

УДК 532.5

СПУТНЫЕ ВИХРИ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ*Никаноров А. М.¹, Заволженский М. В.²*

ADJACENT VORTEXES OF JET STREAMS

Nikanorov A. M., Zavolzhensky M. V.

On the basis of Navier–Stokes equations with nonlinear turbulent resistance, jet streams of viscous medium determined by the given fluid flow rate are modeled. Moreover, the vortex formations accompanying the jet along its current are modeled.

Keywords: liquid, viscosity, jet, flow rate, Reynolds stress, nonlinear turbulent resistance, Navier–Stokes equations, velocity, boundary conditions, nonlinearity, bifurcation.

Введение

Струйные течения жидкости, изучаемые с помощью классических уравнений Навье–Стокса, обладают двумя особенностями: струя автономна и расширяется вниз по потоку; расход жидкости через поперечное сечение струи меняется от сечения к сечению. Однако в природе и технике существуют такие установившиеся струйные течения, ширина которых не изменяется на протяжении практически всего течения. В таких течениях секундный расход жидкости через любое поперечное сечение струи остаётся *постоянным*. При удалении от оси струи течение исчезает. Примерами таких струй служат зональные течения в атмосфере и океане, течения при впадении реки в море, течения от промышленных выбросов из широких отводных каналов и др.

В настоящей работе моделируются мощные струйные течения, в том числе такие, например, как зональные течения в атмосферах и в океанах планет. Обычно такие течения сопровождаются спутными вихрями, дрейфующими вниз по потоку вместе с самим течением (например, спутные вихри струйных течений на Юпитере [1], вихри, сопровождающие океанские течения на Земле и др.). Описать такие течения на основе классических уравнений Навье–Стокса, а также на основе уравнений с линейным турбулент-

ным сопротивлением [2] не представляется возможным, так как эти уравнения не допускают установившихся одномерных решений с одной компонентой скорости, всюду ограниченных и исчезающих при удалении от оси течения. Это значит, что турбулентное сопротивление в рассматриваемых потоках *нелинейно*, и для описания течения нужно использовать уравнения Навье–Стокса с нелинейным турбулентным сопротивлением [3].

1. Основные уравнения

В настоящее время для моделирования турбулентности используют вероятностные и статистические методы [4–6, и др.], методы математического эксперимента [7, 8] и методы напряжений Рейнольдса [9–12, и др.]. Последний метод не замкнут и требует дополнительного экспериментального материала для определения напряжений Рейнольдса с помощью гипотез, формулируемых по-разному авторами исследования турбулентности. Строгих аналитических методов моделирования турбулентности в настоящее время не существует [13].

Среди многих методов исследования турбулентности используется метод, основанный на осреднении скорости и давления в уравнениях Навье–Стокса [11]. Такой метод не формализован, поскольку возникаю-

¹Никаноров Анатолий Максимович, член-корр. РАН, доктор геолого-минералогических наук, профессор, директор Южного отделения Института водных проблем РАН (ИВП РАН).

²Заволженский Михаил Вадимович, старший научный сотрудник Южного отделения Института водных проблем РАН (ИВП РАН); e-mail: zavolzhensky@rambler.ru.

щие при осреднении напряжения Рейнольдса в каждой задаче определяются на основании нестандартных полуэмпирических гипотез ограниченного масштаба действия [13]. Для формализации метода напряжений Рейнольдса заметим, что по принципу Галилея дивергенция тензора напряжений Рейнольдса является функцией относительной скорости жидкости \mathbf{v} . В таком случае отнесённая к плотности жидкости ρ дивергенция тензора $\mathbf{\Pi}$ напряжений Рейнольдса определяется вектором относительной скорости и суммой нелинейных турбулентных сопротивлений

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} = - \left(\kappa + \sum_{m=1}^N \kappa_m |\mathbf{v} - \mathbf{V}|^m \right) (\mathbf{v} - \mathbf{V}). \quad (1.1)$$

Использование в уравнениях Навье-Стокса тензора (1.1) эквивалентно введению в уравнения движения жидкости соответствующей силы сопротивления. Это приводит к следующим уравнениям для моделирования течений жидкости с нелинейным турбулентным сопротивлением:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \left(\kappa + \sum_{m=1}^N \kappa_m |\mathbf{v} - \mathbf{V}|^m \right) (\mathbf{v} - \mathbf{V}), \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

\mathbf{V} — скорость сосуда с жидкостью или скорость жидкости на бесконечности, если её течение не ограничено твёрдыми стенками, p — гидродинамическое давление, ν — кинематическая вязкость жидкости. Феноменологические параметры κ и κ_m ($m = 1, 2, 3, \dots, N$) должны определяться экспериментально. Пример определения параметра κ приведён в работе [2]. Уравнения (1.2) апробированы в работе [3] при исследовании турбулентного течения в круглой трубе.

Впервые линейная аппроксимация тензора напряжений Рейнольдса в уравнениях движения идеальной жидкости использована Рэлеем [14] в 1883-м году. С тех пор в уравнениях Эйлера турбулентное сопротивление Рэля систематически используется при решении задач динамики атмосферы и океана [15].

2. Плоская неавтономная струя с заданным расходом

В разложении турбулентного сопротивления в ряд по степеням относительной скорости (в данном случае $\mathbf{V} = 0$, так как жидкость при удалении от оси струи неподвижна) удержим два члена и ограничимся рассмотрением плоской задачи. Ось Oz направим по оси струи, ось Ox — нормально Oz в плоскости течения. Тогда при отсутствии спутных вихрей давление в струе постоянно, $v_x = v_y = 0$, а для определения скорости $v_z = v(x')$ течения в струе из системы (1.2) получаем уравнение

$$\nu \frac{d^2 v_z}{dx'^2} - \kappa_1 v_z + \kappa_2 v_z^2 = 0. \quad (2.1)$$

Штрихи над переменными означают размерные координаты; штрихи над функциями — их производные по аргументу x .

Граничные условия для уравнения (2.1) связаны с симметрией течения относительно его оси Oz и с исчезновением течения при удалении от этой оси

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dx'} &= 0 \quad (x' = 0), \\ v_z &= 0 \quad (|x'| \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Кроме этого, задан расход жидкости Q через поперечное сечение струи

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} v_z(x') dx' = Q. \quad (2.3)$$

Выбор знаков перед коэффициентами κ_1 и κ_2 , характеризующими турбулентное сопротивление в уравнении (2.1), не случаен. При независимых между собой коэффициентах κ_1 и κ_2 задача решения не имеет. В самом деле, считая, что течение достаточно быстро исчезает с удалением от оси (при $|x'| \rightarrow \infty$), проинтегрируем обе части уравнения (2.1) поперёк потока. Тогда придём к соотношению

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_z(x') dx'}{\int_{-\infty}^{\infty} v_z^2(x') dx'}. \quad (2.4)$$

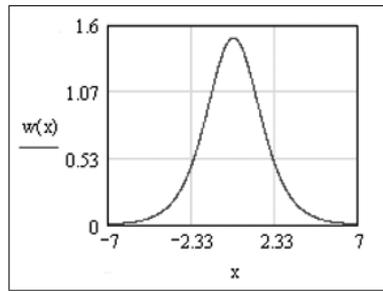


Рис. 1. Неавтономная струя с заданным расходом

Интеграл³ в числителе — расход — задан соотношением (2.3). Интеграл в знаменателе — секундный импульс через поперечное сечение струи — определится в процессе решения задачи (2.1)–(2.3) через параметры ρ , ν , Q , κ_1 и κ_2 . Поэтому соотношение (2.4) является условием, связывающим коэффициенты турбулентного сопротивления κ_1 и κ_2 друг с другом и с остальными физическими параметрами задачи (ρ , ν и Q). Если условие (2.4) не выполняется, то поставленная задача решения не имеет. Кроме этого, из энергетических соображений следует, что $\kappa_1 > 0$ [3]. В таком случае из формулы (2.4) следует, что и $\kappa_2 > 0$.

Будем априори предполагать зависимость между параметрами κ_1 , ρ , κ_2 , ν и Q . Реальность такой гипотезы подтверждается качественным совпадением полученных результатов с наблюдениями за такими ($Q = \text{const}$) струями.

Имея в виду, что размерности $[\kappa_1] = \text{с}^{-1}$, $[\kappa_2] = \text{м}^{-1}$, перейдём в соотношениях (2.1)–(2.4) к безразмерным переменным

$$x = x' \sqrt{\frac{\kappa_1}{\nu}}, \quad v_z = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} w_0(x). \quad (2.5)$$

Тогда для определения функции w_0 получим краевую задачу

$$w_0'' - w_0 + w_0^2 = 0, \quad (2.6)$$

$$w_0'(\pm\infty) = w_0(\pm\infty) = 0. \quad (2.7)$$

Соотношение (2.4) в переменных (2.5) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_0(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} w_0^2(x) dx \quad (2.8)$$

(т. е. безразмерные расход и импульс в струе совпадают), что не противоречит уравнению (2.6).

Наконец, условие (2.3) превращается в искомую связь между физическими параметрами задачи, которая предполагалась априори

$$\frac{\kappa_2 Q}{\rho \sqrt{\kappa_1 \nu}} = \int_{-\infty}^{\infty} w_0(x) dx, \quad (2.9)$$

причём входящий в формулу (2.9) интеграл должен быть вычислен после решения задачи (2.6)–(2.7).

Интеграл (2.9) имеет принципиальное значение, так как из него вытекает, что $w_0 \neq 0$ при $Q \neq 0$. Это существенно, так как задача (2.6)–(2.7) безотносительно к соотношению (2.3) имеет нулевое решение.

Решая граничную задачу (2.6), (2.7), находим скорость течения в струе (рис. 1)

$$w_0(x) = \frac{6e^x}{(e^x + 1)^2}. \quad (2.10)$$

Из формулы (2.10) находим безразмерную скорость течения жидкости по оси струи (максимальная скорость в струе)

$$w_0(0) = \frac{3}{2}. \quad (2.11)$$

Чётность функции $w_0(x)$ проверяется по формуле (2.10). Легко проверяется также, что функция (2.10) удовлетворяет всем условиям задачи (2.6)–(2.7) и соотношению (2.8). В частности,

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_0(x) dx = 6, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 w_0}{dx^2} dx = 0.$$

³Несложно проверить по полученному решению, что $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 v_z}{dz^2} dz = 0$. Поэтому вязкость ν (см. (2.1)) в левую часть соотношения (2.4) не входит.

Поэтому коэффициент перед квадратом скорости в уравнении движения (2.1) равен

$$\kappa_2 = \frac{6\rho}{Q} \sqrt{\kappa_1 \nu}. \quad (2.12)$$

Отсюда, с учётом формул (2.11) и (2.5), найдём максимальную скорость течения (на оси струи)

$$v_z(0) = \frac{Q}{4\rho} \sqrt{\frac{\kappa_1}{\nu}}.$$

Скорость $w_0(x)$ экспоненциально убывает с удалением от оси $x = 0$. При удалении от оси на четыре безразмерных единицы скорость $w_0(x)$ уменьшается в пятнадцать раз (рис. 1)). Нужно только помнить, что безразмерная длина определяется вязкостью и турбулентным сопротивлением по формулам (2.5). Поэтому скорость убывания течения с удалением от оси тем выше, чем больше турбулентное сопротивление κ_1 и чем меньше вязкость жидкости ν (т. е. тем больше, чем больше турбулизован поток). Существование плоского одномерного течения (2.5), (2.10) с исчезающими с удалением от оси в обе стороны при $x' \rightarrow \pm\infty$ компонентами скорости является существенным аргументом в пользу нелинейной модели турбулентного сопротивления, так как подобные течения широко распространены в природе и технике и не моделируются классическими уравнениями Навье–Стокса.

2.1. Спутные вихри

Для изучения вихрей, сопутствующих полученному течению, используем уравнения (1.2) с двумя членами ряда, характеризующего нелинейное турбулентное сопротивление

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x'} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z'^2} \right) - \kappa_1 v_x + \kappa_2 v_x^2, \quad (2.13)$$

$$v_x \frac{\partial v_z}{\partial x'} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z'^2} \right) - \kappa_1 v_z + \kappa_2 v_z^2,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x'} + \frac{\partial v_z}{\partial z'} = 0.$$

К условиям (2.2) и (2.3) для системы уравнений (2.13) нужно добавить условия исчезновения скорости v_x на оси течения (в силу симметрии потока) и с удалением от оси потока при $x' \rightarrow \pm\infty$:

$$v_x = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x'} = 0 \quad (x' = 0), \quad (2.14)$$

$$v_x = v_z = 0 \quad (x' \rightarrow \pm\infty).$$

Предполагаем, что коэффициент κ_2 по-прежнему выражается формулой (2.12).

Линеаризуем уравнения (2.13). Полученную задачу запишем в безразмерных переменных

$$\{v_x, v_z\} = \frac{Q}{6\rho} \sqrt{\frac{\kappa_1}{\nu}} \{u, w\},$$

$$\{x', z'\} = \sqrt{\frac{\nu}{\kappa_1}} \{x, z\}, \quad (2.15)$$

$$p' = \frac{Q\kappa_1}{6} p, \quad R = \frac{Q}{6\mu},$$

где μ — коэффициент динамической вязкости, R — число Рейнольдса в потоке жидкости.

Процесс линеаризации состоит в замене в соотношениях (2.13), (2.14) и (2.3)

$$v_z = \frac{Q\sqrt{\kappa_1}}{6\rho\sqrt{\nu}} (w_0 + w)$$

и отбрасывании нелинейных по u и w членов. Поэтому получаем следующую задачу

$$Rw_0 \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$R \left(u \frac{\partial w_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - w + 2w_0 w, \quad (2.16)$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (x = 0),$$

$$u = w = 0 \quad (x = \pm\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 0 \quad (2.17)$$

для определения собственных чисел R и соответствующих им собственных функций u , w и p .

При исследовании задачи (2.16), (2.17) ограничимся оценкой критического числа Рейнольдса $R = R^*$, при котором возможна бифуркация течения (2.5), (2.10).

Разделяя переменные в уравнениях (2.16) и (2.17), полагаем

$$u(x, z) = e^{ikz}\varphi(x), \quad w(x, z) = e^{ikz}\psi(x),$$

$$p(x, z) = e^{ikz}h(x),$$

где k — действительное число. Тогда

$$\varphi'' - (k^2 + 1 + ikRw_0)\psi = h', \quad (2.18)$$

$$ikh = \psi'' - (k^2 + 1 - 2w_0 + iRw_0)\psi - R w_0' \varphi, \quad (2.19)$$

$$\psi = -\frac{1}{ik}\varphi', \quad (2.20)$$

$$\varphi(0) = \psi'(0) = \varphi(\pm\infty) = \psi(\pm\infty) = 0, \quad (2.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (2.22)$$

Из уравнения неразрывности (2.20) и условий на бесконечности (2.21) следует, что соотношение (2.22), а вместе с ним и условия (2.17) и (2.22) выполняются автоматически при любых значениях R и k .

Введём функцию (2.20) в (2.19) и результат подставим в (2.18). Тогда для определения функции φ получим уравнение

$$L^2\varphi + L\varphi + 2(w_0\varphi')' - ikRw_0(L\varphi + w_0\varphi) = 0,$$

$$L = \frac{d^2}{dk^2} - (k^2 + 1).$$

В силу (2.6) $w_0'' = w_0 - w_0^2$, поэтому

$$L^2\varphi + L\varphi + 2(w_0\varphi')' - ikRw_0(L\varphi + w_0\varphi) = 0. \quad (2.23)$$

Граничные условия для определения функции φ получим подстановкой (2.20) в (2.21)

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(\pm\infty) = \varphi'(\pm\infty) = 0. \quad (2.24)$$

Перейдём в соотношениях (2.23) и (2.24) от переменной x к переменной t по формуле

$$\sqrt{1 - \frac{2}{3}w_0(x)} = t, \quad (2.25)$$

$$w_0(x) = \frac{3}{2}(1 - t^2), \quad 0 < t < 1.$$

Учитывая свойства чётности и нечётности функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, выводим для них граничные условия по переменной t

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi^{IV}(0) = 0 \quad (t = 0), \quad (2.26)$$

$$\varphi(1) = 0 \quad (t = 1). \quad (2.27)$$

Для составления дисперсионного соотношения введём операторы

$$A\varphi \equiv L^2\varphi + L\varphi + 2(w_0\varphi'_x)' = L^2\varphi + L\varphi + \frac{3}{4}(1 - t^2)\frac{d}{dt} \left((1 - t^2)^2 \frac{d\varphi}{dt} \right), \quad (2.28)$$

$$B\varphi \equiv w_0(L\varphi + w_0\varphi) = \frac{3}{2}(1 - t^2) \left(L\varphi + \frac{3}{2}(1 - t^2)\varphi \right),$$

$$L = \frac{1}{4}(1 - t^2)\frac{d}{dt} \left((1 - t^2)\frac{d}{dt} \right) - (k^2 + 1).$$

Тогда уравнение (2.23) принимает вид

$$A\varphi = ikRB\varphi. \quad (2.29)$$

Полагая

$$\varphi(t) = \chi(t) + i\theta(t), \quad (2.30)$$

выделим в уравнении (2.29) действительную и мнимую части

$$A\chi = -kRB\theta, \quad A\theta = kRB\chi. \quad (2.31)$$

Кроме этого, из уравнения (2.29) вытекает равенство (черта над функцией — символ комплексно сопряженной величины)

$$(A\varphi)(B\bar{\varphi}) = ikR|B\varphi|^2,$$

откуда с учётом (2.30) находим

$$(A\chi + iA\theta)(B\chi - iB\theta) = ikR|B\varphi|^2 \Rightarrow \Rightarrow (A\chi)(B\chi) + (A\theta)(B\theta) = 0$$

и

$$(A\theta)(B\chi) - (A\chi)(B\theta) = kR|B\varphi|^2.$$

Но из формул (2.31) следует

$$B\chi = \frac{1}{kR}A\theta, \quad B\theta = -\frac{1}{kR}A\chi,$$

поэтому

$$(A\chi)^2 + (A\theta)^2 = k^2 R^2 [(B\chi)^2 + (B\theta)^2].$$

Проинтегрируем последнее соотношение по x в пределах от нуля до бесконечности

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [(A\chi)^2 + (A\theta)^2] dx &= \\ &= k^2 R^2 \int_0^{\infty} [(B\chi)^2 + (B\theta)^2] dx. \end{aligned}$$

Переходя к переменной t и учитывая формулу $\frac{dt}{dx} = \frac{1-t^2}{2}$, выводим соотношение

$$R^2 = \frac{\int_0^1 \frac{(A\chi)^2 + (A\theta)^2}{1-t^2} dt}{k^2 \int_0^1 \frac{(B\chi)^2 + (B\theta)^2}{1-t^2} dt}. \quad (2.32)$$

В настоящей работе доказывается факт существования спутных вихрей у не автономных струй с заданным расходом жидкости. Поэтому точного вычисления критического числа Рейнольдса на основании соотношения (2.32) воспроизводить не будем.

Соотношение (2.32) используем для оценки критического числа Рейнольдса, при котором возможна бифуркация течения (2.10). Применим метод Галёркина. В качестве функций $\chi(t)$ и $\theta(t)$ возьмём функции, которые удовлетворяют соотношениям (2.26) и (2.27) (т.е. удовлетворяют всем граничным условиям (2.24)) и уравнению (2.23) при $x = 0$ ($t = 0$). Именно, примем

$$\chi(t) = t^3(1-t^2), \quad \theta(t) = t^5(1-t^2).$$

При этом, с учётом явного вида (2.28) операторов A и B , формула (2.32) принимает вид

$$0,01R^2 = \Delta_0^{-1}(2,090 + 1,060m + 0,501m^2 + 0,008m^3 + 0,091m^4),$$

$$\Delta_0 = (10,722 - 1,174m + 2,99m^2)(m - 1),$$

где $m = k^2 + 1$.

Полученная функция достигает минимума $R^* = 4,86$ при $k^* = 1,75$. Учитывая явный вид (2.15) числа Рейнольдса, находим секундный расход жидкости в струе

$$Q^* = 29,16\mu,$$

при котором возможно образование вихрей, сопровождающих струю.

Для воды (динамическая вязкость $\mu = 10^{-3}$ кг/(м·с)) расход Q^* составляет 30 г в секунду через поперечное сечение потока в один квадратный сантиметр. Такой расход воды соответствует одному кубокилометру воды в год через поперечное сечение потока площадью в 1 м^2 . К примеру, р. Дон пропускает в Азовское море 18 км^3 воды в год. Площадь поперечного сечения русла Дона в устье $\sim 500 \times 5\text{ м}^2$. Поэтому через квадратный метр площади Дон пропускает $\sim 10^{-2}$ кубокилометров воды в год. Эта величина на два порядка меньше требуемой для образования спутных вихрей. Вследствие этого при прохождении Доном опор ростовских мостов образующиеся водовороты не сопровождают течение вниз по потоку, а быстро разрушаются. Только мощные течения типа Гольфстрим или струйные потоки в атмосферах планет с большим расходом жидкости поддерживают свои спутные вихри, что и известно из наблюдений за струйными течениями в атмосфере Земли [16] и в атмосфере Юпитера [1].

Результаты работы найдут применения в гидродинамике планетных атмосфер, в океанологии, в гидродинамике турбулентных течений жидкости.

Литература

1. Юпитер / Под ред. Т. Герелса, М.: Мир, 1978–1979. (Ч. I, II, III).
2. Никаноров А. М., Заволженский М. В., Трунов Н. М. Винтовые турбулентные течения в угловых областях. Краснодар: Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2007. № 1. С. 50–59.
3. Заволженский М. В., Руткевич П. Б. Развита турбулентность в трубах. Пр. № 2140, М.: 2007. 39 с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
5. Струминский В. В. К теоретическим основам турбулентных течений. ДАН СССР. 1984. Т. 208. № 3. С. 570–574.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М: Гостехиздат, 1954. 795 с.
7. Белоцерковский О. М., Опарин А. М., Четкин В. М. Турбулентность. Новые подходы. М.: Наука, 2002. 287 с.
8. Этюды о турбулентности. М.: Наука, 1994. 291 с.

-
9. Булеев Н. И. Пространственная модель турбулентного обмена. М.: Наука, 1989. 344 с.
 10. Фридман Б. А. Турбулентность водных потоков. Л.: Гидрометеоиздат, 1991. 239 с.
 11. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Ф.-М., 1963. Т. 2. 727 с.
 12. Монин А. С. Гидродинамика атмосферы, океана и земных недр. С.-Пб: Гидрометеоиздат, 1999. 524 с.
 13. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.
 14. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
 15. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, т. II, 1986. 415 с.
 16. Маров М. Я. Планеты Солнечной системы. М.: Наука, 1986. 320 с.

Ключевые слова: жидкость, вязкость, струя, расход, напряжения Рейнольдса, нелинейное турбулентное сопротивление, уравнения Навье-Стокса, скорость, граничные условия, нелинейность, бифуркация.

Статья поступила 20 марта 2009 г.
Южное отделение Института водных проблем РАН
© Никаноров А. М., Заволженский М. В., 2009