УДК 539.375:534.1

# ПЬЕЗОАКТИВНЫЕ ВОЛНЫ СДВИГА В ДВУСЛОЙНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ[1]

***Качко Д. Л.*[2], *Пряхина О. Д.*[3], *Смирнова А. В.*[4]**

PIEZOACTIVE SHEAR WAVES IN TWO-LAYER ELECTROCONDUCTIVE MEDIA

Kachko D. L., Pryakhina O. D., Smirnova A. V.

The work studies an anti-plane problem about shear vibrations of the two-layer piezoelectric medium with an internal electrode. The formulas for calculating basic dynamic characteristics of the problem have been obtained taking into account the cohesiveness of electrical and mechanical fields.

Keywords: shear vibrations, a two-layer wave packet with an internal electrode, coupled electric and mechanical fields.

В работе исследуется динамическая задача о колебаниях двухслойной электроупругой среды, поверхность которой электродирована и подвергается гармоническому механическому и электрическому воздействию. Нижняя граница пакета жестко сцеплена с недеформируемым основанием, металлизирована и закорочена. На границе раздела слоев имеется плоское включение (разрезной электрод). В качестве электроупругого материала рассматривается пьезокерамика, поляризованная вдоль оси, параллельной поверхности среды (класс $6mm$ гексагональной сингонии). Если колебания возбуждаются сдвиговыми механическими напряжениями и известна плотность распределения зарядов (нормальная составляющая вектора электрической индукции), то задачу учета пьезоэффекта (в квазистатическом приближении) можно формулировать как антиплоскую. На примере этой модели демонстрируются основные этапы эффективного аналитического метода построения матриц-символов ядер систем интегральных уравнений (СИУ) динамических задач для составных электроупругих сред, основанный на использовании интегрального представления решения вспомогательной задачи для одного слоя [1, 2].

## 1. Колебания электроупругого слоя

Предварительно строится решение вспомогательной задачи о колебаниях слоя толщины $2h$, когда на лицевых электродированных поверхностях слоя заданы сдвиговые механические напряжения $t_0 e^{-i\omega t}$, $t_1 e^{-i\omega t}$ и нормальные составляющие векторов электрической индукции $d_0 e^{-i\omega t}$, $d_1 e^{-i\omega t}$.

Сдвиговые смещения $w(x, y)$ и электрический потенциал $\varphi(x, y)$ будут определяться из системы двух дифференциальных уравнений, записанной в безразмерных величинах (общий для всех характеристик множитель $e^{-i\omega t}$ опущен)

$$\Delta w + e\Delta\varphi + \Omega^2 w = 0, \quad e\Delta w - \varepsilon\Delta\varphi = 0. \quad (1.1)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-08-00144, 09-01-96501, 09-01-96502), Рособразования (проект 1.7.08), гранта Президента РФ (НШ-2298.2008.1).

[2]Качко Дмитрий Леонидович, аспирант кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: avega84@list.ru

[3]Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующая кафедрой высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: donna@kubsu.ru

[4]Смирнова Алла Васильевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: vtppchs@kubsu.ru

Граничные условия

$$y = \pm h : \partial_2 w + e\partial_2 \varphi = t_{0,1}(x), \qquad (1.2)$$
$$e\partial_2 w - \varepsilon\partial_2 \varphi = d_{0,1}(x).$$

Здесь

$$e = \frac{le_{15}}{c_{44}}, \quad \varepsilon = \frac{l^2\varepsilon_{11}}{c_{44}}, \quad \Omega^2 = \rho\frac{\omega^2 b^2}{c_{44}},$$

$c_{44}$, $e_{15}$, $\varepsilon_{11}$, $\rho$ — упругая и пьезоэлектрическая постоянные; диэлектрическая проницаемость и плотность материала соответственно; $\Omega$ — приведенная частота колебаний; $\Delta$ — двумерный оператор Лапласа; $b$ — характерный линейный размер, $l$ — нормировочный множитель, имеющий размерность электрического поля; $\partial_2 = \partial/\partial y$.

Решение задачи (1.1), (1.2) получено в матричной форме (в трансформантах Фурье)

$$\mathbf{W}(y) = \mathbf{B}_+(y)\,\mathbf{T}_0(\alpha) + \mathbf{B}_-(y)\,\mathbf{T}_1(\alpha),$$

$\mathbf{W}$, $\mathbf{T}_k$ — преобразования Фурье векторов $\mathbf{w}$, $\mathbf{t}_k$ соответственно; $\mathbf{t}_k = \{t_k, d_k\}$ — вектор, имеющий своими компонентами сдвиговые напряжения и нормальную составляющую вектора электрической индукции ($k = 0, 1$); $\mathbf{w} = \{w, \varphi\}$ — вектор, компонентами которого являются смещения и электрический потенциал.

Элементы матриц $\mathbf{B}_\pm(y) \equiv \mathbf{B}_\pm(\alpha, y, \Omega)$ зависят от параметра $\alpha$ преобразования Фурье по переменной $x$, частоты колебаний $\Omega$ и параметров среды

$$\mathbf{B}_\pm(y) = \begin{pmatrix} b_{11}^\pm & b_{12}^\pm \\ b_{21}^\pm & b_{22}^\pm \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} T_k \\ D_k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1,$$

$$b_{11}^\pm = N_1^- \pm N_1^+, \quad b_{12}^\pm = b_{21}^\pm = \frac{e}{\varepsilon} b_{11}^\pm,$$

$$b_{22}^\pm = \frac{e^2}{\varepsilon^2} b_{11}^\pm - \frac{1}{\varepsilon}(N_2^- \pm N_2^+).$$

Здесь

$$N_1^+(y) = \frac{\operatorname{ch}(\sigma y)}{2(1+\kappa_0^2)\sigma \operatorname{sh}(\sigma h)},$$

$$N_1^-(y) = \frac{\operatorname{sh}(\sigma y)}{2(1+\kappa_0^2)\sigma \operatorname{ch}(\sigma h)},$$

$$N_2^+(y) = \frac{\operatorname{ch}(\alpha y)}{2\alpha \operatorname{sh}(\alpha h)}, \quad N_2^-(y) = \frac{\operatorname{sh}(\alpha y)}{2\alpha \operatorname{ch}(\alpha h)},$$

$$\sigma^2 = \alpha^2 - \frac{\Omega^2}{1+\kappa_0^2}, \quad \kappa_0^2 = \frac{e^2}{\varepsilon}.$$

Вычислим элементы $b_{ij}^\pm(y)$

$$b_{11}^+(y) = \frac{\operatorname{ch}[\sigma(h+y)]}{(1+\kappa_0^2)\sigma \operatorname{sh}(\alpha h)},$$

$$b_{22}^+(y) = \frac{e^2}{\varepsilon^2} b_{11}^+ - \frac{\operatorname{ch}[\alpha(h+y)]}{\varepsilon\alpha \operatorname{sh}(2\alpha h)},$$

$$b_{11}^-(y) = -b_{11}^+(-y), \quad b_{22}^-(y) = -b_{22}^+(-y).$$

## 2. Колебания электроупругой среды с внутренним электродом

Рассмотрим теперь задачу о колебаниях пакета двух электроупругих слоев толщины $H = 2h_1 + 2h_2$, занимающего объем $-\infty < x < +\infty$, $-H \leqslant y \leqslant 0$ ($h_k$ — полутолщина $k$-го слоя). Поверхность среды и граница раздела слоев электродированы. Нижняя грань пакета жестко защемлена, металлизирована и закорочена. На верхнюю грань пакета $y = 0$ действуют механическая и электрическая нагрузки $\mathbf{t}_0 = \{t_0, d_0\}\, e^{-i\omega t}$. Внутренний электрод в виде плоского невесомого и бесконечно тонкого включения расположен на границе раздела слоев в области $|x| \leqslant a$.

Решение задачи строится путем стыковки решений, полученных для каждого слоя в отдельности. Произведем формальное разъединение слоев и введем локальные системы координат

$$y_1 = y + h_1, \quad y_2 = y + 2h_1 + h_2, \quad -h_k \leqslant y \leqslant h_k.$$

На границе раздела слоев выполняются условия непрерывности перемещений и электрического потенциала, а при переходе через электрод-включение имеет место скачок сдвиговых напряжений и электрической индукции, который описывается вектором $\Delta\mathbf{t} = \{\Delta t, \Delta d\}$ ($\Delta\mathbf{t} \equiv 0$, $|x| > a$).

В силу разрывных граничных условий для вектора $\mathbf{t}_1 = \{t_1, d_1\}$, описывающего взаимодействие между слоями, решение будет иметь вид (в преобразованиях Фурье)

$$\mathbf{W}_1(y_1) = \mathbf{B}_+(y_1)\mathbf{T}_0 + \mathbf{B}_-(y_1)(\mathbf{T}_1 + \Delta\mathbf{T}), \quad (2.1)$$
$$-h_1 \leqslant y_1 \leqslant h_1,$$
$$\mathbf{W}_2(y_2) = g_1[\mathbf{B}_+(y_2)\mathbf{T}_1 + \mathbf{B}_-(y_2)\mathbf{T}_2], \quad (2.2)$$
$$-h_2 \leqslant y_2 \leqslant h_2.$$

В соотношениях (2.1), (2.2)

$$\mathbf{W}_k = \begin{pmatrix} W_k \\ \Phi_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} T_k \\ D_k \end{pmatrix}, \quad \Delta\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta D \end{pmatrix}.$$

— преобразования Фурье соответствующих векторов $\mathbf{w}_k$, $\mathbf{t}_k$, $\Delta\mathbf{t}$, при этом $\mathbf{w}_k = \{w_k, \varphi_k\}$ — вектор, компонентами которого являются смещения точек $k$-го слоя и электрический потенциал; $g_1 = c_{44}^1/c_{44}^2$.

Условия непрерывности для перемещений и электрического потенциала на границе раздела слоев

$$\mathbf{W}_1(-h_1) = \mathbf{W}_2(h_2) \tag{2.3}$$

и граничные условия на нижней грани $y_2 = -h_2$

$$\mathbf{W}_2(-h_2) = 0, \tag{2.4}$$

записанные в преобразованиях Фурье позволяют в решении (2.1), (2.2) исключить неизвестные векторы механических и электрических нагрузок $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$. С учетом (2.4), (2.3) имеем

$$\mathbf{T}_1 = \\ = \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2)(\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 - \mathbf{B}_-(-h_1)\Delta\mathbf{T}), \tag{2.5}$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{F}_2^{-1}(h_2)\mathbf{G}_2\mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2)\times \\ \times (\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 - \mathbf{B}_-(-h_1)\Delta\mathbf{T}). \tag{2.6}$$

Подставляя (2.5), (2.6) в (2.1), (2.2), находим

$$\mathbf{W}_1(y_1) = \\ = [\mathbf{B}_+(y_1) - \mathbf{B}_-(y_1)\mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2)\mathbf{B}_+(-h_1)]\mathbf{T}_0 - \\ -[\mathbf{B}_-(y_1)\mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2)\mathbf{B}_-(-h_1) - \mathbf{B}_-(y_1)]\Delta\mathbf{T}. \tag{2.7}$$

$$\mathbf{W}_2(y_2) = \\ = -g_1\mathbf{R}_1(y_2)\mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2)\big[\mathbf{B}_+(-h_1))\mathbf{T}_0 + \\ + \mathbf{B}_-(-h_1))\Delta\mathbf{T}\big].$$

Принятые обозначения

$$\mathbf{R}_1(y_2) = \mathbf{B}_+(y_2) - \mathbf{B}_-(y_2)\mathbf{F}_2^{-1}(h_2)\mathbf{B}_+(-h_2),$$

$$\mathbf{F}_1(h_1, h_2) = \mathbf{B}_-(-h_1) - g_1\mathbf{R}_1(h_2), \tag{2.8}$$

$$\mathbf{F}_2(h_2) = \mathbf{B}_-(-h_2), \quad \mathbf{G}_k = -\mathbf{B}_+(-h_k).$$

Применяя к (2.7) обратное преобразование Фурье, получим интегральное представление решения задачи о распространении сдвиговых электроупругих волн в двухслойной среде с внутренним электродом.

Выпишем систему матрично-функциональных уравнений (МФУ) при $y_1 = h_1$ (на поверхности среды) и при $y_2 = h_2$ (на границе раздела слоев)

$$\mathbf{W}_1(h_1) = \mathbf{R}_2(h_1, h_2)\,\mathbf{T}_0 - g_1\mathbf{B}_-(h_1)\times \\ \times \mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{R}_1(h_2)\,\Delta\mathbf{T}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{W}_2(h_2) = g_1\mathbf{R}_1(h_2)\,\mathbf{F}_1^{-1}\times \\ \times [\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 - \mathbf{B}_-(-h_1)\Delta\mathbf{T}]. \tag{2.10}$$

Здесь $\mathbf{R}_1(h_2)$, $\mathbf{R}_2(h_1, h_2)$ — матрицы-символы Грина антиплоской задачи для электроупругого слоя толщиной $2h_2$ и пакета двух слоев без дефекта толщиной $2h_1 + 2h_2$ соответственно.

Систему (2.9), (2.10) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{12}\Delta\mathbf{T} = \mathbf{W}_1(h_1), \tag{2.11}$$

$$\mathbf{K}_{21}\mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{22}\Delta\mathbf{T} = \mathbf{W}_2(h_2). \tag{2.12}$$

Матрицы $\mathbf{K}_{ij}$ представимы в форме

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{R}_2(h_1, h_2) = \\ = \mathbf{B}_+(h_1) - \mathbf{B}_-(h_1)\,\mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2)\,\mathbf{B}_+(-h_1),$$

$$\mathbf{K}_{12} = \\ = -g_1\mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2)\,\mathbf{R}_1(h_2), \tag{2.13}$$

$$\mathbf{K}_{21} = -g_1\mathbf{R}_1(h_2)\,\mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2)\,\mathbf{B}_+(-h_1),$$

$$\mathbf{K}_{22} = -g_1\mathbf{R}_1(h_2)\,\mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2)\,\mathbf{B}_-(-h_1).$$

Базовые матрицы $\mathbf{B}_\pm(h_k)$, через которые выражаются все остальные матрицы, входящие в соотношения (2.13), (2.8), имеют структуру

$$\mathbf{B}_\pm(h_k) = \begin{pmatrix} n_1^\pm(h_k) & \frac{e_k}{\varepsilon_k}n_1^\pm(h_k) \\ \frac{e_k}{\varepsilon_k}n_1^\pm(h_k) & \frac{e_k^2}{\varepsilon_k^2}n_1^\pm(h_k) - \frac{1}{\varepsilon_k}n_2^\pm(h_k) \end{pmatrix},$$

при этом $\mathbf{B}_\pm(-h_k) = -\mathbf{B}_\mp(h_k)$.

Элементы матриц $\mathbf{B}_\pm(h_k)$ зависят от частоты колебаний $\Omega$, параметра преобразования Фурье $\alpha$, физико-механических и геометрических параметров $k$-го слоя $e_k = \frac{le_{15}^k}{c_{44}^k}$, $\varepsilon_k = \frac{l^2\varepsilon_{11}^k}{c_{44}^k}$, $\rho_k$, $c_{44}^k$, $h_k$.

Систему МФУ (2.11), (2.12) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{W}, \tag{2.14}$$

В МФУ (2.14) $\mathbf{K}$ представляет собой блочную матрицу

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{W}$ — расширенные векторы

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} T_0 \\ D_0 \\ \Delta T \\ \Delta D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1(h_1) \\ \Phi_1(h_1) \\ W_2(h_2) \\ \Phi_2(h_2) \end{pmatrix},$$

где $W_k(h_k)$, $\Phi_k(h_k)$, $k = 1, 2$ — сдвиговые перемещения и электрический потенциал на верхней грани $k$-го слоя; $\Delta T$, $\Delta D$ — скачки сдвиговых напряжений и электрической индукции на включении; $T_0$, $D_0$ — механические и электрические нагрузки на поверхности среды (в трансформантах Фурье).

Выпишем матрицу $\mathbf{K}$, когда механические и электрические характеристики слоев совпадают, что соответствует однородному материалу, в котором на глубине $y = -2h_1$ имеется электрод. Плоскость расположения электрода является условной границей между слоями толщины $2h_1$ и $2h_2$.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} R_1 & \frac{e}{\varepsilon}R_1 & S_1 & \frac{e}{\varepsilon}S_1 \\ \frac{e}{\varepsilon}R_1 & \frac{e^2}{\varepsilon^2}R_1 - \frac{1}{\varepsilon}R_2 & \frac{e}{\varepsilon}S_1 & \frac{e^2}{\varepsilon^2}S_1 - \frac{1}{\varepsilon}S_2 \\ -S_1 & -\frac{e}{\varepsilon}S_1 & L_1 & \frac{e}{\varepsilon}L_1 \\ -\frac{e}{\varepsilon}S_1 & -\frac{e^2}{\varepsilon^2}S_1 + \frac{1}{\varepsilon}S_2 & \frac{e}{\varepsilon}L_1 & \frac{e^2}{\varepsilon^2}L_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_2 \end{pmatrix}.$$

Для определения характера волнового поля в исследуемой среде и для построения методом фиктивного поглощения решения системы интегральных уравнений динамической смешанной задачи, вытекающей из МФУ (2.14), необходимо знать нули и полюса элементов блочной матрицы $\mathbf{K}$ и ее определителя. С этой целью для указанных элементов получено представление в виде отношения целых функций

$$R_1 = \frac{\operatorname{sh}[2\sigma(h_1+h_2)]}{\sigma\left(1+\kappa_0^2\right)\Delta_1},$$

$$R_2 = \frac{\operatorname{sh}[2\alpha(h_1+h_2)]}{\alpha\Delta_2},$$

$$S_1 = -\frac{\operatorname{sh}(2\sigma h_2)}{\sigma(1+\kappa_0^2)\Delta_1}, \quad S_2 = -\frac{\operatorname{sh}(2\alpha h_2)}{\alpha\Delta_2},$$

$$L_1 = -\frac{\operatorname{ch}(2\sigma h_1)\operatorname{sh}(2\sigma h_2)}{\sigma(1+\kappa_0^2)\Delta_1},$$

$$L_2 = -\frac{\operatorname{ch}(2\alpha h_1)\operatorname{sh}(2\alpha h_2)}{\alpha\Delta_2},$$

$$\Delta_1 = \operatorname{ch}[2\sigma(h_1+h_2)],$$

$$\Delta_2 = \operatorname{ch}[2\alpha(h_1+h_2)],$$

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\Omega^2}{1+\kappa_0^2}}, \quad \kappa_0 = \sqrt{\frac{e^2}{\varepsilon}}.$$

В ходе работы были вычислены нули и полюса элементов матрицы $\mathbf{K}$. Для расчетов, в качестве параметров среды, использовались характеристики титаната бария и селенида кадмия. Дисперсионные кривые функции $L_1 = L_1(\alpha, \Omega)$ для титаната бария приведены на рисунке.

## 3. Решение антиплоской задачи в случае непроводящей поверхности

Рассмотрим задачу, когда электрод расположен в электроупругом слое на глубине $y = -2h_1$, поверхность которого свободна от механических нагрузок ($t_0 = 0$) и неэлектродирована, то есть является непроводящей ($d_0 = 0$). В этом случае система уравнений (2.14) упрощается ($\mathbf{T}_0 = 0$) — она распадается на два отдельных МФУ.

На поверхности среды $y = 0$ ($y_1 = h_1$) имеем

$$\mathbf{K}_{12}\Delta\mathbf{T} = \mathbf{W}_1(h_1), \tag{3.1}$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} W_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta D \end{pmatrix}.$$

В плоскости расположения электрода $y = -2h_1$ $(y_2 = h_2)$

$$\mathbf{K}_{22}\Delta\mathbf{T} = \mathbf{W}_2(h_2), \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} W_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Таким образом, вместо МФУ (2.14) с блочной матрицей $\mathbf{K}$ размерности $4\times4$ получили два МФУ с матрицами размерности $2\times2$.

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{pmatrix} S_1 & \frac{e}{\varepsilon}S_1 \\ \frac{e}{\varepsilon}S_1 & \frac{e^2}{\varepsilon^2}S_1 - \frac{1}{\varepsilon}S_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{pmatrix} L_1 & \frac{e}{\varepsilon}L_1 \\ \frac{e}{\varepsilon}L_1 & \frac{e^2}{\varepsilon^2}L_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_2 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что колебания среды возбуждаются вибрацией внутреннего электрода, можно на основе МФУ (3.2) выписать матричное ИУ для смешанной задачи

$$\int_{-a}^{a} \mathbf{k}(x-\xi)\,\Delta\mathbf{t}(\xi)\,d\xi = \mathbf{w}_2(x), \tag{3.3}$$

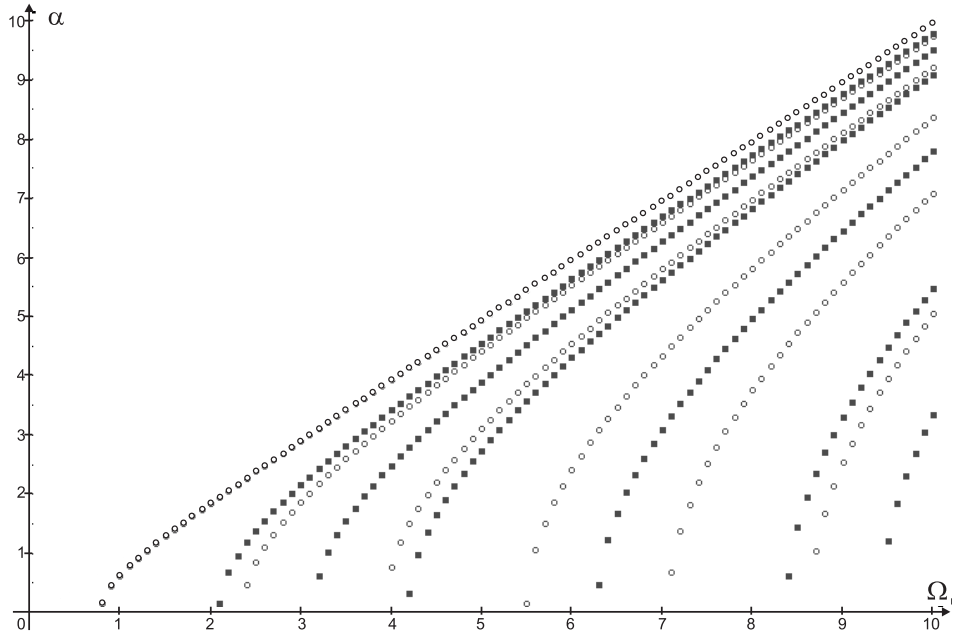


Рис. 1. Нули (ромбики) и полюса (кружки) функции $L_1$

$$|x| \leqslant a,$$

относительно неизвестного вектора $\mathbf{\Delta t}\,(x)$ при заданном значении вектора $\mathbf{w}_2\,(x)$ в области электрода.

Ядром полученного матричного ИУ является

$$\mathbf{k}\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta} \mathbf{K}_{22}(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Контур $\delta$ выбирается в соответствии с принципом излучения и обходит отрицательные нули, полюса подынтегральных функций ядер сверху, а положительные — снизу [3]. Элементы матрицы $\mathbf{K}_{22} = (\tilde{K}_{ij})$ регулярны всюду на вещественной оси, за исключением одних и тех же для всех функций полюсов $\alpha = \pm p_k\,(k = 1, 2, \ldots n)$.

При $|\alpha| \to \infty$

$$\tilde{K}_{ij} = (1 + \kappa_0^2)^{-1}\left[a_{ij} + O(\alpha^{-2})\right]|\alpha|^{-1},$$

$$i, j = 1, 2.$$

Для пьезоэлектриков класса $6mm$ коэффициенты

$$a_{11} = -\frac{1}{2}, \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{e}{2\varepsilon}, \quad a_{22} = \frac{1}{2\varepsilon}.$$

При указанных свойствах ядер система (3.3) однозначно разрешима в $\mathcal{L}_p(-a, a)$. Критерии единственности формулируются по аналогии с [3].

Предположим, что решение $\mathbf{\Delta t}\,(x)$ СИУ (3.3) построено. Применяя обратное преобразование Фурье к (3.1), (3.2), получим интегральные представления

$$\mathbf{w}_1\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta} \mathbf{K}_{12}(\alpha)\,\mathbf{\Delta T}\,(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (3.4)$$

$$-\infty < x < \infty,$$

$$\mathbf{w}_2\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta} \mathbf{K}_{22}(\alpha)\,\mathbf{\Delta T}\,(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (3.5)$$

$$|x| > a,$$

описывающие распространение сдвиговых электроупругих волн на поверхности и на условной границе раздела слоев.

В СИУ (3.3) перемещения $w_2\,(x)$ и потенциал $\varphi_2\,(x)$ считаются известными в области $|x| \leqslant a$. Не нарушая общности, зададим $w_2 = A_1 e^{-i\eta x}$, $\varphi_2 = A_2 e^{-i\eta x}$, ($A_1$, $A_2$, $\eta$ — const).

Предположим, что построены решения $g_0\,(x)$, $d_0\,(x)$ следующих интегральных уравнений:

$$\int\limits_{-a}^{a} k_{11}\,(x - \xi)\, g_0\,(\xi)\, d\xi = e^{-i\eta x}, \quad (3.6)$$

$$|x| \leqslant a,$$

$$\int\limits_{-a}^{a} s_0\,(x - \xi)\, d_0\,(\xi)\, d\xi = e^{-i\eta x}, \quad (3.7)$$

$$|x| \leqslant a.$$

Ядрами интегральных операторов в (3.6), (3.7) являются

$$k_{11}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta} L_1(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$s_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta} L_2(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Функции $L_1$, $L_2$ имеют вид

$$L_1 = -\frac{\operatorname{th}(2\sigma h_2)}{\sigma(1+\kappa_0^2)(1+\operatorname{th}(2\sigma h_1)\operatorname{th}(2\sigma h_2))},$$

$$L_2 = -\frac{\operatorname{th}(2\alpha h_2)}{\alpha(1+\operatorname{th}(2\alpha h_1)\operatorname{th}(2\alpha h_2))}.$$

Так как подынтегральная функция ядра в (3.7) регулярна на всей вещественной оси, то контур $\delta$ можно совместить с вещественной осью.

Тогда решение СИУ (3.3), в силу линейности задачи, будет связано с $d_0(x)$, $g_0(x)$ соотношениями

$$\Delta d(x) = (eA_1 - \varepsilon A_2)\, d_0(x), \qquad (3.8)$$

$$\Delta t(x) = \\ = A_1\left[g_0(x) - \kappa_0^2 d_0(x)\right] + eA_2 d_0(x). \qquad (3.9)$$

Таким образом, скачок напряжения $\Delta t(x)$ и скачок электрической индукции $\Delta d(x)$ определяются формулами (3.8), (3.9) через решения интегральных уравнений (3.6), (3.7).

Решение интегрального уравнения I рода вида (3.6) построено методом фиктивного поглощения в [2]. Решение ИУ (3.7) может быть получено из решения ИУ (3.6) при $\Omega = 0$. Из формул, приведенных в [2], следует, что функции $\Delta t(x)$ и $\Delta d(x)$ имеют корневые особенности $(a \pm x)^{-1/2}$ на границе области определения.

Очевидно, что амплитуда скачка электрического смещения (индукции) (3.8) в отличие от амплитуды скачка сдвигового напряжения (3.9) от частоты колебаний не зависит, так как ИУ (3.7) соответствует статической задаче, а (3.6) — динамической.

Зная скачки напряжений $\Delta t(x)$ и электрической индукции $\Delta d(x)$ на включении-электроде, можно по формулам (3.4), (3.5) определить электроупругое волновое поле, возникающее на поверхности и в плоскости расположения включения, при этом

$$\Delta\mathbf{T}(\alpha) = \int\limits_{-a}^{a} \Delta\mathbf{t}(x)\, e^{i\alpha x} dx, \quad \Delta\mathbf{T} = (\Delta T, \Delta D).$$

Здесь $\Delta T$ — скачок механических сдвиговых напряжений, $\Delta D$ — скачок электрической индукции при переходе через электродированную границу в трансформантах Фурье.

С высокой степенью точности можно считать, что полученные по современной технологии микронной толщины электроды не влияют на механические свойства электроупругой среды. Поэтому механические характеристики: перемещения и напряжения не претерпевают разрывов при переходе через внутренний электрод, хотя напряжения могут иметь особенности на концах электрода. Электрический потенциал также будет непрерывной функцией во всем объеме тела. На самом же электроде он принимает некоторое значение $\varphi_2(x)$. При переходе через электрод только нормальная составляющая вектора электрической индукции терпит разрыв. Это означает, что в СИУ (3.3) следует положить $\Delta t = 0$. В этом случае имеем одно интегральное уравнение

$$\int\limits_{-a}^{a} k_0(x-\xi)\, \Delta d(\xi)\, d\xi = \varphi_2(x), \qquad (3.10)$$

$$|x| \leqslant a$$

с ядром

$$k_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta} L_0(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \qquad (3.11)$$

$$L_0 = \frac{e^2}{\varepsilon^2} L_1(\alpha) - \frac{1}{\varepsilon} L_2(\alpha)$$

относительно неизвестной функции $\Delta d(x)$ при заданном значении потенциала в области $|x| \leqslant a$.

Решение ИУ (3.10) построено методом фиктивного поглощения для правой части $\varphi_2 = e^{-i\eta x}$ и в трансформантах Фурье имеет вид

$$\Delta D(\alpha,\eta) = \frac{L_0^{-1}(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+B^2}}\Bigg\{ f_2(\alpha,\eta) + \\ + f_2(-\alpha,-\eta) - \sum_{k=1}^{2n} C_k f_1(\alpha, x_k)\Bigg\}. \qquad (3.12)$$

В (3.12) сохранены все обозначения [2]. В этом решении подынтегральная функция ядра $L_0$ представлена аппроксимацией

$$L_0(\alpha) = \frac{C}{\sqrt{\alpha^2 + B^2}} \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha^2 - z_k^2}{\alpha^2 - p_k^2},$$

$$C = -\frac{1}{2(1+\kappa_0^2)},$$

где $z_k$, $p_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — соответственно вещественные и комплексные нули, полюса функции $L_0(\alpha)$, расположенные выше контура $\delta$.

Отметим, что в случае уравнения (3.10) с ядром (3.11) функция $\Delta d(x)$ зависит от частоты колебаний $\Omega$ и является осциллирующей в отличие от соответствующей характеристики электромеханической задачи (3.3), когда функция $\Delta t(x)$ отлична от нуля.

Электроупругое волновое поле со смещением $w_1(x)$ на поверхности среды и $w_2(x)$ — в плоскости расположения включения будет описываться формулами (3.4), (3.5), которые при учете только электрических условий $(\Delta t(x) = 0)$ и после определения $\Delta d(x)$, запишутся в виде

$$w_1(x) = \frac{e}{2\pi\varepsilon} \int_{\delta} S_1(\alpha) \Delta D(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (3.13)$$

$$-\infty < x < \infty,$$

$$w_2(x) = \frac{e}{2\pi\varepsilon} \int_{\delta} L_1(\alpha) \Delta D(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (3.14)$$

$$|x| > a.$$

Подставляя (3.12) в (3.13), (3.14) и вычисляя интегралы с помощью теории вычетов, получим формулы для расчета электроупругих волн, распространяющихся по поверхности среды и в плоскости расположения внутреннего электрода.

## *Литература*


1. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* К исследованию динамики пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // ДАН. 2006. Т. 411. № 3. С. 330–333.
2. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
3. *Бабешко В. А.* Обобщённый метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.


Ключевые слова: сдвиговые колебания, пакет двух слоев с внутренним электродом, связанные электрические и механические поля.

Статья поступила 23 марта 2009 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Качко Д. Л., Пряхина О. Д., Смирнова А. В., 2009