УДК 539.375:534.1

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКОВ С СИСТЕМОЙ МИКРОТРЕЩИН[1]

Пряхина О. Д.[2], Смирнова А. В.[3]

INTEGRAL EQUATIONS OF DYNAMIC MIXED PROBLEMS FOR PIEZOELECTRIC MATERIALS WITH A SYSTEM OF MICROFRACTURES

Pryakhina O. D., Smirnova A. V.

The work considers an antiplane dynamic electroelasticity problem for the semi-bounded layered medium in the presence of a system of electrodes on its surface and defects, such as detachment on the boundary surfaces. Functional-matrix relations are developed, which relate mechanical displacements and stresses, electrical induction and potential, as well as their jumps on the inhomogeneities boundaries in an arbitrary point of the medium. These relations are used for the construction of the systems of integral equations of mixed problems.

Keywords: electroelasticity, system of microfractures, integral equations, conjugate wave fields.

В различных областях инженерной практики находят применение технологии, основанные на явлении пьезоэлектричества. В частности особое значение имеют задачи, которые связаны с обнаружением дефектов в однородных средах, находящихся под воздействием электрических полей. Примером могут служить сварные соединения конструкций и материалов. Для возбуждения поверхностных волн в пьезосредах используются системы электродов, на которых задаются изменяющиеся во времени по известному закону электрические и (или) механические нагрузки.

В работе рассматривается антиплоская динамическая задача электроупругости для полуограниченной слоистой среды при наличии на ее поверхности системы электродов и дефектов типа отслойки на границах раздела слоёв. Важным моментом при решении задачи является построение функционально-матричных соотношений, связывающих механические перемещения и напряжения, электрическую индукцию и потенциал, а также их скачки на границах неоднородностей, позволяющие определить динамические характеристики в произвольной точке среды. Эти соотношения являются основой построения систем интегральных уравнений смешанных задач, для решения которых можно применять аналитические или численные методы. Для построения и исследования указанных соотношений предложен эффективный метод [1–3], основанный на использовании специального представления решения для одного слоя [4]. Метод позволяет аналитически исследовать структуру сопряженных полей в электроупругих средах с произвольным количеством слоёв и расположением дефектов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о гармонических колебаниях пакета из N плоскопараллельных электроупругих слоев толщины $H = 2(h_1 + h_2 + \ldots + h_N)$, занимающего объем $-H \leqslant y \leqslant 0$, $-\infty \leqslant x, z \leqslant +\infty$ (h_k– полутолщина k-го слоя). На границах смены физико-механических свойств слоев имеют-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-08-00144, 09-01-96501, 09-01-96502), Рособразования (проект 1.7.08), гранта Президента РФ (НШ-2298.2008.1).

[2]Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующая кафедрой высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: donna@kubsu.ru.

[3]Смирнова Алла Васильевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: vtppchs@kubsu.ru.

ся дефекты типа трещин, расположенные в областях

$$\Omega_k : \left\{ y = -2\sum_{j=1}^{k} h_j, \quad a_k \leqslant x \leqslant b_k,\ -\infty < z < +\infty \right\},$$

$$k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Поверхность среды электродирована (покрыта системой электродов) и подвергается механическому и электрическому воздействию, характеризуемому вектором, имеющим своими компонентами составляющие вектора механического усилия и нормальную составляющую вектора электрической индукции, которые могут быть заданными, либо определяться из решения контактной задачи. Нижняя грань пакета жестко сцеплена с недеформируемым основанием, металлизирована и закорочена.

В качестве материала электроупругих слоев будем рассматривать YX-срезы пьезокристаллов класса $6mm$ гексагональной сингонии с осью симметрии, параллельной поверхности среды или пьезокерамику, поляризованную вдоль оси z. В этом случае имеем антиплоскую задачу о сдвиговых колебаниях, в которой заданные и искомые векторные величины имеют только две составляющие, не зависящие от координаты z

$$\mathbf{t}_k = \{t_k(x), d_k(x)\}\, e^{-i\omega t},$$

$$\mathbf{w}_k = \{w_k(x,y), \varphi_k(x,y)\}\, e^{-i\omega t}, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\Delta\mathbf{w}_k = \{\Delta w_k(x), \Delta\varphi_k(x)\}\, e^{-i\omega t}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Здесь $\mathbf{t}_k$ — векторы, характеризующие взаимодействие между слоями (t_k — сдвиговые напряжения, d_k — нормальная компонента вектора электрической индукции); $\mathbf{w}_k$ — вектор, компонентами которого являются смещения w_k точек k-го слоя и электрический потенциал φ_k; $\Delta\mathbf{w}_k$ — вектор, компоненты которого $\Delta w_k(x)$ — скачок перемещений, $\Delta\varphi_k(x)$ — скачок электрического потенциала на берегах трещины, t — время, ω — частота колебаний.

На поверхности среды и на границах раздела слоев заданы смешанные граничные условия

$$y = 0: \quad \mathbf{w}(x,0) = \mathbf{w}_0(x)\, e^{-i\omega t}, \quad x \in \Omega_0,$$

$$\mathbf{t}_0 = 0, \quad x \notin \Omega_0;$$

$$y = -2\sum_{j=1}^{k} h_j: \quad \begin{cases} \mathbf{t} = \mathbf{t}_k(x)\, e^{-i\omega t},\ x \in \Omega_k, \\ \Delta\mathbf{w}_k(x) = 0,\ x \notin \Omega_k, \\ \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1; \end{cases} \tag{1.1}$$

$$y = -H: \quad \mathbf{w}(x,-H) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Если на поверхность среды нанесена система электродов, занимающих области Ω_{0l}, $l = 1, 2, \ldots, M_0$, а на границах раздела слоев имеется множество дефектов-трещин в областях Ω_{km}, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, $m = 1, 2, \ldots, M_k$, то граничные условия на верхней грани и на стыке слоев перепишутся в виде

$$y = 0: \quad \begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{w}_{0l}(x)\, e^{-i\omega t},\ x \in \Omega_{0l}, \\ \mathbf{t}_{0l} = 0,\ x \notin \Omega_{0l}, \end{cases}$$

$$y = -2\sum_{j=1}^{k} h_j: \quad \begin{cases} \mathbf{t} = \mathbf{t}_{km}(x)\, e^{-i\omega t}, \\ \qquad x \in \Omega_{km}, \\ \Delta\mathbf{w}_{km}(x) = 0, \\ \qquad x \notin \Omega_{km}, \end{cases} \tag{1.2}$$

(M_k — количество дефектов в k-ой плоскости раздела слоев).

В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен и рассматриваются амплитудные значения заданных и искомых функций.

2. Построение основных матрично-функциональных соотношений

Введем локальную систему координат для каждого слоя

$$x_k = x, \quad y_k = y + 2\sum_{m=1}^{k-1} h_m + h_k,$$

$$-h_k \leqslant y_k \leqslant h_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Задача сводится к определению амплитудных функций механических смещений $w_k(x,y)$ и электрического потенциала

$\varphi_k(x,y)$ в k-ом слое из системы дифференциальных уравнений размерности $2\times N$, которая в безразмерных величинах имеет вид

$$\Delta w_k(x,y)+e_k\Delta\varphi_k(x,y)+ \\ +\omega_k^2 w_k(x,y)=0, \quad (2.1)$$

$$e_k\Delta w_k(x,y)-\varepsilon_k\Delta\varphi_k(x,y)=0, \quad (2.2)$$

$$k=1,2,\ldots,N.$$

Здесь $\omega_k^2=\frac{\rho_k\omega^2 b^2}{c_{44}^k}$, $e_k=\frac{le_{15}^k}{c_{44}^k}$, $\varepsilon_k=\frac{l^2\varepsilon_{11}^k}{c_{44}^k}$ — безразмерные величины; c_{44}^k, e_{15}^k, ε_{11}^k, ρ_k — упругая и пьезоэлектрическая постоянные, диэлектрическая проницаемость, плотность k-го слоя соответственно; Δ — двумерный оператор Лапласа; b — характерный линейный размер; l имеет размерность электрического поля. Перемещения отнесены к b, электрический потенциал — к lb.

Для построения решения указанной системы предварительно необходимо сформулировать однородные граничные условия.

Предположим, что на поверхности среды задано динамическое воздействие, характеризуемое вектором $\mathbf{t}_0$

$$y_1=h_1: \quad \mathbf{t}=\mathbf{t}_0(x), \quad x\in(-\infty,\infty).$$

На границах раздела слоёв $y_k=-h_k$ имеют место непрерывные условия для вектора $\mathbf{t}_k$ и разрывные для вектора $\mathbf{w}_k$

$$y_k=-h_k: \\ \mathbf{w}_k(x,-h_k)=\mathbf{w}_{k+1}(x,h_{k+1})+\Delta\mathbf{w}_k(x),$$

$$\mathbf{t}_{k+1}(x)=\mathbf{t}_k(x)\ , \quad x\in(-\infty,\infty).$$

На нижней грани пакета слоёв выполняются условия жёсткой заделки и металлизации

$$y_N=-h_N: \\ \mathbf{w}_N(x,-h_N)=0, \quad x\in(-\infty,\infty).$$

Если среда представляет собой пакет слоев, жёстко сцеплённый с электроупругим полупространством, то последнее соотношение следует заменить условием

$$\mathbf{w}_N(x,y_N-h_N)\to 0, \quad h_N\to\infty.$$

Введем оператор преобразования Фурье по переменной x

$$F\mathbf{t}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{t}(x)e^{i\alpha x}dx=\mathbf{T}(\alpha).$$

Решение уравнений (2.1), (2.2) для k-го слоя в трансформантах Фурье будет определяться выражением

$$\mathbf{W}_k(y_k)= \\ =\frac{1}{c_k}\left[\mathbf{B}_+(y_k)\mathbf{T}_{k-1}+\mathbf{B}_-(y_k)\mathbf{T}_k\right], \quad (2.3)$$

$$-h_k\leqslant y_k\leqslant h_k,$$

где $\mathbf{T}_0=F\mathbf{t}_0$, $\mathbf{T}_k=F\mathbf{t}_k$, $\mathbf{W}_k=F\mathbf{w}_k$, $\Delta\mathbf{W}_k=F\Delta\mathbf{w}_k$, $c_k=c_{44}^k/c_{44}^1$.

Так как на границах раздела слоев имеют место разрывные граничные условия для перемещений и электрического потенциала, то условия стыковки слоев имеют вид

$$\mathbf{W}_k(-h_k)=\mathbf{W}_{k+1}(h_{k+1})+\Delta\mathbf{W}_k, \quad (2.4)$$

$$k=1,2,\ldots,N-1,$$

где $\Delta\mathbf{W}_k=\{\Delta W_k,\Delta\Phi_k\}$ — трансформанта Фурье вектора $\Delta\mathbf{w}_k=\{\Delta w_k,\Delta\varphi_k\}$.

Условие на нижней грани пакета слоев

$$\mathbf{W}_N(-h_N)=0. \quad (2.5)$$

Граничные условия (2.4), (2.5), с учетом (2.3) приводят к рекуррентным соотношениям для определения векторов взаимодействия между слоями $\mathbf{T}_k$

$$\mathbf{F}_k\mathbf{T}_k=\mathbf{G}_k\mathbf{T}_{k-1}+\mathbf{\Lambda}_k, \quad k=1,2,\ldots,N,$$

$$\mathbf{\Lambda}_k=\mathbf{D}_{k+1}\mathbf{\Lambda}_{k+1}+c_k\Delta\mathbf{W}_k,$$

$$\mathbf{\Lambda}_N=0, \quad \mathbf{D}_k=g_{k-1}\mathbf{B}_-(h_k)\mathbf{F}_k^{-1}.$$

Полагая в последних соотношениях последовательно $k=1,2,...,N$, определим $\mathbf{T}_k$ через поверхностную нагрузку $\mathbf{T}_0$ и вектор скачков $\Delta\mathbf{W}_k$ на берегах трещин

$$\mathbf{T}_k=\prod_{i=k}^{1}(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i)\mathbf{T}_0+ \\ +\sum_{m=1}^{k}\prod_{i=k}^{m}(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i)\mathbf{G}_m^{-1}\mathbf{\Lambda}_m. \quad (2.6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathbf{F}_k(h_k,\ldots,h_N)= \\ =\mathbf{B}_-(-h_k)-g_k\mathbf{R}_{N-k}(h_{k+1},\ldots,h_N),$$

$$g_k=\frac{c_k}{c_{k+1}}, \quad k=1,2,\ldots,N-1,$$

$$\mathbf{F}_N(h_N)=\mathbf{B}_-(-h_N), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{G}_k=-\mathbf{B}_+(-h_k), \quad k=1,2,\ldots,N,$$

$\mathbf{R}_{N-k+1}(h_k) \equiv \mathbf{R}_{N-k+1}(h_k, h_{k+1}, \ldots, h_N)$ — матрицы-символы Грина пакета k слоев без дефектов, определяемые по формуле [3]

$$\mathbf{R}_{N-k+1}(h_k) = \\ = \mathbf{B}_+(h_k) + \mathbf{B}_-(h_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{G}_k. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.6) в (2.3), определим вектор $\mathbf{W}_k$ (смещения точек и электрический потенциал в k-м слое)

$$\mathbf{W}_k(y_k) = \\ = \frac{1}{c_k}(\mathbf{R}_{N-k+1}(y_k)\left(\prod_{i=k-1}^{1}(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i)\mathbf{T}_0 + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{k-1}\prod_{i=k-1}^{m}(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i)\mathbf{G}_m^{-1}\mathbf{\Lambda}_m\right) + \\ + \mathbf{B}_-(y_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{\Lambda}_k).$$

Последнее выражение преобразуется к виду

$$\mathbf{W}_1(y_1) = \\ = \mathbf{R}_N(y_1)\mathbf{T}_0 + \mathbf{B}_-(y_1)\sum_{m=1}^{N-1}\mathbf{L}_{1m}c_m\Delta\mathbf{W}_m,$$

$$\mathbf{W}_k(y_k) = \\ = \frac{1}{c_k}\sum_{m=1}^{N-1}\left(\mathbf{B}_+(y_k)\mathbf{L}_{(k-1)m} + \mathbf{B}_-(y_k)\mathbf{L}_{km}\right) \times \\ \times (c_m\Delta\mathbf{W}_m + \delta_{1m}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0), \quad (2.9)$$
$$k = 2, 3, \ldots, N-1,$$

$$\mathbf{W}_N(y_N) = \frac{1}{c_N}\mathbf{R}_1(y_N)\sum_{m=1}^{N-1}\mathbf{L}_{(N-1)m} \times \\ \times (c_m\Delta\mathbf{W}_m + \delta_{1m}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0),$$

$$\mathbf{L}_{km} = \begin{cases} \mathbf{M}_{k1}, \ m = 1 \\ \mathbf{L}_{k(m-1)}\mathbf{D}_m + \mathbf{M}_{km}, \ m \leqslant k \\ \mathbf{L}_{k(m-1)}\mathbf{D}_m, \ m > k \end{cases}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{M}_{km} = \prod_{i=k}^{m}\left(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i\right)\mathbf{G}_m^{-1}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{L}_{11} = \mathbf{M}_{11} = \mathbf{F}_1^{-1},$$

$$\delta_{1m} = \begin{cases} 1, \ m = 1 \\ 0, \ m \neq 1 \end{cases} \text{ — символ Кронекера.}$$

Применяя к (2.9) обратное преобразование Фурье, получим интегральное представление решения, позволяющее определить смещения $w_k(x, y)$ и электрический потенциал $\varphi_k(x, y)$ в k-ом слое.

На поверхности среды $y_1 = h_1$ и на стыках слоев $y_k = -h_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N-1$) из (2.6), (2.9) получаем следующие матрично-функциональные соотношения, необходимые для решения смешанной задачи:

$$\mathbf{W}_1(h_1) = \mathbf{R}_N(h_1)\mathbf{T}_0 + \\ + \mathbf{B}_-(h_1)\sum_{m=1}^{N-1}\mathbf{L}_{1m}c_m\Delta\mathbf{W}_m, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{L}_{k1}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 + \sum_{m=1}^{N-1}\mathbf{L}_{km}c_m\Delta\mathbf{W}_k. \quad (2.12)$$

В этих формулах индекс k отвечает линии раздела k-го и $(k+1)$-го слоев, а индекс m — совокупности трещин, расположенных на границе m-го и $(m+1)$-го слоев.

Соотношения (2.11) и (2.12) являются искомыми матрично-функциональными соотношениями при моделировании электроупругого материала пакетом N слоев с трещинами на их стыках. Они позволяют построить СИУ смешанной задачи (1.1) или (1.2) и связывают перемещения, электрический потенциал, напряжения, электрическую индукцию, скачки перемещений и электрического потенциала на берегах трещин.

Если поверхность свободна от усилий и является непроводящей, то имеем

$$\mathbf{W}_1(h_1) = \mathbf{B}_-(h_1)\sum_{m=1}^{N-1}\mathbf{L}_{1m}c_m\Delta\mathbf{W}_m,$$

$$\mathbf{T}_k = \sum_{m=1}^{N-1}\mathbf{L}_{km}c_m\Delta\mathbf{W}_k.$$

Полагая в (2.11), (2.12) $\Delta\mathbf{W}_k = 0$, приходим к случаю идеального контакта между слоями

$$\mathbf{W}_1(h_1) = \mathbf{R}_N(h_1)\mathbf{T}_0, \quad \mathbf{T}_k = \mathbf{L}_{k1}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0.$$

С помощью (2.11), (2.12) можно решать и другие частные задачи, например, когда одна или несколько этажно-расположенных трещин внутри однородного слоя ориентированы параллельно его границам. Для этого в исходной задаче необходимо положить равными физико-механические параметры всех слоев, на стыках которых находятся трещины. В этом случае толщины $2h_k$ этих слоев определяют глубину залегания трещин и расстояния между ними.

Система функционально-матричных соотношений, связывающих в трансформантах Фурье вектор $\mathbf{W}_1(h_1)$, характеризующий сдвиговые перемещения и электрический потенциал на поверхности среды; векторы $\mathbf{T}_k$, характеризующие взаимодействие между слоями; векторы $\Delta\mathbf{W}_k$ $(k = 1, 2, \dots N-1)$, описывающие скачки перемещений и электрического потенциала на границах трещин и вектор внешнего воздействия на поверхности среды $\mathbf{T}_0$, методом работы [1] получена в форме

$$\mathbf{KU} = \mathbf{V}, \tag{2.13}$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{W}_1, \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_{N-1}),$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{T}_0, \Delta\mathbf{W}_1, \Delta\mathbf{W}_2, \dots, \Delta\mathbf{W}_{N-1}).$$

Здесь $\mathbf{W}_1 = \{W_1, \Phi_1\}$, $\mathbf{T}_k = \{T_k, D_k\}$, $\Delta\mathbf{W}_k = \{\Delta W_k, \Delta\Phi_k\}$ — трансформанты Фурье векторов $\mathbf{w}_1 = \{w_1, \varphi_1\}$, $\mathbf{t}_k = \{t_k, d_k\}$, $\Delta\mathbf{w}_k = \{\Delta w_k, \Delta\varphi_k\}$ соответственно.

Диагональными элементами блочной матрицы $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_{km})$, $k, m = 1, \dots, N$ являются матрицы-функции

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{R}_N(h_1) \equiv \mathbf{R}_N(h_1, \dots, h_N),$$

$$\mathbf{K}_{22} = \mathbf{F}_1^{-1}, \tag{2.14}$$

$$\mathbf{K}_{mm} = \mathbf{F}_{m-1}^{-1}\mathbf{G}_{m-1}\mathbf{K}_{(m-1)(m-1)} \times \\ \times \mathbf{B}_-(h_{m-1})\mathbf{F}_{m-1}^{-1} + \prod_{k=1}^{m-2} (g_k)^{-1}\,\mathbf{F}_{m-1}^{-1}, \\ m = 3, \dots, N.$$

Недиагональные элементы блочной матрицы имеют вид

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{F}_1^{-1}, \quad \mathbf{K}_{21} = \mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1,$$

$$\mathbf{K}_{km} = \mathbf{K}_{k(m-1)}\mathbf{B}_-(h_{m-1})\mathbf{F}_{m-1}^{-1}, \tag{2.15}$$

$$k < m, \quad k = 1, 2, ..., N-1, \quad m = 3, 4, \dots, N,$$

$$\mathbf{K}_{km} = \mathbf{F}_{k-1}^{-1}\mathbf{G}_{k-1}\mathbf{K}_{k(m-1)},$$

$$k > m, \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad k = 3, 4, \dots, N.$$

Матрицы $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{G}_k$, $\mathbf{R}_k$ даются формулами (2.7), (2.8).

Базовые матрицы $\mathbf{B}_\pm(h_k)$, через которые выражаются все остальные матрицы, входящие в матрично-функциональные соотношения (2.13), имеют структуру

$$\mathbf{B}_\pm(h_k) = \begin{pmatrix} n_1^\pm(h_k) & \frac{e_k}{\varepsilon_k} n_1^\pm(h_k) \\ \frac{e_k}{\varepsilon_k} n_1^\pm(h_k) & \frac{e_k^2}{\varepsilon_k^2} n_1^\pm(h_k) - \frac{1}{\varepsilon_k} n_2^\pm(h_k) \end{pmatrix}.$$

Элементы матриц $\mathbf{B}_\pm$ зависят от параметра α преобразования Фурье по переменной x, частоты колебаний ω и физико-механических параметров слоев.

Функции $n_j^\pm(h_k)$ представимы в виде отношения целых функций

$$n_1^\pm(h_k) = \frac{n_{10}^\pm(h_k)}{\Delta_{10}(h_k)}, \quad n_2^\pm(h_k) = \frac{n_{20}^\pm(h_k)}{\Delta_{20}(h_k)},$$

$$n_{10}^+ = \operatorname{ch}(2h_k\sigma_k), \quad n_{10}^- = -1,$$

$$n_{20}^+ = \operatorname{ch}(2\alpha h_k), \quad n_{20}^- = -1,$$

$$\Delta_{10} = \sigma_k\left(1 + \kappa_{0k}^2\right)\operatorname{sh}(2\sigma_k h_k),$$

$$\Delta_{20} = \alpha\operatorname{sh}(2\alpha h_k).$$

Здесь

$$\sigma_k^2 = \alpha^2 - \frac{\omega_k^2}{1 + \kappa_{0k}^2}, \quad \kappa_{0k}^2 = \frac{e_k^2}{\varepsilon_k}, \quad \omega_k^2 = \frac{\rho_k\omega^2 b^2}{c_{44}^k}.$$

Переход к слоистому полупространству осуществляется аналогично изложенному в [2].

3. Переход к смешанной задаче

Если на поверхности среды и на стыках слоев имеют место смешанные граничные условия (1.2), записанные в локальных координатах

$$y_1 = h_1: \\ \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_{0l}(x), \ x \in \Omega_{0l}; \quad \mathbf{t}_{0l} = 0, \ x \notin \Omega_{0l},$$

$$y_k = -h_k: \\ \mathbf{t}_{km}(x) = \mathbf{t}_{(k+1)m}(x), \ x \in \Omega_{km}; \\ \Delta\mathbf{w}_{km} = 0, \ x \notin \Omega_{km},$$

$$y_N = -h_N: \quad \mathbf{w}_N = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

то на основе соотношений (2.13)–(2.15) легко выписываются СИУ динамической смешанной задачи относительно неизвестных векторов скачков перемещений, электрического потенциала на берегах трещин и контактных напряжений, плотности распределения зарядов на поверхности среды.

Введем интегральные матричные операторы

$$\tilde{\mathbf{K}}(\Omega)\mathbf{t} = \int_\Omega \mathbf{k}(x - \xi)\,\mathbf{t}(\xi)\,d\xi,$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta} \mathbf{K}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$\mathbf{L}_q(\mathbf{t}_{0l}, \Delta\mathbf{w}_{km}) = \sum_{l=1}^{M_0} \tilde{\mathbf{K}}_{q1}(\Omega_{0l})\mathbf{t}_{0l} + \\ + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_k} \tilde{\mathbf{K}}_{q(k+1)}(\Omega_{km})\Delta\mathbf{w}_{km},$$

$$q = 1, 2, \ldots, N.$$

Выбор контура δ диктуется принципом излучения [5]. Блочную матрицу $\mathbf{K}(\alpha)$ с элементами-матрицами $\mathbf{K}_{km}(\alpha)$ (2.14), (2.15) будем называть матрицей-символом СИУ.

В принятых обозначениях СИУ, имеющая размерность $M + M_0$ ($M = M_1 + M_2 + \ldots \ldots + M_{N-1}$ — общее количество трещин в среде, M_0 — количество электродов на поверхности), запишется в виде

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{t}_{0l}, \Delta\mathbf{w}_{km}) = \mathbf{w}_{0s}(x), \quad x \in \Omega_{0s},$$

$$s = 1, 2, \ldots, M_0;$$

$$\mathbf{L}_{p+1}(\mathbf{t}_{0l}, \Delta\mathbf{w}_{km}) = \mathbf{t}_{pn}(x), \quad x \in \Omega_{pn},$$

$$n = 1, 2, \ldots, M_p, \quad p = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Здесь Ω_{0s} — области контакта штампов-электродов с поверхностью среды, Ω_{pn} — области, занимаемые трещинами в плоскостях $y_p = -h_p$; $\mathbf{w}_{0s}$ — заданные амплитудные векторы, имеющие своими компонентами сдвиговые перемещения и электрический потенциал; $\mathbf{t}_{pn}$ — векторы взаимодействия, известные на берегах трещин.

Полученные уравнения позволяют исследовать разные аспекты динамики слоистого пьезоэлектрического материала с учетом связанности электрических и механических полей.

Полагая $\Delta\mathbf{w}_{km} = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, N-1$, приходим к задаче для составной среды без дефектов и известному матричному ИУ свертки [4]

$$\sum_{l=1}^{M_0} \tilde{\mathbf{K}}_{11}(\Omega_{0l})\mathbf{t}_{0l} = \mathbf{w}_{0s}(x),$$

$$x \in \Omega_{0s}, \quad s = 1, 2, \ldots, M_0.$$

Если принять $\mathbf{t}_{0l} = 0$, то получим динамическую антиплоскую задачу о колебаниях составной электроупругой среды, вызванных вибрацией берегов трещин и соответствующую ей систему матричных ИУ

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_k} \tilde{\mathbf{K}}_{(p+1)(k+1)}(\Omega_{km}) \Delta\mathbf{w}_{km} = \\ = \mathbf{t}_{pn}(x), \quad x \in \Omega_{pn}, \quad (3.1)$$

$$n = 1, 2, \ldots, M_p, \quad p = 1, 2, \ldots, N-1.$$

При наличии одной трещины на границе раздела $y_1 = -h_1$, СИУ (3.1) упрощается и принимает вид

$$\tilde{\mathbf{K}}_{22}(\Omega_1) \Delta\mathbf{w}_1 = \mathbf{t}_1(x), \quad x \in \Omega_1. \quad (3.2)$$

Решение ИУ вида (3.2) построено методом фиктивного поглощения в [6].

Литература

1. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 500–507.
2. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов вибропрочности» // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №2. С. 44–53.
3. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
4. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Рекуррентная процедура вычисления элементов матрицы Грина многослойных сред // Вестник ЮНЦ РАН. Т. 4. №1. 2008. С. 3–7.
5. *Бабешко В. А.* Обобщённый метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
6. *Кардовский И. В., Пряхина О. Д.* Метод фиктивного поглощения для плоских задач об интерфейсных трещинах // ДАН. 2006. Т. 410. №6. С. 759–762.

Ключевые слова: электроупругость, система микротрещин, интегральные уравнения, сопряженные волновые поля.

Статья поступила 21 апреля 2009 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар