий источник, несжимаемая жидкость, сжимаемый поток, дисперсионные кривые, обратные волны.