

УДК 517.91

**АНТИПЛОСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ
ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНОЙ¹***Березин Н. С.², Пряхина О. Д.³, Смирнова А. В.⁴*ANTIPLANE DYNAMIC ELECTROELASTICITY PROBLEM FOR THE TWO-LAYERED MEDIUM
WEAKENED BY A FRACTURE

Berezin N. S., Pryakhina O. D., Smirnova A. V.

The work investigates an antiplane dynamic problem about electrical and mechanical loading of the piezoelectrical two-layered medium weakened by a fracture. The medium surface is electroded, the lower boundary is rigidly fixed, metallized and shorted out. A defect-fracture on the boundary surface is modeled by a linear mathematical section. Piezocrystals with a symmetry axis parallel to the medium surface or piezoceramics polarized along this axis (the class of 6mm of hexagonal crystal system) are considered as electroelastic materials. By the example of this problem, the authors discuss some aspects of applying an effective method of developing Green's matrix-symbols to the solution of dynamic mixed electroelasticity problems for composite media with defects.

Keywords: electroelastic two-layered medium, fracture, shear vibrations.

В работе исследуется антиплоская динамическая задача об электрическом и механическом нагружении пьезоэлектрической двухслойной среды, ослабленной трещиной. Поверхность среды электродирована, а нижняя граница жестко закреплена, металлизирована и закорочена. На границе раздела слоев имеется дефект-трещина, моделируемая линейным математическим разрезом. В качестве электроупругого материала рассматриваются пьезокристаллы с осью симметрии, параллельной поверхности среды, или пьезокерамика, поляризованная вдоль этой оси (класс *6mm* гексагональной сингонии). На примере этой задачи излагаются некоторые аспекты применения эффективного метода построения матриц-символов Грина при решении динамических смешанных задач электроупругости для составных сред с дефектами [1–3].

**1. Построение решения
вспомогательной задачи для
электроупругого слоя**

Предварительно строится решение вспомогательной задачи о колебаниях слоя толщины $2h$, когда на лицевых электродированных поверхностях слоя заданы сдвиговые механические напряжения $t_0 e^{-i\omega t}$, $t_1 e^{-i\omega t}$ и нормальные составляющие векторов электрической индукции $d_0 e^{-i\omega t}$, $d_1 e^{-i\omega t}$ (t — время, ω — частота колебаний).

Сдвиговые смещения $w(x, y)$ и электрический потенциал $\varphi(x, y)$ будут определяться из системы двух дифференциальных уравнений, записанной в безразмерных величинах (общий для всех характеристик множитель $e^{-i\omega t}$ опущен)

$$\Delta w + e\Delta\varphi + \Omega^2 w = 0, \quad e\Delta w - \varepsilon\Delta\varphi = 0. \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-08-00144, 09-01-96501, 09-01-96502), Рособразования (проект 1.7.08), гранта Президента РФ (НШ-2298.2008.1).

²Березин Никита Сергеевич, аспирант кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: avega84@list.ru.

³Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующая кафедрой высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: donna@kubsu.ru.

⁴Смирнова Алла Васильевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: vtppchs@kubsu.ru.

Граничные условия

$$\begin{aligned} y = \pm h: \quad \partial_2 w + e \partial_2 \varphi &= t_{0,1}(x), \\ e \partial_2 w - \varepsilon \partial_2 \varphi &= d_{0,1}(x). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$e = \frac{l e_{15}}{c_{44}}, \quad \varepsilon = \frac{l^2 \varepsilon_{11}}{c_{44}}, \quad \Omega^2 = \rho \frac{\omega^2 b^2}{c_{44}},$$

c_{44} , e_{15} , ε_{11} , ρ — упругая и пьезоэлектрическая постоянная; диэлектрическая проницаемость и плотность материала соответственно; Ω — приведенная частота колебаний; Δ — двумерный оператор Лапласа; b — характерный линейный размер, l — нормировочный множитель, имеющий размерность электрического поля; $\partial_2 = \partial/\partial y$.

Решение задачи (1.1), (1.2) получено в матричной форме

$$\mathbf{W}(y) = \mathbf{B}_+(y) \mathbf{T}_0(\alpha) + \mathbf{B}_-(y) \mathbf{T}_1(\alpha), \quad (1.3)$$

\mathbf{W} , \mathbf{T}_k — преобразования Фурье векторов $\mathbf{w} = \{w, \varphi\}$ и $\mathbf{t}_k = \{t_k, d_k\}$, $k = 0, 1$ соответственно.

Элементы матриц $\mathbf{B}_\pm(y) \equiv \mathbf{B}_\pm(\alpha, y, \Omega)$ зависят от параметра α преобразования Фурье по переменной x , частоты колебаний Ω и параметров среды

$$\mathbf{B}_\pm(y) = \begin{pmatrix} b_{11}^\pm & b_{12}^\pm \\ b_{21}^\pm & b_{22}^\pm \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W \\ \Phi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} T_k \\ D_k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1.$$

Здесь

$$b_{11}^+(y) = \frac{\text{ch}[\sigma(h+y)]}{(1 + \kappa_0^2)\sigma \text{sh}(2\sigma h)},$$

$$b_{22}^+(y) = \frac{e^2}{\varepsilon^2} b_{11}^+(y) - \frac{\text{ch}[\alpha(h+y)]}{\varepsilon \alpha \text{sh}(2\alpha h)},$$

$$b_{11}^-(y) = -b_{11}^+(-y), \quad b_{22}^-(y) = -b_{22}^+(-y),$$

$$b_{12}^\pm = b_{21}^\pm = \frac{e}{\varepsilon} b_{11}^\pm(y),$$

$$\sigma^2 = \alpha^2 - \frac{\Omega^2}{1 + \kappa_0^2}, \quad \kappa_0^2 = \frac{e^2}{\varepsilon}.$$

2. Колебания электроупругой среды при наличии дефекта-трещины

Рассмотрим задачу о колебаниях пакета двух электроупругих слоев толщины $H = 2h_1 + 2h_2$, занимающего объем $-\infty < x < +\infty$, $-H \leq y \leq 0$ (h_k — полутолщина k -го слоя). На верхнюю электродированную грань пакета $y = 0$ действует механическая и электрическая нагрузки $\mathbf{t}_0 = \{t_0, d_0\} e^{-i\omega t}$. Нижняя грань пакета жестко закреплена, металлизирована и закорочена. Трещина расположена на границе раздела слоев и занимает область $|x| \leq a$. Предполагается, что наряду с гармоническими на берега трещины действуют статические напряжения, т.е. берега трещины не взаимодействуют.

Решение задачи строится путем стыковки вспомогательных решений, полученных для каждого слоя в отдельности. Произведем формальное разъединение слоев и введем локальные системы координат

$$y_1 = y + h_1, \quad y_2 = y + 2h_1 + h_2,$$

$$-h_k \leq y_k \leq h_k.$$

В общем случае на границе раздела слоев выполняются условия непрерывности сдвиговых напряжений и электрической индукции, а при переходе через границу имеет место скачок сдвиговых смещений и электрического потенциала, который описывается вектором $\Delta \mathbf{w} = \{\Delta w, \Delta \varphi\}$ ($\Delta \mathbf{w} = 0$, $|x| > a$).

Решение для k -го слоя с учетом (1.3) будет иметь вид

$$\mathbf{W}_1(y_1) = \mathbf{B}_+(y_1) \mathbf{T}_0 + \mathbf{B}_-(y_1) \mathbf{T}_1, \quad (2.1)$$

$$-h_1 \leq y_1 \leq h_1,$$

$$\mathbf{W}_2(y_2) = g_1 [\mathbf{B}_+(y_2) \mathbf{T}_1 + \mathbf{B}_-(y_2) \mathbf{T}_2], \quad (2.2)$$

$$-h_2 \leq y_2 \leq h_2.$$

В соотношениях (2.1), (2.2) $\mathbf{W}_k = \begin{pmatrix} W_k \\ \Phi_k \end{pmatrix}$,

$\mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} T_k \\ D_k \end{pmatrix}$ — преобразования Фурье векторов $\mathbf{w}_k = \{w_k, \varphi_k\}$, $\mathbf{t}_k = \{t_k, d_k\}$, при этом \mathbf{w}_k — вектор, компонентами которого являются сдвиговые смещения точек k -го слоя и электрический потенциал; \mathbf{t}_k — векторы, характеризующие взаимодействие между слоями и имеющие своими компонентами сдвиговые напряжения и электрическую индукцию; $\mathbf{t}_0 = \{t_0, d_0\}$ — вектор, заданный на поверхности среды, $g_1 = c_{44}^1/c_{44}^2$.

Так как на границе раздела слоев имеют место разрывные граничные условия для перемещений и электрического потенциала, то условия стыковки слоев имеют вид

$$\mathbf{W}_1(-h_1) = \mathbf{W}_2(h_2) + \Delta \mathbf{W}. \quad (2.3)$$

Здесь $\Delta \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \Delta W \\ \Delta \Phi \end{pmatrix}$ — преобразование Фурье вектора $\Delta \mathbf{w} = \{\Delta w, \Delta \varphi\}$, компонентами которого являются скачки перемещений и электрического потенциала на берегах трещины.

Граничными условиями на нижней грани $y_2 = -h_2$ являются

$$\mathbf{W}_2(-h_2) = 0. \quad (2.4)$$

Условия (2.3), (2.4) позволяют в решении (2.1), (2.2) исключить неизвестные векторы механических и электрических нагрузок \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 , которые определены в виде

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2)(\mathbf{G}_1 \mathbf{T}_0 + \Delta \mathbf{W}), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{F}_2^{-1}(h_2) \mathbf{G}_2 \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2) \times \\ \times (\mathbf{G}_1 \mathbf{T}_0 + \Delta \mathbf{W}). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5), (2.6) в (2.1), (2.2), находим

$$\mathbf{W}_1(y_1) = [\mathbf{B}_+(y_1) - \mathbf{B}_-(y_1) \times \\ \times \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2) \mathbf{B}_+(-h_1)] \mathbf{T}_0 + \\ + \mathbf{B}_-(y_1) \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2) \Delta \mathbf{W}. \quad (2.7)$$

$$\mathbf{W}_2(y_2) = -g_1 \mathbf{R}_1(y_2) \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2) \times \\ \times [\mathbf{B}_+(-h_1) \mathbf{T}_0 - \Delta \mathbf{W}].$$

Принятые обозначения

$$\mathbf{R}_1(y_2) = \mathbf{B}_+(y_2) - \mathbf{B}_-(y_2) \mathbf{F}_2^{-1}(h_2) \mathbf{B}_+(-h_2), \\ \mathbf{F}_1(h_1, h_2) = \mathbf{B}_-(-h_1) - g_1 \mathbf{R}_1(h_2), \\ \mathbf{F}_2(h_2) = \mathbf{B}_-(-h_2), \\ \mathbf{G}_k = -\mathbf{B}_+(-h_k). \quad (2.8)$$

Применяя к (2.7) обратное преобразование Фурье, получим интегральное представление решения задачи о распространении сдвиговых электроупругих волн в двухслойной среде с трещиной.

Выпишем систему матрично-функциональных уравнений (МФУ) при $y_1 = h_1$ (на поверхности среды) и при $y_2 = h_2$ (на границе раздела слоев), служащую основой

построения матричных систем интегральных уравнений (СИУ) смешанной задачи с учетом связанности механических и электрических полей

$$\mathbf{W}_1(h_1) = \mathbf{R}_2(h_1, h_2) \mathbf{T}_0 + \\ + \mathbf{B}_-(h_1) \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2) \Delta \mathbf{W}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2)(\mathbf{G}_1 \mathbf{T}_0 + \Delta \mathbf{W}). \quad (2.10)$$

Здесь $\mathbf{R}_1(h_2)$, $\mathbf{R}_2(h_1, h_2)$ — матрицы-символы Грина антиплоской задачи для электроупругого слоя толщиной $2h_2$ и пакета двух слоев без дефекта толщиной $2h_1 + 2h_2$ соответственно.

Систему (2.9), (2.10) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{K}_{11} \mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{12} \Delta \mathbf{W} = \mathbf{W}_1(h_1), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{K}_{21} \mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{22} \Delta \mathbf{W} = \mathbf{T}_1. \quad (2.12)$$

Матрицы \mathbf{K}_{ij} имеют вид

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{R}_2(h_1, h_2) = \\ = \mathbf{B}_+(h_1) - \mathbf{B}_-(h_1) \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2) \mathbf{B}_+(-h_1), \\ \mathbf{K}_{12} = \mathbf{B}_-(h_1) \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2), \quad (2.13) \\ \mathbf{K}_{21} = -\mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2) \mathbf{B}_+(-h_1), \\ \mathbf{K}_{22} = \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, h_2).$$

Базовые матрицы $\mathbf{B}_\pm(h_k)$, через которые выражаются все остальные матрицы, входящие в соотношения (2.13), (2.8), имеют структуру

$$\mathbf{B}_\pm(h_k) = \begin{pmatrix} n_1^\pm(h_k) & \frac{e_k}{\varepsilon_k} n_1^\pm(h_k) \\ \frac{e_k}{\varepsilon_k} n_1^\pm(h_k) & \frac{e_k^2}{\varepsilon_k^2} n_1^\pm(h_k) - \frac{1}{\varepsilon_k} n_2^\pm(h_k) \end{pmatrix},$$

при этом $\mathbf{B}_\pm(-h_k) = -\mathbf{B}_\mp(h_k)$.

Элементы матриц $\mathbf{B}_\pm(h_k)$ зависят от частоты колебаний Ω , параметра преобразования Фурье α , физико-механических и геометрических параметров k -го слоя $e_k = \frac{l e_{15}^k}{c_{44}^k}$,

$\varepsilon_k = \frac{l^2 \varepsilon_{11}^k}{c_{44}^k}$, ρ_k , c_{44}^k , h_k и приведены в [3].

Систему матричных уравнений (2.11), (2.12) можно представить в форме

$$\mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{U}. \quad (2.14)$$

В МФУ (2.14) \mathbf{K} — блочная матрица

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix},$$

а \mathbf{V} и \mathbf{U} — расширенные векторы

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} T_0 \\ D_0 \\ \Delta W \\ \Delta \Phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} W_1(h_1) \\ \Phi_1(h_1) \\ T_1 \\ D_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $W_1(h_1)$, $\Phi_1(h_1)$, ΔW , $\Delta \Phi$, T_0 , D_0 , T_1 , D_1 — трансформанты Фурье функций w_1 , φ_1 , Δw , $\Delta \varphi$, t_0 , d_0 , t_1 , d_1 (амплитуд сдвиговых перемещений, электрического потенциала на верхней грани, скачка перемещений, скачка электрического потенциала, сдвиговых напряжений и электрической индукции на поверхности среды и в плоскости расположения трещины соответственно).

Выпишем матрицу \mathbf{K} , когда механические и электрические характеристики слоев совпадают, что соответствует однородному материалу, в котором на глубине $y = -2h_1$ имеется трещина (плоскость расположения трещины является условной границей между слоями толщиной $2h_1$ и $2h_2$)

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} R_1 & \frac{\varepsilon}{\varepsilon} R_1 & A_1 & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon} R_1 & \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} R_1 - \frac{1}{\varepsilon} R_2 & \frac{\varepsilon}{\varepsilon} (A_1 - A_2) & A_2 \\ A_1 & \frac{\varepsilon}{\varepsilon} (A_1 - A_2) & \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} F_2 - F_1 & -eF_2 \\ 0 & A_2 & -eF_2 & \varepsilon F_2 \end{pmatrix}.$$

Для определения характера волнового поля в исследуемой среде и для построения методом фиктивного поглощения решения системы интегральных уравнений динамической смешанной задачи, вытекающей из МФУ (2.14), необходимо знать нули и полюса элементов блочной матрицы \mathbf{K} и ее определителя. С этой целью для указанных элементов получено представление в виде отношения целых функций

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\text{sh}[2\sigma(h_1 + h_2)]}{\sigma(1 + \kappa_0^2) \Delta_1}, \\ R_2 &= \frac{\text{sh}[2\alpha(h_1 + h_2)]}{\alpha \Delta_2}, \\ A_1 &= \frac{\text{ch}(2\sigma h_2)}{\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{\text{ch}(2\alpha h_2)}{\Delta_2}, \\ F_1 &= \frac{\sigma(1 + \kappa_0^2) \text{sh}(2\sigma h_1) \text{ch}(2\sigma h_2)}{\Delta_1}, \\ F_2 &= \frac{\alpha \text{sh}(2\alpha h_1) \text{ch}(2\alpha h_2)}{\Delta_2}, \\ \Delta_1 &= \text{ch}[2\sigma(h_1 + h_2)], \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \text{ch}[2\alpha(h_1 + h_2)],$$

В ходе работы были вычислены вещественные нули и полюса элементов матрицы \mathbf{K} . Очевидно, что элементы $A_2(\alpha, \Omega)$, $F_2(\alpha, \Omega)$ являются регулярными функциями на вещественной оси $\alpha = 0$.

3. Решение антиплоской задачи в случае непроводящей поверхности

Рассмотрим задачу, когда в электроупругом слое на глубине $y = -2h_1$ имеется трещина шириной $2a$. Предположим, что поверхность слоя свободна от механических нагрузок ($t_0 = 0$) и неэлектродирована, то есть является непроводящей ($d_0 = 0$). Тогда система уравнений (2.14) упрощается ($\mathbf{T}_0 = 0$) и разбивается на два отдельных МФУ.

На поверхности среды $y = 0$ ($y_1 = h_1$) имеем

$$\mathbf{K}_{12} \Delta \mathbf{W} = \mathbf{W}_1(h_1), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} W_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \Delta W \\ \Delta \Phi \end{pmatrix}.$$

На границе расположения трещины $y = -2h_1$ ($y_2 = h_2$)

$$\mathbf{K}_{22} \Delta \mathbf{W} = \mathbf{T}_1, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} T_1 \\ D_1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

От МФУ (2.14) с блочной матрицей \mathbf{K} размерности 4×4 приходим к двум независимым МФУ с матрицами размерности 2×2

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon} (A_1 - A_2) & A_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} F_2 - F_1 & -eF_2 \\ -eF_2 & \varepsilon F_2 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что колебания среды вызваны вибрацией берегов трещины, можно на основе МФУ (3.2) выписать матричное ИУ для смешанной задачи

$$\int_{-a}^a \mathbf{k}(x - \xi) \Delta \mathbf{w}(\xi) d\xi = \mathbf{t}_1(x), \quad (3.3)$$

$$|x| \leq a,$$

относительно неизвестного вектора $\Delta \mathbf{w} = \{\Delta w(x), \Delta \varphi(x)\}$ при заданном значении вектора $\mathbf{t}_1(x) = \{t_1(x), d_1(x)\}$ на берегах трещины.

Ядром матричного ИУ (3.3) является

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\delta} \mathbf{K}_{22}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Положение контура δ детально описано в [4].

Элементы матрицы $\mathbf{K}_{22} = \mathbf{F}^{-1} = (F_{ij})$, $i, j = 1, 2$ регулярны всюду на вещественной оси, за исключением элемента $F_{11} = \frac{e^2}{\varepsilon} F_2 - F_1$, имеющего вещественные полюса

$$\alpha = \pm \sqrt{\Omega_*^2 - \frac{1}{4(h_1 + h_2)^2} \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right)^2} = \pm p_k,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

и нули, определяемые численно из уравнения

$$\begin{aligned} & \kappa_0^2 \alpha \cos [2\sigma_*(h_1 + h_2)] \sin(2\alpha h_1) \cos(2\alpha h_2) + \\ & + \sigma_*(1 + \kappa_0^2) \cos [2\alpha(h_1 + h_2)] \times \\ & \times \sin(2\sigma_* h_1) \cos(2\sigma_* h_2) = 0, \end{aligned}$$

$$\sigma_* = \sqrt{\Omega_*^2 - \alpha^2}, \quad \Omega_*^2 = \frac{\Omega^2}{1 + \kappa_0^2}, \quad \alpha < \Omega_*.$$

Дисперсионные кривые элемента F_{11} для титаната бария ($e = 2, 7$, $\varepsilon = 25, 99$). приведены на рис. 1. Глубина залегания трещины $y = -2h_1 = -0, 5$. Безразмерная толщина пакета $H = 1, 5$. Нули функций обозначены сплошными линиями, полюса — пунктирными.

Функции $F_{ij}(\alpha, \Omega)$ имеют следующее асимптотическое поведение при $|\alpha| \rightarrow \infty$:

$$F_{ij} = \frac{1}{2} [a_{ij} + O(\alpha^{-2})] |\alpha|, \quad i, j = 1, 2.$$

Для пьезоэлектриков класса $6mm$ коэффициенты

$$a_{11} = -1, \quad a_{12} = a_{21} = -e, \quad a_{22} = 1.$$

При указанных свойствах ядер система (3.3) однозначно разрешима в $L_p(-a, a)$. Критерии единственности формулируются по аналогии с [4].

Предположим, что решение $\Delta \mathbf{w}(x)$ СИУ (3.3) построено. Применяя обратное преобразование Фурье к (3.1), (3.2), получим интегральные представления

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(x) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta} \mathbf{K}_{12}(\alpha) \Delta \mathbf{W}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$-\infty < x < \infty,$$

$$\mathbf{t}_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta} \mathbf{K}_{22}(\alpha) \Delta \mathbf{W}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (3.5)$$

$$|x| > a,$$

описывающие сдвиговые пьезоактивные волны, возникающие на поверхности среды и сдвиговые напряжения на границе раздела вне области расположения трещины.

В формулах (3.4), (3.5)

$$\Delta \mathbf{W}(\alpha) = \int_{-a}^a \Delta \mathbf{w}(x) e^{i\alpha x} dx,$$

Не нарушая общности, зададим $t_1(x) = B_1 e^{-i\eta x}$, $d_1(x) = B_2 e^{-i\eta x}$, $B_1, B_2, \eta = \text{const}$.

Предположим, что построены решения $u_0(x), v_0(x)$ следующих интегральных уравнений:

$$\int_{-a}^a k_0(x - \xi) u_0(\xi) d\xi = e^{-i\eta x}, \quad (3.6)$$

$$|x| \leq a,$$

$$\int_{-a}^a s_0(x - \xi) v_0(\xi) d\xi = e^{-i\eta x}, \quad |x| \leq a. \quad (3.7)$$

Ядрами интегральных операторов в (3.6), (3.7) являются

$$k_0(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\delta} F_1(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$s_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta} F_2(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

где

$$F_1 = \frac{\sigma(1 + \kappa_0^2) \text{th}(2\sigma h_1)}{1 + \text{th}(2\sigma h_1) \text{th}(2\sigma h_2)},$$

$$F_2 = \frac{\alpha \text{th}(2\alpha h_1)}{1 + \text{th}(2\alpha h_1) \text{th}(2\alpha h_2)}.$$

В (3.7) контур δ можно совместить с вещественной осью, так как подынтегральная функция ядра регулярна на всей вещественной оси.

Решение СИУ (3.3) в силу линейности задачи будет связано с решениями $u_0(x), v_0(x)$ соотношениями

$$\Delta w(x) = \left(B_1 + \frac{e}{\varepsilon} B_2 \right) u_0(x), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(x) &= \frac{1}{\varepsilon} B_2 [v_0(x) + \kappa_0^2 u_0(x)] + \\ &+ \frac{e}{\varepsilon} B_1 u_0(x). \quad (3.9) \end{aligned}$$

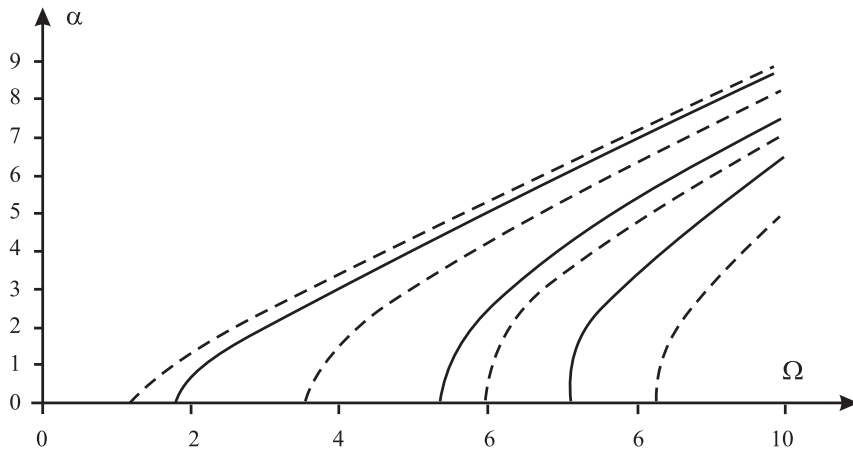


Рис. 1

Таким образом, скачки перемещения $\Delta w(x)$ и электрического потенциала $\Delta\varphi(x)$ определяются формулами (3.8), (3.9), если построены решения интегральных уравнений (3.6), (3.7).

Решение интегрального уравнения I рода вида (3.6) получено методом фиктивного поглощения в [5] и используется в настоящей работе. Решение ИУ (3.7) может быть найдено из решения ИУ (3.6) при $\Omega = 0$.

Зная скачки перемещения $\Delta w(x)$ и электрического потенциала $\Delta\varphi(x)$ на берегах трещины, можно по формулам (3.4), (3.5) определить электроупругое волновое поле со смещением w_1 , возникающее на поверхности среды, и сдвиговые напряжения t_1 в плоскости расположения трещины вне области $|x| > a$, а также другие динамические характеристики задачи, используя соотношения (2.5)–(2.7).

Предположим, что поверхность трещины неэлектропроводна. Тогда должны выполняться условия непрерывности электрического потенциала и нормальной составляющей вектора электрической индукции при переходе через трещину. Это означает, что в СИУ (3.3) следует положить $\Delta\varphi = 0$. В этом случае имеем одно интегральное уравнение

$$\int_{-a}^a k_1(x-\xi) \Delta w(\xi) d\xi = t_1(x), \quad (3.10)$$

$$|x| \leq a$$

с ядром

$$k_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta} F_{11}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (3.11)$$

$$F_{11}(\alpha) = \kappa_0^2 F_2(\alpha) - F_1(\alpha).$$

относительно неизвестной функции $\Delta w(x)$ при заданном значении сдвиговых усилий $t_1(x)$ в области $|x| \leq a$.

Приближенное решение ИУ (3.10) построено методом фиктивного поглощения для правой части $t_1 = e^{-i\eta x}$ и в трансформантах Фурье имеет вид

$$\Delta W(\alpha, \eta) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + B^2}}{F_{11}(\alpha)} \left(T_{\eta}(\alpha) - \sum_{k=1}^{2n} c_k \left(e^{i\alpha a} \frac{F(\alpha, a - x_k)}{\sqrt{B + i\alpha}} + e^{-i\alpha a} \frac{F(-\alpha, a + x_k)}{\sqrt{B - i\alpha}} \right) \right). \quad (3.12)$$

Здесь приняты обозначения работы [5], при этом область, занимаемая трещиной $(-a, a)$. В решении (3.12) подынтегральная функция ядра F_{11} представлена аппроксимацией

$$F_{11}(\alpha) = -\frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + B^2} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha^2 - z_k^2}{\alpha^2 - p_k^2},$$

где z_k, p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — соответственно вещественные и комплексные нули и полюса функции $F_{11}(\alpha)$, расположенные выше контура δ . Параметр B выбирается в соответствии с методом фиктивного поглощения. Выполняя обращение в формуле (3.12), находим скачок перемещений $\Delta w(x)$.

Электроупругое волновое поле на поверхности среды будет описываться формулой (3.4), которая с учетом $\Delta\varphi(x) = 0$, $\Delta w(x) \neq 0$ и после определения $\Delta W(\alpha)$, запишется в виде

$$w_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta} A_1(\alpha) \Delta W(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (3.13)$$

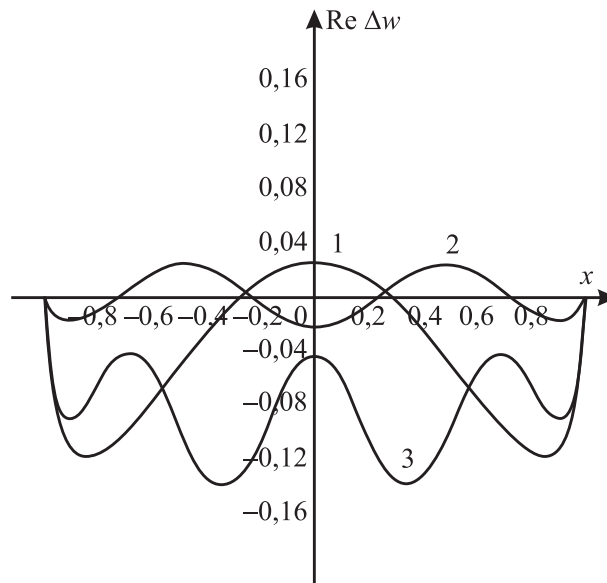


Рис. 2

Подставляя (3.12) в (3.13) и вычисляя интеграл с помощью теории вычетов, получаем простую формулу для расчета пьезоактивных упругих волн, распространяющихся по поверхности среды

$$w_1(x) = \frac{i}{2H} \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j \operatorname{ch}(2\sigma_j h_2)}{p_j \operatorname{sh}(2\sigma_j H)} \sum_{k=1}^{2n} c_k e^{ip_j(x-x_k)},$$

$$x - x_k > 0,$$

$$\sigma_j = \sqrt{p_j^2 - \frac{\Omega^2}{1 + \kappa_0^2}}.$$

Приведем некоторые численные результаты, полученные на основе решения (3.12). Рис. 2 иллюстрирует поведение реальной части амплитуды скачка сдвиговых перемещений $\Delta w(x)$ для трещины поперечного сдвига шириной $2a = 2$, расположенной на глубине $y = -2h_1 = -0,25$ в электроупругом слое толщины $H = 0,75$. Все величины приведены в безразмерных параметрах.

На берегах трещины действуют единичные напряжения ($\eta = 0$). Кривые 1–3 соответствуют значениям приведенной частоты $\Omega = 3, 7, 10$ соответственно. В качестве электроупругого материала выбран титанат

бария. На графике видно увеличение амплитуды с ростом частоты колебаний и равенство нулю скачка перемещений на краях трещины, что подтверждает правильность полученных результатов.

Литература

1. Прягина О.Д., Смирнова А.В. К исследованию динамики пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // ДАН. 2006. Т. 411. № 3. С. 330–333.
2. Ворovich И.И., Бабешко В.А., Прягина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
3. Прягина О.Д., Смирнова А.В. Динамические задачи для составных пьезоэлектриков с системой электродов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 1. С. 59–65.
4. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
5. Кардовский И.В., Прягина О.Д. Метод фиктивного поглощения для плоских задач об интерфейсных трещинах // ДАН. 2006. Т. 410. № 6. С. 759–762.

Ключевые слова: электроупругая двухслойная среда, трещина, сдвиговые колебания.

Статья поступила 11 июня 2009 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Березин Н.С., Прягина О.Д., Смирнова А.В., 2009