

УДК 539.3

ФАЗОВЫЕ СКОРОСТИ ВОЛН ЛЭМБА В МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТАХ¹

Кармазин А. В.², Кириллова Е. В.³, Сыромятников П. В.⁴

PHASE SPEEDS OF LAMB WAVES IN MULTILAYERED ANISOTROPIC COMPOSITES

Karmazin A. V., Kirillova E. V., Syromyatnikov P. V.

Dispersive properties of two symmetric composites from carbon-epoxy AS4/3502 considered as multilayered packages of anisotropic layers are numerically investigated. The analysis is reduced to the research of real poles of the Fourier symbol of Green's matrix of the given media for various directions and frequencies. The obtained results are compared with the known theoretical and experimental data.

Keywords: composite, anisotropy, Lamb waves, phase speed, dispersion, Green's matrix, Fourier transform.

В последнее время композитные материалы все чаще находят свое применение в автомобильной промышленности, самолетостроении и других областях. Все более широкое использование волокнистых композитов связано с высокой прочностью и легкостью изготавливаемых из них конструкций. Такие конструкции на 50 % легче аналогичных, изготовленных из стали, и на 25 % — изготовленных из алюминия. К недостаткам можно отнести большие расходы на изготовление. Моделирование конструкций из волокнистых композитов также связано с высокими вычислительными затратами. Волокнистые композиты представляют собой структуры, механические свойства которых зависят от ориентации волокон и их свойств, а также вещества, в которое эти волокна помещаются. Как упругие материалы они обладают анизотропией.

Одна из важнейших задач, стоящих перед исследователями — создание новых эффективных вычислительных методов для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных ма-

териалов. Все более актуальным является также разработка методов неразрушающего контроля [1, 2] и мониторинга технического состояния [3], которые, как правило, основаны на анализе распространения упругих волн в слоистых структурах.

Наибольшие успехи достигнуты в исследовании свойств изотропных материалов [4, 5]. Множество публикаций посвящено рассмотрению задач о колебаниях слоистых анизотропных сред [5–7]. Для расчета воздействия нагрузок на композиты зачастую инженеры-разработчики ограничиваются лишь достаточно простым и удобным в применении методом конечных элементов, который, как показывает практика, не всегда может быть применен или же требует слишком больших временных затрат. Невозможность применения общего конечноэлементного подхода привела к рассмотрению адаптированного для задачи распространения волн полуаналитического метода конечных элементов [8]. Для анализа распространения волн используются также метод конечных разностей, метод граничных элемен-

¹Работа выполнена при поддержке Министерства науки и образования Германии, грантов РФФИ (09-08-96527-р-юг, 09-08-96522-р-юг, 09-08-00294, 09-08-00170, 09-01-96507-р-юг, 08-08-00447, 08-01-99013-р-о), программ П9, П22 отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

²Кармазин Александр Владимирович, аспирант кафедры численного анализа Кубанского государственного университета; e-mail: karmazin@itm.uni-karlsruhe.de.

³Кириллова Евгения Вадимовна, канд. физ.-мат. наук, профессор факультета информатики Технического университета г. Висбаден, Германия; e-mail: kirillova@web.de.

⁴Сыромятников Павел Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: syromyatnikov@math.kubsu.ru.

тов и их модификации, метод преобразований Фурье [6, 9]. Большое количество публикаций и исследований по данной тематике в последние годы свидетельствует о том, что по-прежнему актуальной остается разработка новых аналитических и численно-аналитических методов анализа волновых процессов в анизотропных средах.

Одним из первых этапов в решении таких задач, как правило, является исследование дисперсионных свойств материала. В зависимости от применяемого метода получают различные формы дисперсионных уравнений, решение которых дает фазовые скорости или волновые числа — величины, характеризующие упругую среду вне зависимости от источника возбуждения волн.

В данной работе анализ дисперсионных свойств упругих волноводов сводится к численному анализу вещественных полюсов символа Фурье матрицы Грина пакета анизотропных слоев.

Для однородного изотропного полупространства и слоя явный вид матрицы Грина приведен в [4, 5]. При зависимости свойств среды от глубины (стратифицированная среда [4]) или пространственных координат (анизотропия), а также в слоистых средах и средах со сложными физико-механическими свойствами (термоупругие, электроупругие, термоэлектроупругие и т. п.) построение матрицы Грина становится достаточно сложной задачей, которая успешно решена в работах [5, 6].

1. Формулировка задачи и метод исследования

Пусть среда представляет собой пакет однородных слоев

$$\left\{ -\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty, x_3^{(n+1)} \leq x_3 \leq x_3^{(n)} \right\}$$

$$n = \overline{1, N}, \quad x_3^{(1)} = 0; \quad x_3^{(N+1)} = -h$$

с упругими тензорами $C_{ijnk}^{(n)}$ и плотностями $\rho^{(n)}$. Здесь и далее верхний индекс соответствует номеру слоя.

Гармонические колебания среды возбуждаются поверхностными механическими источниками, действующими в ограниченной области Ω плоскости $x_3 = 0$, и описываются следующими уравнениями (общий множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен):

$$\frac{\partial \sigma_{jk}^{(n)}}{\partial x_k} + \rho^{(n)} \omega^2 u_j^{(n)} = 0 \quad (1.1)$$

$$(i, j, k, m = 1, 2, 3; n = \overline{1, N}),$$

$$\sigma_{ji}^{(n)} = C_{kmji}^{(n)} \frac{\partial u_m^{(n)}}{\partial x_k}. \quad (1.2)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(n)}$ — тензор напряжений, $u_j^{(n)}$ — компоненты вектора перемещений, $\rho^{(n)}$ — плотность материала, ω — круговая частота.

Граничные условия в плоскости $x_3 = x_3^{(1)} = 0$ имеют вид

$$\sigma_{j3}^{(1)} = 0, \quad (1.3)$$

$$(x_1, x_2) \in \overline{\Omega} \quad (j = 1, 2, 3).$$

В области Ω задан вектор поверхностных нагрузок \mathbf{q} :

$$q_i = q_i(x_1, x_2), \quad (1.4)$$

$$(x_1, x_2) \in \Omega \quad (i = 1, 2, 3).$$

Граничные условия в основании слоя $x_3 = x_3^{(N+1)} = -h$ могут быть различными. Рассмотрим три варианта.

Слой жестко сцеплен с недеформируемым основанием, механические смещения в основании слоя равны нулю

$$u_1^{(N)} = u_2^{(N)} = u_3^{(N)} = 0. \quad (1.5)$$

Слой имеет механически свободную нижнюю грань

$$\sigma_{13}^{(N)} = \sigma_{23}^{(N)} = \sigma_{33}^{(N)} = 0. \quad (1.6)$$

Слой лежит на жестком основании без трения

$$\sigma_{13}^{(N)} = \sigma_{23}^{(N)} = u_3^{(N)} = 0. \quad (1.7)$$

Из физических соображений необходимо выполнение условий убывания на бесконечности

$$u \rightarrow 0 \text{ при } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Методами преобразований Фурье представление решений краевых задач (1.1)–(1.8) может быть получено в виде интегралов Фурье

$$u_i^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K_{ij}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \times \\ \times Q_j(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.9)$$

$$(i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь K_{mn} — двукратное преобразование Фурье матрицы Грина k_{ij} , символ матрицы Грина $K_{mn} = F_{x_1 x_2} [k_{mn}]$. Вектор \mathbf{Q} с компонентами $Q_j = F_{x_1 x_2} [q_j]$ — образ Фурье вектора \mathbf{q} (1.4). В формуле (1.9) Γ_1, Γ_2 — контуры интегрирования, частично отклоняющиеся от вещественных осей при обходе полюсов K_{mn} в соответствии с принципом предельного поглощения [4, 5].

2. Символ Фурье матрицы Грина анизотропного упругого слоя

Опишем схему построения символа матрицы Грина однородного анизотропного слоя. Применяя двукратное преобразование Фурье к уравнениям (1.1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно трехкомпонентного вектора $\bar{\mathbf{U}} = F_{x_1 x_2} [\bar{\mathbf{u}}] = \{U_1, U_2, U_3\}^T$ — символа вектора перемещений

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{U}} + i\mathbf{B}\bar{\mathbf{U}}'_{x_3} - \mathbf{J}\bar{\mathbf{U}}''_{x_3} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь A, B, G — симметричные матрицы

$$A_{js} = -C_{nsrj}\alpha_r\alpha_n + \delta_{js}\rho\omega^2$$

$$(r, n = 1, 2; j, k, s, m = 1, 2, 3),$$

$$B_{jk} = -\alpha_n(C_{kn3j} + C_{k3nj}), \quad J_{jk} = -C_{3k3j},$$

δ_{jl} — символ Кронекера.

Умножая выражение (2.1) слева на \mathbf{J}^{-1} , относительно вектора $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, U_3, U'_1, U'_2, U'_3\}$ получаем систему первого порядка

$$\frac{d\mathbf{U}}{dx_3} = \mathbf{M}\mathbf{U} \quad (2.2)$$

с матрицей \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{I} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{J}^{-1}\mathbf{A} & \vdots & i\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где \mathbf{I}, \mathbf{O} — единичная и нулевая матрицы соответственно.

Решение системы (2.2) приводит к проблеме на собственные значения вида

$$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{p} = 0. \quad (2.4)$$

Образуем из собственных чисел λ_i и собственных векторов \mathbf{p}_i матрицы \mathbf{M} (2.3) матрицу \mathbf{L}

$$\mathbf{L}(x_3) = \{ \mathbf{p}_1 \exp(\lambda_1 x_3), \dots, \mathbf{p}_6 \exp(\lambda_6 x_3) \}, \quad (2.5)$$

столбцы которой являются фундаментальной системой решений (2.2) (предполагается, что канонический вид \mathbf{M} не содержит жордановых клеток выше первого порядка, кратность λ_i при этом может быть произвольной).

Далее, матрица \mathbf{K} является решением вспомогательной задачи — \mathbf{K} должна удовлетворять матричному уравнению (2.1), граничным условиям на поверхности слоя $x_3 = 0$

$$\mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{K}(0) \\ \mathbf{K}'_{x_3}(0) \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad (2.6)$$

с единичной матрицей \mathbf{I} в правой части и условиям на нижней грани слоя $x_3 = -h$

$$\hat{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} \mathbf{K}(-h) \\ \mathbf{K}'_{x_3}(-h) \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

Матрицы $\mathbf{R}, \hat{\mathbf{R}}$ описываются ниже. Уравнение (2.6) соответствует следующим граничным условиям:

$$F_{x_1 x_2} [\sigma_{j3}] = 1, \quad x_3 = 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Матрица \mathbf{R} в (2.6) получена двукратным преобразованием Фурье $F_{x_1 x_2}$ из выражений (1.2)

$$R_{jk} = -i\alpha_n C_{knj3}, \quad R_{j(k+3)} = C_{k3j3}, \quad (2.7)$$

$$(j, k = 1, 2, 3; n = 1, 2).$$

Будем искать \mathbf{K} в виде линейных комбинаций столбцов \mathbf{L} (2.5):

$$K_{ij} = L_{in}(x_3)W_{nj}$$

$$(i, j = 1, 2, 3; n = \overline{1, 6})$$

с неизвестной матрицей \mathbf{W} .

Первая часть системы уравнений для матрицы \mathbf{W} имеет вид

$$R_{jn}L_{nk}(0)W_{km} = \delta_{jm} \quad (2.8)$$

$$(j, m = 1, 2, 3; n, k = \overline{1, 6}).$$

Вторая часть системы уравнений для матрицы \mathbf{W} следующая:

$$\hat{R}_{jn}L_{nk}(-h)W_{km} = 0 \quad (2.9)$$

$$(j, m = 1, 2, 3; n, k = \overline{1, 6}).$$

Конкретный вид $\hat{\mathbf{R}}$ зависит от типа граничных условий (1.5)–(1.7) при $x_3 = -h$. Для случая (1.5) $\hat{\mathbf{R}}$ принимает следующие значения:

$$\hat{R}_{ij} = \delta_{ij} \\ (i = 1, 2, 3; j = \overline{1, 6}).$$

В случае (1.6) $\hat{\mathbf{R}}$ имеет вид

$$\hat{R}_{ij} = R_{ij} \\ (i = 1, 2, 3; j = \overline{1, 6}).$$

Случаю (1.7) соответствует $\hat{\mathbf{R}}$

$$\hat{R}_{ij} = R_{ij} \\ (i = 1, 2; j = \overline{1, 6}), \\ \hat{R}_{3j} = \delta_{3j}.$$

Обозначим через Δ матрицу с элементами

$$\Delta_{jk} = R_{jn} L_{nk}(0) \\ \Delta_{(j+3)k} = \hat{R}_{jn} L_{nk}(-h) \quad (2.10) \\ (j = 1, 2, 3, \quad n = \overline{1, 6}).$$

Из формул (2.8), (2.9) и (2.10) \mathbf{W} выражается следующим образом:

$$W_{ij} = \Delta_{ij}^{-1} \\ (i = \overline{1, 6}; j = 1, 2, 3),$$

что и завершает построение \mathbf{K} для слоя.

3. Символ Фурье матрицы Грина для пакета анизотропных упругих слоев

В монографии [4] разработан устойчивый алгоритм построения символа Фурье матрицы Грина многослойного изотропного полупространства, не содержащий растущих экспонент ни на одном из этапов вычислений. Описываемый далее метод является обобщением данного алгоритма на случай пакетов анизотропных слоев.

В каждом слое искомый вектор $\mathbf{U}^{(n)}$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{U}^{(n)} = \sum_{s=1}^6 t_s^{(n)} p_s^{(n)} \exp(\lambda_s^{(n)} x_3), \quad n = \overline{1, N},$$

где $\lambda^{(n)}$, $\mathbf{p}^{(n)}$ — собственные значения и собственные векторы системы (2.4) для n -го слоя.

На границах раздела слоев условия непрерывности смещений и напряжений в матричной форме принимают вид

$$\mathbf{R}^{(n)} \mathbf{U}^{(n)} \left(x_3^{(n+1)} \right) = \\ = \mathbf{R}^{(n+1)} \mathbf{U}^{(n+1)} \left(x_3^{(n+1)} \right), \quad (3.1)$$

$$U_j^{(n)} \left(x_3^{(n+1)} \right) = U_j^{(n+1)} \left(x_3^{(n+1)} \right) \\ (j = 1, 2, 3; \quad n = \overline{1, N-1}),$$

где $\mathbf{R}^{(n)}$ — (2.8), (2.9).

Относительно неизвестных векторов $\mathbf{t}^{(n)}$ равенства (3.1) приводят к линейным алгебраическим уравнениям

$$\mathbf{C}^{(n)}(x_3^{(n+1)}) \mathbf{t}^{(n)} - \\ - \mathbf{C}^{(n+1)}(x_3^{(n+1)}) \mathbf{t}^{(n+1)} = 0, \quad (3.2) \\ n = \overline{1, N-1}$$

с матрицами $\mathbf{C}^{(n)}(x_3)$:

$$\mathbf{C}^{(n)}(x_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)} \\ \tilde{\mathbf{H}}^{(n)} \end{pmatrix} \mathbf{E}^{(n)}(x_3) = \\ = \mathbf{C}^{(n)}(0) \mathbf{E}^{(n)}(x_3), \quad (3.3)$$

где $\mathbf{H}^{(n)}$ — матрица, составленная из собственных векторов систем (2.4) $p_{ij}^{(n)}$

$$H_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} \quad (i, j = \overline{1, 6}), \quad (3.4)$$

$$\tilde{H}_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} \quad (i = 1, 2, 3; j = \overline{1, 6}).$$

В формуле (3.3) $\mathbf{E}^{(n)}(x_3)$ — диагональная матрица с элементами

$$E_{ii}^{(n)} = \exp(\lambda_i^{(n)} x_3) \quad (i = \overline{1, 6}), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{C}^{(n)}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)} \\ \tilde{\mathbf{H}}^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = \{t_1^{(n)}, \dots, t_6^{(n)}\}^T.$$

Условия (2.6) на поверхности пакета слоев $x_3^{(1)} = 0$ относительно $\mathbf{t}^{(1)}$ приобретают вид

$$\mathbf{S} \mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{e}_k, \quad (3.6) \\ \mathbf{e}_k = \{\delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k}\}^T, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Соотношения (3.2) представляют собой систему с блочно-диагональной матрицей \mathbf{P}

$$\mathbf{P} \mathbf{T} = \mathbf{E}, \quad (3.7)$$

где

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & & & \mathbf{O} \\ \mathbf{P}_2^1 & -\mathbf{P}_2^2 & & \\ & & \vdots & \\ & & \mathbf{P}_N^{N-1} & -\mathbf{P}_N^N \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{P}_{N+1}^N \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_i^j = \mathbf{C}^{(j)}(x_3^{(i)}),$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1)} \\ \mathbf{t}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{t}^{(N-1)} \\ \mathbf{t}^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Соотношения (3.7) позволяют выразить $\mathbf{t}^{(n)}$ через $\mathbf{t}^{(n+1)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(n)} &= \\ &= \mathbf{C}^{(n)}(x_3^{(n+1)})^{-1} \mathbf{C}^{(n+1)}(x_3^{(n+1)}) \mathbf{t}^{(n+1)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

и последовательно все $\mathbf{t}^{(n)}$ через $\mathbf{t}^{(N)}$. В частности, для $\mathbf{t}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(1)} &= \left(\mathbf{C}^{(1)}(x_3^{(2)}) \right)^{-1} \mathbf{C}^{(2)}(x_3^{(2)}) \times \\ &\quad \times \left(\mathbf{C}^{(2)}(x_3^{(3)}) \right)^{-1} \mathbf{C}^{(3)}(x_3^{(3)}) \dots \\ &\quad \left(\mathbf{C}^{(N-1)}(x_3^{(N)}) \right)^{-1} \mathbf{C}^{(N)}(x_3^{(N)}) \mathbf{t}^{(N)} \equiv \\ &\quad \equiv \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{t}^{(N)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для нахождения $\mathbf{t}^{(N)}$ подставляем (3.9) в (3.6) и, с учетом последнего уравнения (3.7), получаем систему

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{D}} \\ \mathbf{C}^{(N)}(x_3^{(N+1)}) \end{pmatrix} \mathbf{t}^{(N)} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$(k = 1, 2, 3).$$

После решения (3.10) остальные $\mathbf{t}^{(n)}$ определяются из соотношений (3.8). На этом основная часть алгоритма вычисления матрицы \mathbf{K} завершается. Дальнейшие преобразования необходимы для расширения диапазона аргументов α , ω , в котором вычисления матрицы \mathbf{K} остаются значимыми. Растущие при увеличении α , ω показатели экспонент $\lambda^{(n)}$ (2.4), входящие в матрицы \mathbf{C} , \mathbf{E} быстро приводят к переполнению разрядных сеток при машинных вычислениях. Необходимость в такого рода преобразованиях часто

появляется при непосредственных вычислениях контурных интегралов, оценке асимптотик и т. д.

Введем новые неизвестные $\tilde{\mathbf{S}}^{(n)}$

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{G} \left(x_3^{(n+1)} \right) \tilde{\mathbf{S}}^{(n)},$$

где \mathbf{G} — диагональная матрица:

$$G_{ii} = \exp \left((\hat{\lambda}^{(n)} - \lambda_i^{(n+1)}) x_3^{(n+1)} \right) \quad (3.11)$$

$$(i = \overline{1, 6}).$$

В последней формуле $\hat{\lambda}^{(n)}$ — собственное число системы (2.4) для n -го слоя с наибольшей действительной частью. Данная замена приводит к выносу экспонент из матриц $\mathbf{C}^{(n)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(n)} \left(x_3^{(n+1)} \right) \mathbf{t}^{(n)} &= \\ &= \exp \left(\hat{\lambda}^{(n)} x_3^{(n+1)} \right) \mathbf{C}^{(n)}(0) \tilde{\mathbf{S}}^{(n)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(n+1)} \left(x_3^{(n+1)} \right) \mathbf{t}^{(n+1)} &= \\ &= \exp \left(\hat{\lambda}^{(n+1)} x_3^{(n+1)} \right) \mathbf{C}^{(n+1)}(0) \mathbf{E}^{(n+1)} \tilde{\mathbf{S}}^{(n+1)}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{E}^{(n+1)}$ — диагональная матрица с элементами

$$\begin{aligned} E_{ii}^{(n+1)} &= \\ &= \exp \left(\left(\hat{\lambda}^{(n+1)} - \lambda_i^{(n+1)} \right) \left(x_3^{(n+2)} - x_3^{(n+1)} \right) \right) \end{aligned}$$

$$(i = \overline{1, 6}).$$

Так как

$$\operatorname{Re} \hat{\lambda}^{(n+1)} \geq \operatorname{Re} \lambda_j^{(n+1)} \text{ и } x_3^{(n+2)} - x_3^{(n+1)} < 0,$$

то элементы $\mathbf{E}^{(n+1)}$ по модулю не превышают единицы.

Ниже описывается аналогичный приведенному в [4] алгоритм построения символа матрицы Грина для пакета слоев, полученный на основе указанной замены и позволяющий избавиться от растущих экспонент на

всех этапах вычислений.

1. $\mathbf{D}_n = \left(\mathbf{C}^{(n)}(0)\right)^{-1} \mathbf{C}^{(n+1)}(0) \mathbf{E}^{(n+1)}$
 $(n = \overline{1, N-1}), N \geq 2,$
2. $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \dots \mathbf{D}_{N-1},$
3. $\mathbf{S}_N = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_k \\ 0 \end{pmatrix} =$
 $= \left(\begin{array}{c} \mathbf{S}\mathbf{G} \begin{pmatrix} x_3^{(2)} \\ \end{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{C}^{(N)} \begin{pmatrix} x_3^{(N+1)} \\ \end{pmatrix} \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} x_3^{(N+1)} \\ \end{pmatrix} \end{array} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_k \\ 0 \end{pmatrix}$
 $(k = 1, 2, 3),$
4. $\mathbf{S}_n = \mathbf{D}_n \mathbf{S}_{n+1} \quad (n = \overline{N-1, 1}),$
5. $\mathbf{U}^{(n)}(x_3) = \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{Y}^{(n)}(x_3) \mathbf{S}_n.$

(3.12)

Здесь $\mathbf{Y}^{(n)}$ — диагональная матрица

$$Y_{ii}^{(n)} = \exp(\lambda_i^{(n)} x_3 + (\hat{\lambda}^{(n)} - \lambda_i^{(n)}) x_3^{(n+1)} - \Sigma_n)$$

$$(i = \overline{1, 6})$$

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\hat{\lambda}^{(k+1)} \hat{\lambda}^{(k)}) x_3^{(k+1)}, \quad \Sigma_1 = 0, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{S}_n = \tilde{\mathbf{S}}_n \exp(\Sigma_n).$$

Элементы матриц $\mathbf{H}^{(n)}$, \mathbf{G} даются формулами (3.4) и (3.11) соответственно. Последнюю формулу (3.12) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{U}^{(n)}(x_2) = \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{Y}^{(n)}(x_3) \mathbf{D}_n \dots$$

$$\dots \mathbf{D}_{N-1} \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектору $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_k \\ 0 \end{pmatrix}$ соответствует столбец матрицы Грина, поэтому для слоя с номером n

$$\mathbf{K}(x_3) = \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{Y}^{(n)}(x_3) \mathbf{D}_n \mathbf{D}_{n+1} \dots$$

$$\dots \mathbf{D}_{N-1} \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

$$x_3^{(n+1)} \leq x_3 \leq x_3^{(n)},$$

где \mathbf{I} , \mathbf{O} — единичная и нулевая матрицы соответственно.

Обозначим через $\tilde{\mathbf{D}}_n$ матрицу

$$\tilde{\mathbf{D}}_n = \tilde{\mathbf{Y}}^{(n)} \mathbf{D}_n \mathbf{D}_{n+1} \dots \mathbf{D}_{N-1} \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\mathbf{Y}}^{(n)}$ — диагональная матрица с элементами

$$\tilde{Y}_{ii}^{(n)} = \exp((\hat{\lambda}^{(n)} - \lambda_i^{(n)}) x_3^{(n+1)} - \Sigma_n),$$

$$i = \overline{1, 6}.$$

Здесь Σ_n дается соотношениями (3.13). Теперь формула (3.14) приобретает окончательный вид

$$\mathbf{K}(x_3) = \mathbf{K}^{(n)}(x_3) = \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{E}^{(n)}(x_3) \tilde{\mathbf{D}}_n,$$

$$x_3^{(n+1)} \leq x_3 \leq x_3^{(n)}.$$

4. Численные примеры

Далее рассматривается задача (1.1)–(1.4) с граничными условиями (1.6), когда нижняя граница пакета слоев свободна от напряжений.

В такой постановке волновые поля, возбуждаемые в композите, представляют собой обобщенные волны Лэмба [2, 12], определяемые механическими свойствами слоев, вектором прикладываемой нагрузки $q_j(x, y)$ (1.4) и формой области Ω .

При переходе к системе координат

$$x_1 = r \cos \beta, \quad x_2 = r \sin \beta, \quad x_3 = z,$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \beta = \arctg \frac{x_2}{x_1},$$

$$\alpha_1 = \alpha \cos \gamma, \quad \alpha_2 = \alpha \sin \gamma,$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \gamma = \arctg \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

интегральное представление (1.9) вектора механических смещений точек среды $\mathbf{u}(r, \beta, z)$ можно представить в виде [4, 5]

$$u_i^{(n)}(r, \beta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} K_{ij}^{(n)}(\alpha, \gamma, z) Q_j(\alpha, \gamma) \times$$

$$\times \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \beta)) \alpha d\alpha d\gamma,$$

$$m, n = 1, 2, 3,$$

где Γ — контур интегрирования, частично отклоняющийся от вещественной оси при обходе особенностей K_{mn} в соответствии с принципом предельного поглощения [4, 5].

В пространственной постановке дисперсионное уравнение для волн Лэмба в пластине из материала с произвольной анизотропией было получено в работе [12].

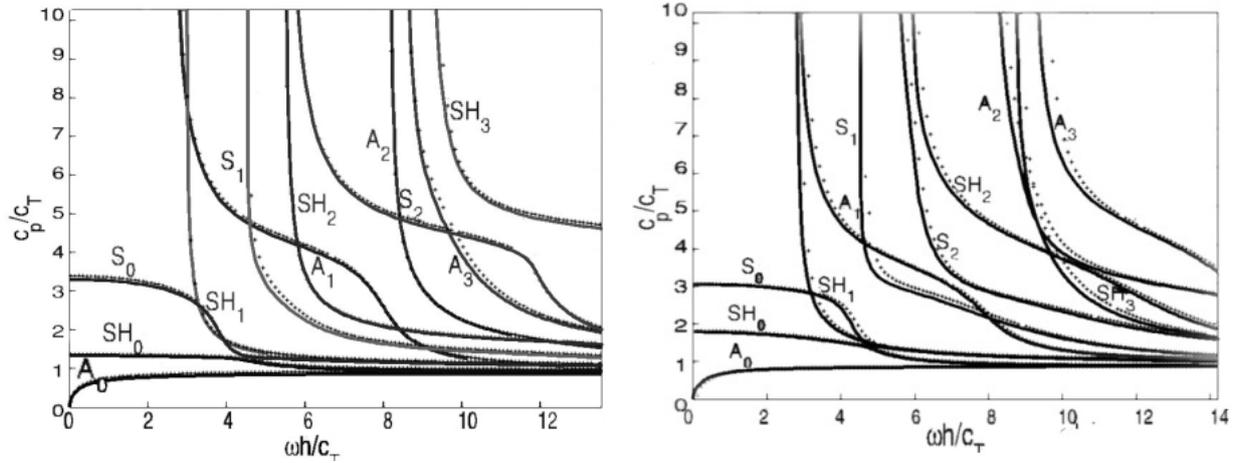


Рис. 1

В рассматриваемом случае дисперсионные свойства пакета слоев определяются нулями определителя системы (3.7) [4]. Применяя правило Крамера для решения систем (3.7), получим

$$K_{ij}^{(n)}(\alpha, \gamma, x_3, \omega) = \frac{1}{\det \mathbf{P}(\alpha, \gamma, \omega)} \tilde{K}_{ij}^{(n)}(\alpha, \gamma, x_3, \omega).$$

Элементы блочных матриц \mathbf{S} , $\mathbf{C}^{(i)}(x_3^{(j)})$, входящих в состав \mathbf{P} , непрерывны, поэтому и $\tilde{K}_{ij}^{(n)}$ как алгебраические дополнения соответствующих элементов \mathbf{P} — непрерывные функции. Тогда из последнего соотношения следует, что полюсы элементов матрицы \mathbf{K} удовлетворяют дисперсионному уравнению

$$\det \mathbf{P}(\alpha, \gamma, \omega) = 0. \quad (4.1)$$

Для поиска корней уравнения (4.1) использовался алгоритм, основанный на методе Мюллера [13]. Этот метод также позволяет отыскать характеристические поверхности в пространстве (γ, ω) для заданного диапазона частот ω . Сечение полученных поверхностей плоскостью $\gamma = \gamma_0$ дает дисперсионные кривые материала для выбранного направления γ_0 . Сечение дисперсионных поверхностей плоскостью $\omega = \omega_0$ дает кривые, показывающие изменение волновых чисел в зависимости от направления $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

В расчетах рассматривались два симметричных композиционных материала, некоторые волновые свойства которых исследованы в статье [7] теоретически, численно и экспериментально. Первый — четырехслойный I:

[+45/-45/-45/+45], второй — восьмислойный II: [+45/-45/0/+90/+90/0/-45/+45]. Запись структуры композита в виде $[\varphi_1/\dots/\varphi_m/\dots/\varphi_n]$ означает, что каждый слой с номером $m = 1, \dots, n$ повернут на соответствующий угол φ_m относительно выбранной оси. Каждый из слоев представлен ортотропным материалом AS4/3502, повернутым вокруг оси x_3 на соответствующий угол относительно исходной установки. При поворотах тензор упругих модулей пересчитывается известным образом [14]

$$C_{ijkl}^{(n)} = d_{pi}d_{qj}d_{rk}d_{sm}C'_{pqrs}{}^{(n)},$$

где $C'_{pqrs}{}^{(n)}$ — тензор модулей упругости в исходной системе координат, $C_{ijkl}^{(n)}$ — тензор модулей упругости в повернутой системе координат, d_{ij} — матрица поворота.

В работе [7] упругие модули материала AS4/3502 заданы в виде инженерных констант [10]. Переход от инженерных констант к упругим модулям выполняется согласно формулам, описанным в [10]. Приведем плотность и пересчитанные значения упругих модулей для данного материала

$$\begin{aligned} C_{11} &= 1,308, & C_{12} &= C_{13} = 0,05263, \\ C_{22} &= C_{33} = 0,1299, & C_{23} &= 0,04556, \\ C_{44} &= 0,0375, \\ C_{55} &= C_{66} = 0,0597(\times 10^{11} \text{Па}), \\ \rho &= 1578 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Переход от матрицы упругих модулей к тензору осуществляется по формулам [14]

$$C_{ijnm} \leftrightarrow C_{ab}$$

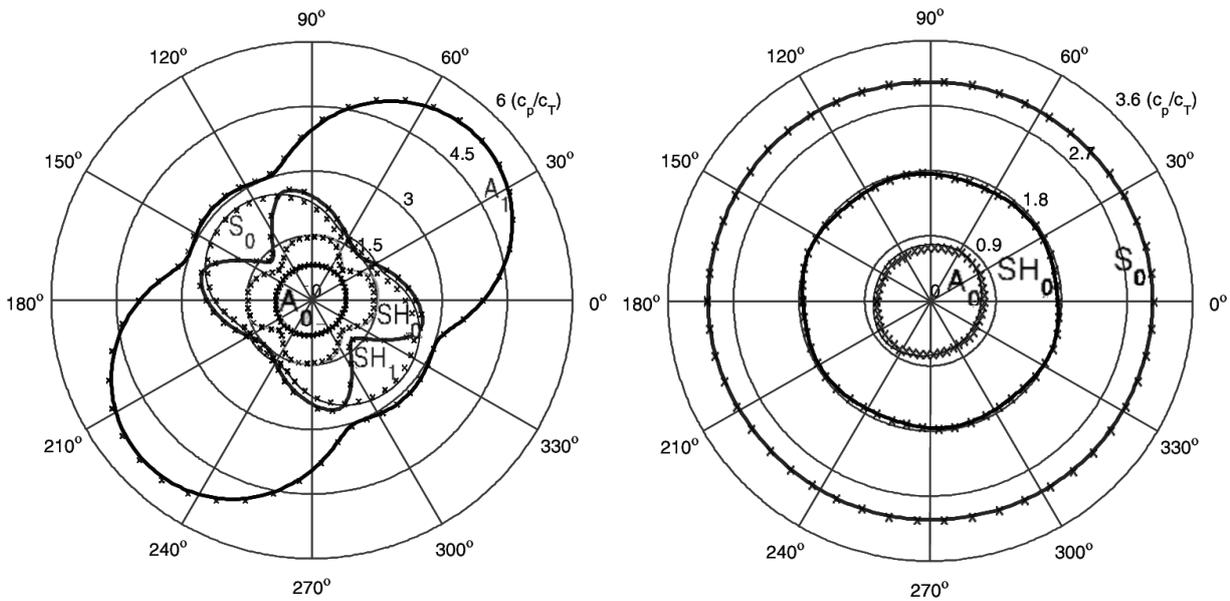


Рис. 2

$$(i, j \leftrightarrow a = \overline{1, 6}; n, m \leftrightarrow b = \overline{1, 6}),$$

где соответствие единичных индексов a, b и пар индексов ij, nm имеет вид: $1 \leftrightarrow 1, 1$; $2 \leftrightarrow 2, 2$; $3 \leftrightarrow 3, 3$; $4 \leftrightarrow 2, 3$; $3, 2$; $5 \leftrightarrow 3, 1$; $1, 3$; $6 \leftrightarrow 1, 2$; $2, 1$.

Матрица \mathbf{K} для пакета слоев рассчитывалась по формулам (3.3)–(3.14). На рис. 1 представлены фазовые скорости (обозначены звездочками), наложенные на соответствующие графики из статьи [7]. Данные кривые представляют собой безразмерные скорости c_p/c_T симметричных и антисимметричных мод для безразмерной частоты $\omega h/c_T$, где $c_T = \sqrt{G_{12}/\rho}$, h — полная толщина пакета, $G_{12} = 3,75 \times 10^9$ Па — одна из инженерных констант материала [7]. Размерные фазовые скорости имеют вид $v_k(\gamma, \omega) = \omega/\zeta_k(\gamma, \omega)$, вещественные полюсы матрицы Грина $\zeta_k(\gamma, \omega)$ являются корнями уравнения (4.1). Левая часть рис. 1 соответствует скоростям волн, распространяющимся в композите I в плоскости xOy под углом $\gamma = \pi/6$ к оси Ox . В правой части рис. 1 представлены скорости волн в композите II, распространяющихся вдоль прямой под углом $\gamma = \pi/4$ к оси Ox в плоскости xOy .

Обозначения S_n соответствуют продольным волнам, A_n — поперечным, SH_n — горизонтальным сдвиговым волнам.

На рис. 2 представлены безразмерные скорости распространения волн в зависимости от направления распространения — угла γ для безразмерной частоты $\omega h/c_T = 4$ в

композите I (слева) и $\omega h/c_T = 1,78$ для композита II (справа) соответственно. Как видно из приведенных графиков (рис. 1, 2), (1.2), качественно результаты совпадают.

Рассматривался также более простой пример однослойного композита AS4/3502. На рис. 3 приведены дисперсионные поверхности $\zeta(\omega, \gamma)$ для $\omega \leq 1$ — участка существования только 3 фундаментальных мод — поперечной A_0 (внутренняя поверхность полюсов ζ_1), продольной S_0 (внешняя поверхность ζ_3), и горизонтальной сдвиговой SH_0 (средняя поверхность ζ_2). В практических задачах неразрушающего контроля наиболее существенное значение играет мода A_0 , поскольку экспериментально наиболее просто измеряются вертикальные перемещения u_z . В этой компоненте основную роль играет именно поперечная (антисимметричная) мода. Горизонтально поляризованные продольная мода S_0 и сдвиговая мода SH_0 распространяются быстрее моды A_0 (рис. 1, 2, 4). Обычно амплитуда вызываемых ими колебаний среды мала, вследствие чего обе моды гораздо хуже поддаются экспериментальному определению и практического применения в теории неразрушающего контроля не имеют.

На рис. 3 представлены волновые числа в виде линий уровня (справа) и поверхностей (слева). Как видно, для трех главных мод в диапазоне низких частот волновые числа практически линейно зависят от частоты ω . В зависимости от угла распространения γ картина волновых чисел однородная, раз-

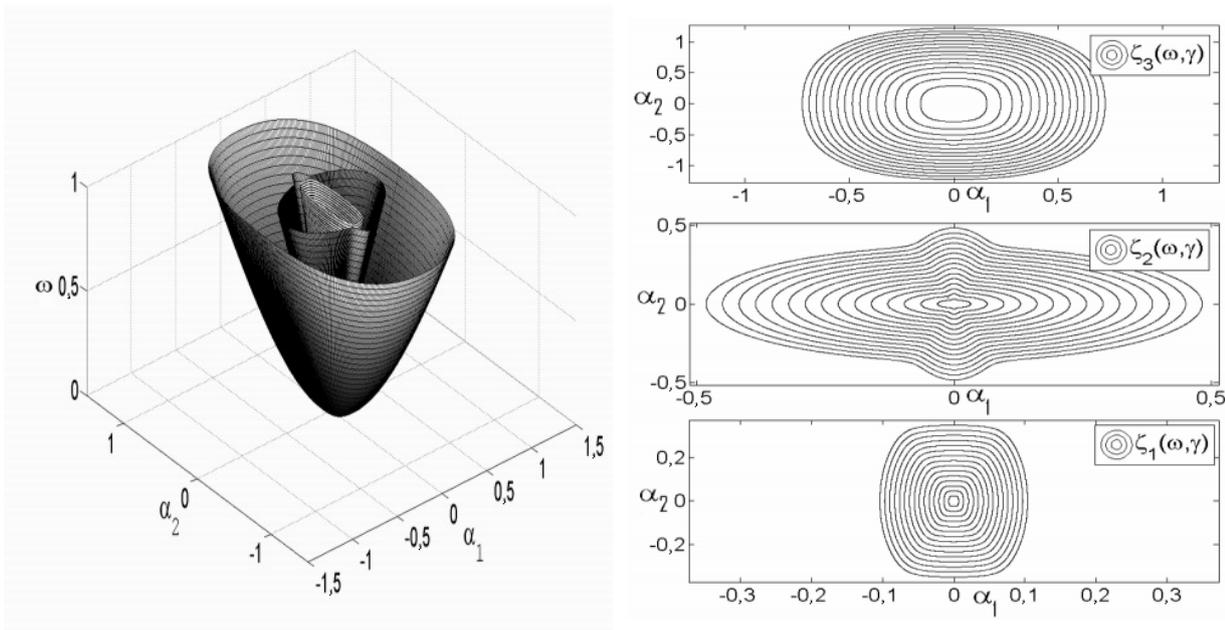


Рис. 3

личия в разных направлениях объясняются преимущественно анизотропией материала.

На рис. 4 представлены фазовые скорости для однослойного материала AS4/3502 в виде поверхности $c_p(\omega, \gamma)$ (слева), в правой части эти же поверхности изображены линиями уровня. Фазовые скорости мод S_0 (внешняя поверхность, слева) и SH_0 (средняя поверхность, слева) для низкочастотного диапазона представляют собой почти постоянные значения — их волновые числа в этом диапазоне растут с частотой линейно. Мода A_0 (внутренняя поверхность, слева) с уменьшением частоты имеет меньшую скорость распространения. В представленном материале скорость моды A_0 не имеет сильной зависимости от направления распространения γ , как и в ранее описанных многослойных композитах на основе AS4/3502.

Литература

1. Bray D. E., McBride D. Nondestructive testing techniques. New York: Wiley, 1992. 356 pp.
2. Chimenti D. E. Guided waves in plates and their use in materials characterization // Appl. Mech. Rev. 1997. Vol. 50. No. 5. P. 247–284.
3. Chang F. K. In: Proceedings of the 5th international workshop on structural health monitoring: advancements and challenges for implementation. Lancaster: DEStech, 2005. P. 84–89.
4. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
5. Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
6. Бабешко В. А., Ратнер С. В., Сыромятников П. В. О смешанных задачах для термоэлектроупругих сред с разрывными граничными условиями // ДАН. 2007. Т. 412. № 6. С. 51–56.
7. Lei Wang, Yuan F. G. Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // Composites Science and Technology. 2007. No. 67. P. 1370–1384.
8. Hayashi T., Rose J. L. Guided wave simulation and visualization by a Semi-Analytical Finite Element Method // Materials Evaluation. 2003. Vol. 61. No. 1. P. 75–79.
9. Ju T. H., Datta S. K. Dynamics of a Laminated Composite Plate with Interface Layers // Journal of Nondestructive Evaluation. 1992. Vol. 11. No. 3/4.
10. Jones R. M. Mechanics of composite materials. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999. 519 p.
11. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
12. Nyfeh A. H., Chimenti D. E. Free wave propagation in plates of general anisotropic media // J. Appl. Mech. 1989. Vol. 56. No. 4. P. 881–886.
13. Muller D. E. A Method for Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer // Math. Tab. Wash. 1956. No. 10. P. 45–49.
14. Royer D., Dieulesaint E. Elastic Waves in Solid I: Free and Guided Propagation. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. 374 p.

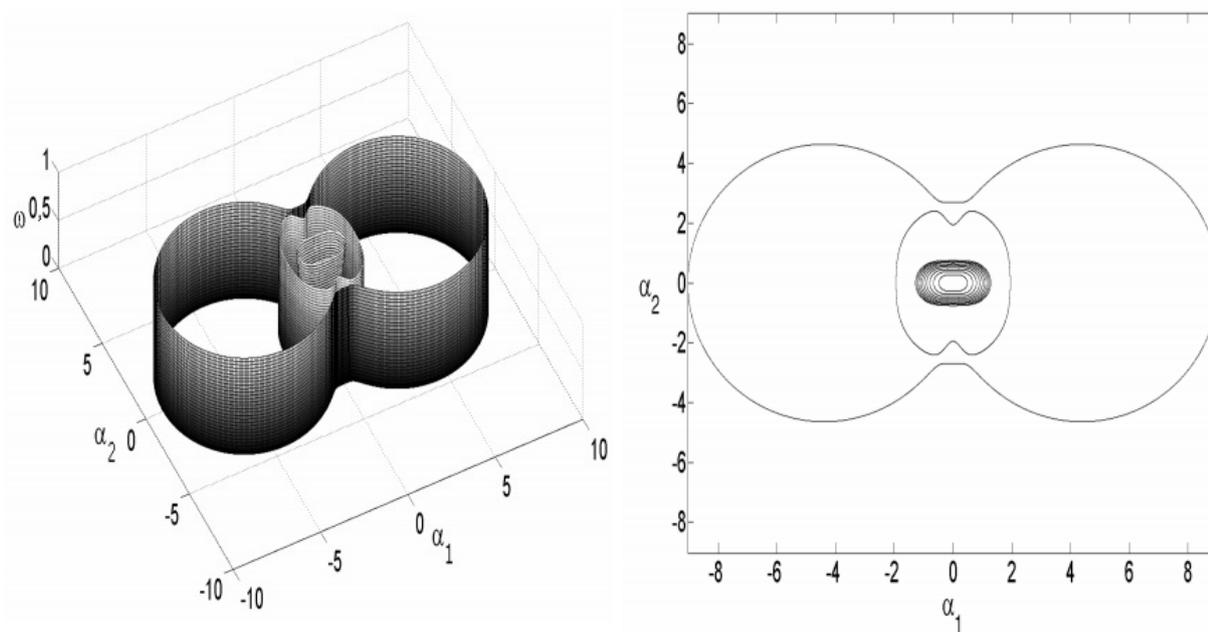


Рис. 4

Ключевые слова: композит, анизотропия, волны Лэмба, фазовая скорость, дисперсия, матрица Грина, преобразование Фурье.

Статья поступила 25 марта 2009 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Кармазин А. В., Кириллова Е. В., Сыромятников П. В., 2009