УДК 532.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СМОЧЕННОЙ ДЛИНЫ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ, ГЛИССИРУЮЩЕГО ПО ПОВЕРХНОСТИ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

Иванисова О. В.[1]***, Колесникова Ю. Н.***[2]

DETERMINATION OF THE WETTED LENGTH OF A THIN PROFILE GLIDING ON THE SURFACE OF A PONDERABLE FLUID

Ivanisova O. V., Kolesnikova Yu. N.

The article describes the technique of solving a nonlinear problem of a glider movement on the surface of ponderable fluid of infinite and finite depth. The problem about the steady gliding of a slightly bent plate with the given load and the given displacement angle is solved by the method of integral equations. The method of discrete vortexes is used to solve integral equations numerically. The dependencies of the wetted length on the Froude number have been obtained for various values of the displacement angle and sagging of the glider bottom.

Keywords: gliding, wetted length, integral equation, method of discrete vortexes.

Введение

Теория плоского установившегося движения глиссера со слабоискривленной поверхностью, развитая в [1–4], позволяет рассчитывать гидродинамические характеристики глиссера при заданной смоченной длине днища.

В последние годы появились работы, в которых смоченная длина глиссирующей пластинки заранее неизвестна, она находится исходя из заданной величины внешней нагрузки как с заданным углом атаки [5], так и со свободным углом хода [6, 7].

В [5, 6] для решения проблемы используется специальная процедура нелинейного программирования [8], в то время как в [7] применен достаточно простой метод секущих. В данной работе подход, развитый в [7], используется для исследования влияния слабого искривления днища глиссера и конечности глубины на гидродинамические характеристики и смоченную длину днища.

1. Система интегральных уравнений

Использование вихревого метода и преобразования Фурье приводит краевую задачу глиссирования слабоискривленной поверхности по «тихой» воде в постановке [1] к сингулярному интегральному уравнению для определения избыточного давления на нижнюю поверхность днища

$$\int\limits_{-l/2}^{l/2} \gamma(s)\, k(x-s)\, ds = V_\infty(\alpha + \beta x), \quad (1.1)$$

где $\gamma(s) = \frac{P_- - P_\infty}{\rho V_\infty^2}$ — интенсивность вихрей, моделирующих днище глиссера, P_- и P_∞ — давление жидкости на нижнюю поверхность днища и на бесконечности, ρ — плотность жидкости, l — смоченная длина профиля, V_∞ — постоянная горизонтальная скорость движения профиля, α — угол атаки, $\beta = 4f/l$, f — максимальная стрелка прогиба профиля.

В рассматриваемом случае глиссирования профиля по поверхности весомой жидкости бесконечной глубины ядро $k(x)$ представляет собой обратное преобразование Фурье обобщенной комплекснозначной функции

$$K(u) = -\frac{1}{i}\operatorname{sign} u\left(1 + \frac{\nu}{|u| - \nu}\right),$$

[1]Иванисова Ольга Владимировна, преподаватель кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: zah-ivanisov@yandex.ru.

[2]Колесникова Юлия Николаевна, аспирант кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: julia-koles@yandex.ru.

$$\nu = \frac{gl}{V_\infty^2} = \frac{1}{\mathrm{Fr}_l^2},$$

где $\mathrm{Fr}_l = V_\infty/\sqrt{gl}$ — число Фруда по смоченной длине глиссера.

Используя теорию вычетов и обходя действительные полюсы $u = \pm\nu$ сверху, получим выражение для функции ядра $k(x)$

$$\text{при } x < 0 \quad k(x) = \frac{1}{\pi x} + I(x),$$
$$\text{при } x > 0 \quad k(x) = \frac{1}{\pi x} - I(x) + 2\nu\cos\nu x.$$

Здесь

$$I(x) = \frac{\nu^2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-|x|t}}{t^2+\nu^2}dt.$$

Для определения неизвестной смоченной длины l при заданном угле хода α используется уравнение равновесия сил

$$\int\limits_{-l/2}^{l/2} \gamma(s)\,ds = \nu a, \qquad (1.2)$$

где $a = \sqrt{\frac{P}{\rho g}}$, P — нагрузка на днище глиссера.

Для того чтобы выявить параметры, от которых зависит решение, приведём полученные уравнения (1.1), (1.2) к безразмерному виду. Безразмерные величины обозначим чёрточкой сверху. Полагая

$$x = a\overline{x}, \quad s = a\overline{s}, \quad \gamma(s) = V_\infty\overline{\gamma}(\overline{s}),$$

$$\nu = \frac{1}{a}\overline{\nu}, \quad l = a\overline{l},$$

интегральные уравнения приводятся к виду

$$\int\limits_{-\overline{l}/2}^{\overline{l}/2} \overline{\gamma}(\overline{s})\,k(\overline{x}-\overline{s})\,d\overline{s} = \alpha + \beta\overline{x}, \qquad (1.3)$$

$$\int\limits_{-\overline{l}/2}^{\overline{l}/2} \overline{\gamma}(\overline{s})\,d\overline{s} = \overline{\nu}. \qquad (1.4)$$

В дальнейшем черточки опустим.

2. Метод решения системы уравнений и результаты решения

Для численного решения системы (1.3), (1.4) применим метод дискретных вихрей [9] по схеме, когда $\gamma(x)$ принадлежит классу функций, неограниченных на передней кромке профиля и ограниченных на выходной. Тогда систему интегральных уравнений (1.3), (1.4) можно заменить системой алгебраических уравнений

$$\frac{l}{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma(s_j)\,k(x_q - s_j) = \alpha + \beta x_q, \qquad (2.1)$$

$$\frac{l}{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma(s_j) = \nu, \qquad (2.2)$$

где

$$x_q = -\frac{l}{2} + \left(q - \frac{1}{4}\right)\frac{l}{N}, \quad q = \overline{1,N},$$

$$s_j = -\frac{l}{2} + \left(j - \frac{3}{4}\right)\frac{l}{N}, \quad j = \overline{1,N}.$$

При этом смоченная длина определяется из нелинейного относительно l уравнения (2.2) методом секущих

$$l_{n+1} = l_n - \frac{F(l_n)(l_n - l_{n-1})}{F(l_n) - F(l_{n-1})},$$

где

$$F(l) = \frac{l}{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma(s_j) - \nu.$$

Для каждого приближенного значения смоченной длины l_n вычисляются $\gamma(s_j)$ как решения системы линейных алгебраических уравнений (2.1), а следующее приближение l_{n+1} находится по методу секущих.

Результаты расчёта смоченной длины l при $\alpha = 3°$, $5°$, $10°$ и $\beta = 0$ представлены на рис. 1. Расчёты показывают, что при малых числах Фруда смоченная длина увеличивается, а затем уменьшается, стремясь к нулю при больших числах Фруда. Рис. 2 иллюстрирует влияние слабого искривления днища глиссера. Знак «+» при задании угла β, характеризующего искривление днища, соответствует выпуклости вверх. При больших числах Фруда малое искривление выпуклостью вверх уменьшает смоченную длину, а при малых — увеличивает. Из рис. 2

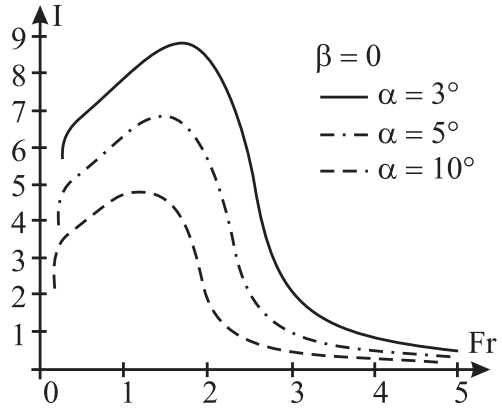

Рис. 1. Зависимость смоченной длины от числа Фруда при разных углах атаки α

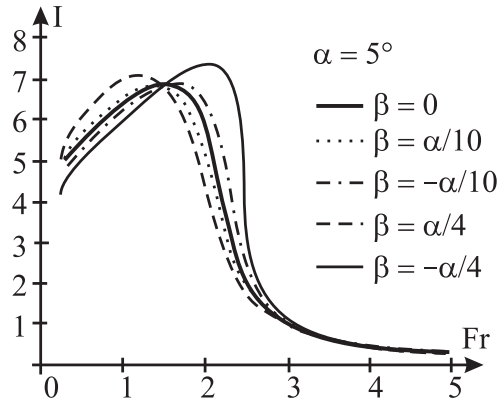

Рис. 2. Зависимость смоченной длины от числа Фруда при разных углах β

так же видно, что существуют такие числа Фруда, при которых выпуклость вниз оказывает противоположное влияние на смоченную длину днища глиссера, чем выпуклость вверх.

3. Случай глиссирования профиля по поверхности канала

Рассмотрим теперь краевую задачу стационарного глиссирования тонкого твердого профиля бесконечного размаха по поверхности канала постоянной конечной глубины h в постановке [1]. С помощью преобразования Фурье данная задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (1.1) для определения избыточного давления на нижнюю поверхность профиля. Для определения смоченной длины l необходимо к интегральному уравнению (1.1) добавить уравнение равновесия сил (1.2).

Ядро интегрального уравнения (1.1) $k\,(x)$ вычислено с использованием процедуры замыкания контура интегрирования и теории вычетов. В рассматриваемом случае глиссирования профиля по поверхности канала конечной глубины h получается, что при $\nu h > 1$ образ Фурье

$$K\,(u) = \frac{1}{i}\,\frac{u\,\mathrm{th}\,(uh)}{u - \nu\,\mathrm{th}\,(uh)}$$

имеет два симметричных действительных полюса $-u_0$ и u_0, которые выходят на действительную ось с нижней полуплоскости, и бесконечное число симметричных чисто мнимых полюсов первого порядка $-u_k$ и u_k, $k = 1, 2, \ldots$. При $\nu h \leqslant 1$ действительные полюса отсутствуют, но появляются два дополнительных симметричных мнимых полюсы вблизи начала координат.

Тогда при $\nu h > 1$

$$k(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n \sin\,(2u_n h)\,e^{-u_n|x|}}{\cos^2\,(u_n h) - \nu h} - \\ - \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sign}\,x)\frac{u_0\,\mathrm{sh}(2u_0 h)}{\mathrm{ch}^2\,(u_0 h) - \nu h}\cos(u_0 x),$$

а при $\nu h \leqslant 1$

$$k(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n \sin\,(2u_n h)\,e^{-u_n|x|}}{\cos^2\,(u_n h) - \nu h},$$

где $\nu = 1/\mathrm{Fr}_a^2$, $\mathrm{Fr}_a = V_\infty/\sqrt{ga}$ — число Фруда по длине профиля a.

Описанный в п. 2 метод решения системы уравнений реализован для данной задачи на языке программирования Fortran. На рис. 3, 4 приведены результаты расчетов смоченной длины в зависимости от чисел Фруда для различных значений глубины канала h и угла атаки α ($\beta = 0$).

Из полученных данных видно, что предложенная методика неприменима вблизи критического числа Фруда ($\nu h = 1$), гидродинамические процессы носят нелинейный характер.

Заключение

В статье предложена методика решения нелинейной задачи определения смоченной длины днища глиссера, движущегося по поверхности весомой жидкости бесконечной и

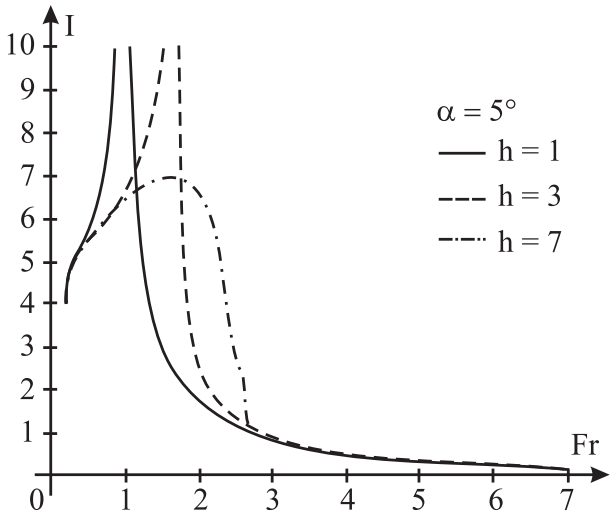

Рис. 3. Зависимость смоченной длины от числа Фруда при разных глубинах h

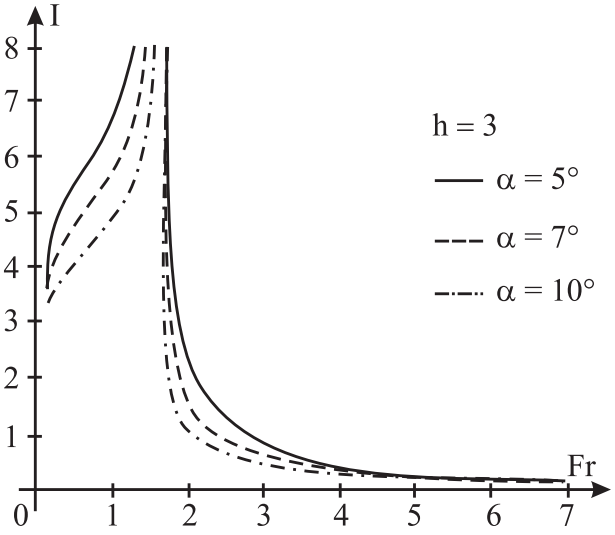

Рис. 4. Зависимость смоченной длины от числа Фруда при разных углах атаки α

конечной глубины. Результаты работы могут быть использованы для оценки смоченной длины и рабочих углов хода глиссера при заданной нагрузке на этапе предварительного проектирования.

Литература

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1978. 550 с.
3. *Чаплыгин Ю. С.* Глиссирование плоской пластинки бесконечного размаха по поверхности тяжелой жидкости // Труды ЦАГИ. 1940. В. 508. С. 3–40.
4. *Гуревич М. И.* Глиссирование дужки круга по поверхности тяжелой жидкости // Технические заметки ЦАГИ. 1937. В. 153. С. 1–6.
5. *Dovgiy S. A., Efremov I. I., Makasyeyev M. V.* Some problems of a planning theory // High speed hydrodynamics / Proc. Of Int. Summer Scientific School. June 16–23. 2002. Cheboksary, Russia. Comput. Public.: Chebotksary, Russia / Washington, USA. 2002. P. 241–248.
6. *Макасеев М. В.* Установившееся глиссирование пластинки по поверхности весомой жидкости с заданной нагрузкой и свободным углом хода // Прикладная гидромеханика. 2003. Т. 5. №2. С. 73–75.
7. *Efremov I. I.* Some new results of the line theory of planning on a heavy fluid surface // High speed hydrodynamics / Proc. Of Second Int. Summer Scientific School. June 27 – July 3. 2004. Cheboksary, Russia. Comput. Public.: Cheboksary, Russia / Washington, USA. 2004. P. 151–155.
8. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.
9. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.

Ключевые слова: глиссирование, смоченная длина, интегральное уравнение, метод дискретных вихрей.

Статья поступила 20 марта 2009 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Иванисова О. В., Колесникова Ю. Н., 2009