УДК 518.8:53

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ СТАЦИОНАРНОГО ПРОФИЛЯ МАЛОЙ «ПЛОСКОЙ» КАПЛИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Лесев В. Н.[1]

ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ABOUT DETERMINATION OF A STATIONARY PROFILE OF A SMALL "PLANE" DROP LYING ON ROUGH SURFACE

Lesev V. N.

The problem of identifying the profile of a small liquid drop lying on the deformed solid surface is studied on the basis of relations describing the energy of the gas-fluid-substrate system with the help of optimizing methods and methods of special functions. The analytical solution of the problem is developed, which makes it possible to carry out numerical experiment for a wide range of actual physical data corresponding to the systems under study.

Keywords: liquid drop, rough surface, profile of the surface, contact angle.

Введение

Распад пленок, напыление красок, металлических расплавов и полимеров, пайка, проблемы адсорбции и диффузии нефтепродуктов, а также пропитки пористых поверхностей — все это лишь некоторые из процессов, в описании и исследовании которых главенствующими являются законы кинетики и статики малых капель.

Множество прикладных задач механики жидкости капиллярных размеров приводит к большому количеству различного рода их постановок и методов исследования. Несмотря на достигнутые успехи по определению физических параметров, дающих возможность контролировать и анализировать явления смачивания твердых подложек, возникают новые потребности (продиктованные современными производственными технологиями) в проведении исследований, еще в большей степени приближенных к процессам, протекающим на практике. При этом особый интерес вызывают проблемы термодинамического равновесия.

Здесь следует отметить, что на сегодняшний день изучению этого вопроса посвящено немало работ, однако при исследовании процессов кинетики капель, соответствующих режимам полного и неполного смачивания, в большинстве из них речь идет об идеально отшлифованных поверхностях, например, [1–3]. В случаях же, когда поверхность имеет дефекты или изучаются процессы равновесия на априори неровных подложках, большинство из известных методов оказываются непригодными для применения.

Кроме того, до сих пор остается нерешенной проблема гистерезиса углов трехфазного контакта, т. е. проблема, связанная с зацеплением граничных точек профиля капли за малые локализованные дефекты поверхности в момент установления термодинамического равновесия как при «сухом» растекании (накатывании жидкости на поверхность), так и растекании с эффектами проскальзывания. Гистерезис может иметь и другие проявления, в частности, когда капля лежит на пористой или трещиноватой поверхности, запирая в ней микро объемы воздуха, что также сказывается на значениях краевых углов смачивания.

В связи с перечисленными проблемами повышается значимость аналитически определенных закономерностей, позволяющих изучать как качественные, так и количественные связи в системах газ – жидкость – подложка. Еще более актуальными для опи-

[1]Лесев Вадим Николаевич, канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова; e-mail: lvn_kbsu@mail.ru.

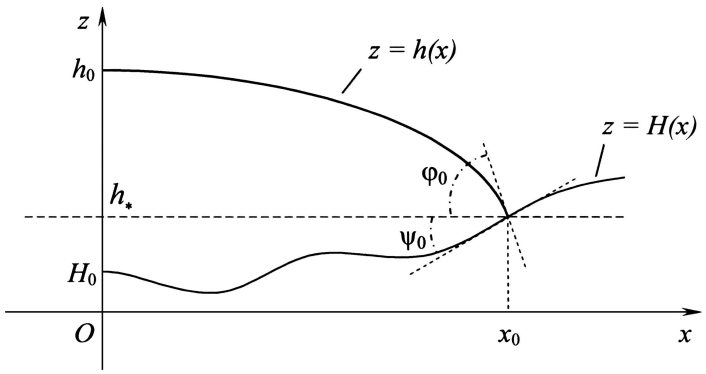


Рис. 1. Половина профиля малой капли на неровной поверхности

сания термодинамического равновесия таких структур представляются соотношения, полученные с учетом энергии подобных систем.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [4–7], и направлена на решение отдельных проблем, указанных выше.

1. Постановка задачи

Рассмотрим «плоскую» осесимметричную каплю вязкой нелетучей жидкости, свободно лежащую на неровной твердой поверхности (рисунок) в гравитационном поле, направленном вдоль оси Oz вертикально вниз.

Пусть $z = h(x)$ — искомое уравнение профиля поверхности капли, $z = H(x)$ — уравнение профиля поверхности подложки, $\theta = \varphi_0 + \psi_0$ — угол трехфазного контакта, x_0 — радиус растекания капли, а h_* — ордината, соответствующая случаю ровной горизонтальной подложки (рисунок).

Как известно [8], энергию системы газ – жидкость – подложка, приходящуюся на единицу длины контура капиллярной поверхности, можно записать в виде

$$W(x_f) = \int\limits_{-x_0}^{x_0} \left[\sigma_{23}\left(\sqrt{1+(h')^2}\right) + \frac{h^2}{2a^2}\right] dx + 2x_0(\sigma_{12}-\sigma_{13}), \quad (1.1)$$

где $a^2 = \sigma_{23}/[g(\rho_2-\rho_3)]$ — капиллярная постоянная, g — ускорение свободного падения, σ_{ij} — удельные свободные межфазные поверхностные энергии на границе фаз, причем индексам $i(j) = 1$ соответствует твердое тело, $i(j) = 2$ — жидкая капля, а $i(j) = 3$ — окружающая среда.

Дополним уравнение (1.1) граничными условиями

$$h(x)|_{x=\pm x_0} = 0 \quad (1.2)$$

и условием

$$h'(x)\big|_{x=0} = 0, \quad (1.3)$$

которое предполагает, что касательной к графику профиля поверхности капли в апексе является прямая, перпендикулярная оси Oz и проходящая через точку $z = h(0) = h_0$, т. е. обеспечивается равенство нулю кривизны профиля в апексе капли.

Таким образом, задача отыскания профиля капли сводится к задаче оптимизации (1.1)–(1.3).

2. Редукция вопроса разрешимости задачи к разрешимости дифференциального уравнения

Основываясь на методе коэффициентов Лагранжа, введем в рассмотрение функционал

$$F = \sigma_{23}\left(\sqrt{1+(h')^2} + \frac{h^2}{2a^2}\right) + \lambda h, \quad (2.1)$$

где λ — вариационный параметр.

Будем искать функцию $h(x)$, доставляющую экстремум функционалу

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0} F\,dx + 2x_0(\sigma_{12}-\sigma_{13}) \to \mathrm{extr} \quad (2.2)$$

и удовлетворяющую условиям (1.2), (1.3).

Необходимые условия, при которых искомая функция доставляет локальный минимум задаче (1.2), (1.3), (2.2), имеют вид [9]

$$F_h - \frac{d}{dx}[F_{h'}] = 0, \quad -x_0 < x < x_0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}\left(F-h'F_{h'}\right)\big|_{x=-x_0}&=\frac{\partial l}{\partial\left(-x_0\right)},\\ \left(F-h'F_{h'}\right)\big|_{x=x_0}&=-\frac{\partial l}{\partial\left(x_0\right)},\end{aligned}\tag{2.4}$$

где $l\left(-x_0,x_0\right)=2x_0\left(\sigma_{12}-\sigma_{13}\right)$.

Учитывая, что функционал F не зависит явно от x, представим уравнение Эйлера (2.3) в форме

$$\frac{d}{dx}\left(F-h'F_{h'}\right)=0.\tag{2.5}$$

Интегрируя (2.5) с учетом (2.1), будем иметь

$$\sigma_{23}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(h'\right)^2}}+\frac{h^2}{2a^2}\right)+\lambda h=c_1,\tag{2.6}$$

где c_1 — неизвестная постоянная.

Из условий трансверсальности (2.4), принимая во внимание (2.1), получим

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{1+\left(h'\right)^2}-\frac{\left(h'\right)^2}{\sqrt{1+\left(h'\right)^2}}\right)\Bigg|_{x=-x_0}+\\ &+\left(\sqrt{1+\left(h'\right)^2}-\frac{\left(h'\right)^2}{\sqrt{1+\left(h'\right)^2}}\right)\Bigg|_{x=x_0}=\\ &=-\frac{2\left(\sigma_{12}-\sigma_{13}\right)}{\sigma_{23}}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Согласно принятым обозначениям

$$h'\left(\pm x_0\right)=\mp\operatorname{tg}\varphi,$$

следовательно, из (2.7) будем иметь

$$\cos\varphi_0=\frac{\sigma_{13}-\sigma_{12}}{\sigma_{23}}.\tag{2.8}$$

Заметим, что полученное соотношение является известной формулой Юнга [10].

Далее, переходя к пределу при $x\to x_0$ в (2.6), а также принимая во внимание (1.2) и (2.8), выпишем выражение для c_1

$$c_1=\sigma_{23}\cos\varphi_0=\sigma_{13}-\sigma_{12}.\tag{2.9}$$

Из (2.6) с учетом (1.3) при $x\to 0$ получим

$$h_0^2+\frac{2a^2\lambda}{\sigma_{23}}h_0+2a^2\left(1-\frac{c_1}{\sigma_{23}}\right)=0.$$

Принимая во внимание (2.9), преобразуем последнее соотношение к виду

$$\begin{aligned}&\left(h_0+\frac{a^2\lambda}{\sigma_{23}}\right)^2+\\ &+a^2\left[2\left(1-\cos\varphi_0\right)-\left(\frac{a\lambda}{\sigma_{23}}\right)^2\right]=0.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Частным случаем, при котором равенство (2.10) оказывается справедливым, является случай обращения в ноль каждого из входящих в него слагаемых. Следовательно,

$$\lambda=-\frac{\sigma_{23}}{a}\sqrt{2\left(1-\cos\varphi_0\right)}.$$

Тогда

$$h_0=a\sqrt{2\left(1-\cos\varphi_0\right)}.$$

Высота капли в апексе $\widehat{h}$ может быть найдена по формуле

$$\widehat{h}=h_0-H_0.$$

3. Построение аналитического решения

Исследуем уравнение (2.6), предварительно представив его в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(h'\right)^2}}=\frac{c_1}{\sigma_{23}}-\frac{h^2}{2a^2}-\lambda h.$$

Последнее равенство можно записать в форме

$$\frac{dx}{dh}=\frac{\alpha-\beta h-\lambda h^2}{\sqrt{1-\left(\alpha-\beta h-\lambda h^2\right)^2}},$$

где $\alpha=\cos\varphi_0$, $\beta=1/2a^2$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$x+c_2=\int\frac{\alpha-\beta h-\lambda h^2}{\sqrt{1-\left(\alpha-\beta h-\lambda h^2\right)^2}}\,dh.\tag{3.1}$$

Введем замену [11]

$$h=t-\frac{\beta}{2\lambda}.$$

Тогда интеграл в (3.1) примет вид

$$\begin{aligned}&\int\frac{\alpha-\beta h-\lambda h^2}{\sqrt{1-\left(\alpha-\beta h-\lambda h^2\right)^2}}\,dh=\\ &=\frac{4\lambda}{\sqrt{\left(4\lambda\left(1-\alpha\right)-\beta^2\right)\left(4\lambda\left(1+\alpha\right)+\beta^2\right)}}I,\end{aligned}\tag{3.2}$$

где

$$I = \int \frac{\alpha + \frac{\beta^2}{4\lambda} - \lambda t^2}{\Delta_0} dt, \qquad (3.3)$$

$$\Delta_0 = \left[\left(1 + \frac{4\lambda^2 t^2}{4\lambda(1-\alpha) - \beta^2} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 - \frac{4\lambda^2 t^2}{4\lambda(1+\alpha) + \beta^2} \right) \right]^{1/2}.$$

В (3.2) использовано разложение

$$1 - \left(\alpha - \beta h - \lambda h^2\right)^2 =$$
$$= -\lambda^2 \left(h^2 + \frac{\beta}{\lambda} h + \frac{1-\alpha}{\lambda} \right) \times$$
$$\times \left(h^2 + \frac{\beta}{\lambda} h - \frac{1+\alpha}{\lambda} \right).$$

Приведем интеграл I к канонической форме. Для этого положим

$$t^2 = \frac{\left(1-u^2\right)\left(4\lambda(1+\alpha) + \beta^2\right)}{4\lambda^2}, \qquad (3.4)$$

$$0 < u \leqslant 1, \quad t < \frac{\sqrt{4\lambda(1+\alpha) + \beta^2}}{2\lambda}.$$

В результате, для подынтегрального выражения будем иметь

$$\frac{dt}{\Delta_0} =$$
$$= -\frac{\sqrt{\left(4\lambda[1-\alpha] - \beta^2\right)\left(4\lambda[1+\alpha] + \beta^2\right)}}{4\lambda\sqrt{2\lambda}} \times$$
$$\times \frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-k^2u^2\right)}}. \qquad (3.5)$$

Подставляя (3.5) и (3.4) в (3.3) и принимая во внимание (3.2), получим

$$\frac{4\lambda}{\sqrt{\left(4\lambda[1-\alpha] - \beta^2\right)\left(4\lambda[1+\alpha] + \beta^2\right)}} I =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int \frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-k^2u^2\right)}} -$$
$$- \frac{4\lambda(1+\alpha) + \beta^2}{4\lambda\sqrt{2\lambda}} \int \frac{u^2 du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-k^2u^2\right)}}. \qquad (3.6)$$

Здесь

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\lambda(1+\alpha) + \beta^2}{2\lambda}}.$$

Выполнив подстановку $u = \sin\omega$ с учетом (3.1) и (3.6), запишем

$$x + c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \left[2E(k,\omega) - F(k,\omega) \right], \qquad (3.7)$$

где $F(k,\omega)$ и $E(k,\omega)$ — эллиптические интегралы 1-го, 2-го рода соответственно,

$$\omega = \arcsin 2\lambda \sqrt{\frac{(h_1 - h)(h + h_2)}{4\lambda(1+\alpha) + \beta^2}},$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\lambda(1+\alpha)} - \beta}{2\lambda},$$

$$h_2 = -\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\lambda(1+\alpha)} + \beta}{2\lambda}.$$

Таким образом, профиль капли определен как неявно заданная функция посредством (3.7). Остается найти постоянную интегрирования c_2, входящую в это соотношение. Для этого в (3.7) положим $x = 0$, будем иметь

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \left[2E(k,\omega)|_{h=h_0} - F(k,\omega)|_{h=h_0} \right].$$

Подставляя в полученное соотношение реальные физические параметры системы, на основе численных методов определяем искомую постоянную.

Заметим, что построенное аналитическое решение позволяет устанавливать радиус растекания капли x_0 как точку пересечения графиков функций, определяющих профили поверхностей капли и подложки, угол трехфазного контакта

$$\theta = \varphi_0 + \psi_0 = \varphi_0 + \operatorname{arctg}\left[H'(x_0) \right],$$

а также объем капли на основе элементарных геометрических соотношений и очевидного равенства для половины площади ее сечения в апексе

$$S = \int_0^{x_0} \left[y(x) - H(x) \right] dx.$$

Отметим также, что равенство (3.7) численно реализуемо в современных прикладных программных пакетах.

Заключение

Исследования, направленные на изучение термодинамического равновесия капель жидкости на твердой поверхности и процессов, предшествующих ему, неразрывно связаны с уменьшением свободной энергии системы и, в первую очередь, со снижением поверхностной энергии. Поэтому предложенный подход, суть которого состоит в минимизации соответствующего функционала, представляется вполне естественным для нахождения профиля поверхности жидкой капли на неровной подложке.

В результате реализации указанного метода построено аналитическое решение задачи в виде неявно определенной функции через эллиптические интегралы первого и второго рода. Полученные соотношения представляют собой новые с точки зрения теории капиллярности результаты, которые согласуются с результатами, представленными в работах [12–14]. Кроме того, значимость построенного аналитического решения может быть определена и тем, что его наличие делает возможным качественный и количественный анализ рассматриваемой системы при различных входных физических данных. Это очевидное свойство аналитического решения способствует проведению согласования между теоретическим и экспериментальным анализом проблемы, тем более, что получение экспериментальных данных в рамках изучаемого процесса является в известной степени трудоемким и материально затратным.

Литература

1. *Старов В.М., Чураев Н.В.* Равновесие капель жидкости на твердой подложке и линейное натяжение // Коллоидный журнал. 1980. Т. 42. № 4. С. 703–710.
2. *Воинов О.В.* Динамическая теория смачивания твердых тел вязкими жидкостями под действием сил Ван-дер-Ваальса // ПМТФ. 1994. № 6. С. 69–85.
3. *Hoorfar M., Neumann A.W.* Recent progress in Axisymmetric Drop Shape Analysis (ADSA) // Advances in Colloid and Interface Science. 2006. Vol. 121. P. 25–49.
4. *Канчукоев В.З., Карамурзов Б.С., Лесев В.Н. и др.* Определение профиля проводящей капли в электромагнитном поле при малоугловом смачивании твердой поверхности // Адгезия расплавов и пайка материалов. Вып. 38: Сб. науч. тр. Киев. 2005. С. 33–43.
5. *Kanchukoev V.Z., Lesev V.N., Sozaev V.A.* The temperature effect on shape of free surface of liquid drop // Перспективные материалы, специальный выпуск. 2007. С. 331–332.
6. *Лесев В.Н.* Моделирование кинетики профиля поверхности малой капли расплава Pb-Li в различных температурных режимах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 3. С. 70–73.
7. *Лесев В.Н.* Нелинейная математическая модель гравитационного растекания капли по твердой поверхности // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. Вып. 5. С. 899–900.
8. *Френкель Я.И.* О поведении жидких капель на поверхности твердого тела // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. № 7. С. 659–667.
9. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
10. *Де Жен, П.Ж.* Смачивание: Статика и динамика // Успехи физ. наук. 1987. Т. 151. № 4. С. 619–681.
11. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.
12. *Быховский А.И.* Растекание. Киев: Наукова думка, 1983. 192 с.
13. *Канчукоев В.З.* Определение профиля жидкой капли на твердой поверхности // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 2. С. 12–16.
14. *Perazzo C.A., Gratton J.* Leyes de escala para corrientes rectilineas apoyadas sobre o colgadas de un plano inclinado // Anales AFA. 2004. Vol. 18. P. 135–137.

Ключевые слова: жидкая капля, неровная поверхность, профиль поверхности, контактный угол.

Статья поступила 16 апреля 2009 г.
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик
© Лесев В. Н., 2009