УДК 539.3

О ПРИЛОЖЕНИЯХ БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

Бабешко В. А.[2], Евдокимова О. В.[3], Бабешко О. М.[4]

ABOUT APPLICATIONS OF BLOCK ELEMENTS

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M.

The work discusses applications of the block element method in various problems of mechanics and geophysics. The authors study the possibility of applying analytical or numeric-analytical methods to investigating problems not only for a separate body, but also for such objects as built-up areas. To apply this approach to investigating objects of complex configuration, a block element in the form of a pyramid is used, which makes it possible to describe e.g. inclined boundaries of bodies more precise than with the use of a rectangular parallelepiped. The representation of the block element, pseudodifferential equations and general representation of the solution of one of anisotropic boundary problems is adduced.

Keywords: a block element, a boundary problem, anisotropic equations, a rectangular pyramid.

Метод блочного элемента, развитый в работах [1, 2], в отличие от метода конечного элемента, позволяет точно описывать волновые поля в области, при условии такого же решения соответствующих псевдодифференциальных уравнений. Поэтому представляет интерес развитие этого метода для охвата областей сложной конфигурации, где волновые поля пока не построены. К ним относятся не только отдельные тела, но и такие объекты, как застроенные территории. Благодаря построению блочного элемента вопросы напряженно-деформированного состояния литосферных плит и территорий большой протяженности, в том числе с границами, уходящими на бесконечность, становятся доступными уже для исследования как аналитическими, так и численно-аналитическими подходами, детально описанными в [1, 2].

Блочный элемент в форме прямоугольного параллелепипеда, введенный в работе [1], эффективен при изучении тел, имеющих плоскую структуру. Кроме этого, он может вводиться для описания решений краевых задач в строго внутренних точках области или на плоской границе. Вблизи неплоской границы он неудобен, хотя его использование в уменьшающихся размерах может допускаться. Гораздо более удобным оказывается блочный элемент, имеющий скошенные границы. Для описания общих границ областей ниже вводится блочный элемент в форме прямоугольной пирамиды, занимающей в пространстве R^3 область Ω. Ребра прямоугольной пирамиды являются осями прямоугольной системы координат xo, (x_1, x_2, x_3, o), с на-

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (09-08-00170, 08-08-00468, 09-08-00171, 08-08-00669), программы Юг России, проекты (08-01-99012, 08-01-99013, 08-01-99016, 08-08-99090, 08-08-99091, 09-01-96500, 09-01-96503, 09-08-96522, 09-08-96527, 09-08-00294), гранта Президента МД-1554.2009.1, проекта НШ-2298.2008.1, 02.515.11.0005, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

[3]Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[4]Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

чалом в точке o, а наклонная грань описывается плоскостью в отрезках на осях. Тогда пирамида полностью определяется ее размерами вдоль ребер $0 \leqslant x_1 \leqslant 2c$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 2a$, $0 \leqslant x_3 \leqslant 2b$ и плоскостью v, задаваемой уравнением

$$px_1 + qx_2 + rx_3 - 1 = 0, \tag{1}$$

$$p = (2c)^{-1}, \quad q = (2a)^{-1}, \quad r = (2b)^{-1}.$$

Такой блочный элемент необходим как для описания границы произвольной области, так и для обеспечения сплошного контакта с внутренними блочными элементами в форме прямоугольных параллелепипедов [1], а также для общих блочных структур [3–5].

1. Будем рассматривать блочный элемент как топологическое многообразие Ω с краем $\partial\Omega$, для чего введем топологию, индуцировав ее метрикой эвклидова пространства. Осуществим касательное расслоение тех частей границы этого многообразия, которые имеют ограниченную кривизну, т.е. опуская ребра. На каждой грани индуцируются правые локальные системы координат. На ортогональных гранях принимаем прямоугольные координаты, полностью совпадающие с введенными на таких же гранях в прямоугольном параллелепипеде в [1] с сохранением нумерации.

Принимаем в качестве начал координат те же точки, что и в случае упомянутого параллелепипеда. Таким образом, в качестве начал локальных координат принимаются следующие точки: для системы x^2o^2 берется точка $o^2\,(c, 0, b)$; для системы x^3o^3 — соответственно точка $o^3\,(c, a, 0)$, для системы x^6o^6 — точка $o^6\,(0, a, b)$. В качестве начала координат локальной системы $x^\nu o^\nu$ на плоскости (1) принимается общая точка перпендикуляра, опущенного из начала $0\,(0, 0, 0)$ на линию пересечения плоскостей (1) и $x_3 = 0$, и этой линии.

Во всех локальных системах координат, как принято и в [1], первые две оси лежат в касательной плоскости, а третья направлена по внешней нормали. Сохраняются принятые в [1] обозначения локальных координат с учетом новой $x^\nu o^\nu$, и строятся формулы перехода между локальными координатами. В результате имеем соотношения с суммированием по нижним повторяющимся индексам, что будет использоваться и в дальнейшем

$$x_1^2 = -c_{3m}x_m^\nu - x_{3\nu0}^3 - b,$$

$$x_2^2 = c_{2m}x_m^\nu + x_{2\nu0}^3,$$

$$x_3^2 = c_{1m}x_m^\nu + x_{1\nu0}^3 - a,$$

$$x_k^3 = c_{km}x_m^\nu + x_{k\nu0}^3,$$

$$x_1^6 = c_{1m}x_m^\nu + x_{1\nu0}^3,$$

$$x_2^6 = -c_{3m}x_m^\nu - x_{3\nu0}^3 - b,$$

$$x_3^6 = c_{2m}x_m^\nu + x_{2\nu0}^3 - c.$$

Здесь приняты обозначения

$$c_{11} = -\frac{p}{M_2}, \quad c_{12} = \frac{rq}{M_1M_2}, \quad c_{13} = -\frac{q}{M_1},$$

$$c_{21} = \frac{q}{M_2}, \quad c_{22} = \frac{rp}{M_1M_2}, \quad c_{23} = -\frac{p}{M_1},$$

$$c_{31} = 0, \quad c_{32} = -\frac{p^2+q^2}{M_1M_2}, \quad c_{33} = -\frac{r}{M_1},$$

$$M_1 = \sqrt{p^2+q^2+r^2}, \quad M_2 = \sqrt{p^2+q^2}.$$

Ниже для краткости записи будем принимать $c_{mn} \equiv c_{mn}^3$.

Начало системы координат $x^\nu o^\nu$ в системе x^3o^3 дается значениями

$$x_{1\nu0}^3 = \frac{a\left(a^2-c^2\right)}{a^2+c^2}, \quad x_{2\nu0}^3 = \frac{c\left(c^2-a^2\right)}{a^2+c^2},$$

$$x_{3\nu0}^3 = 0.$$

Введем операторы преобразования Фурье

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k)\varphi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1^k, x_2^k)\times$$
$$\times \exp i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k)\,dx_1^k dx_2^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k)\Phi = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha_1^k, \alpha_2^k)\times$$
$$\times \exp\left[-i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k)\right] d\alpha_1^k d\alpha_2^k,$$

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k)\varphi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1^k, x_2^k, x_3^k)\times$$
$$\times \exp i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k + \alpha_3^k x_3^k)\,dx_1^k dx_2^k dx_3^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k, x_3^k)\Phi =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_2^k)\times$$
$$\times \exp\left[-i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k + \alpha_3^k x_3^k)\right] d\alpha_1^k d\alpha_2^k d\alpha_3^k,$$

$$k=1,2,\ldots,6.$$

Тогда для координат и параметров Фурье имеем формулы перехода в виде

$$x_m^\nu = c_{km}^2 x_k^2 + x_{m\nu 0}^2, \quad \alpha_m^\nu = c_{km}^2 \alpha_k^2,$$

$$x_k^2 = c_{km}^2 x_m^\nu - c_{km}^2 x_{m\nu 0}^2,$$

$$x_m^\nu = c_{km}^3 x_k^3 + x_{m\nu 0}^3, \quad \alpha_m^\nu = c_{km}^3 \alpha_k^3,$$

$$x_k^3 = c_{km}^3 x_m^\nu - c_{km}^3 x_{m\nu 0}^3,$$

$$x_m^\nu = c_{km}^6 x_k^6 + x_{m\nu 0}^6, \quad \alpha_m^\nu = c_{km}^6 \alpha_k^6,$$

$$x_k^6 = c_{km}^6 x_m^\nu - c_{km}^6 x_{m\nu 0}^6.$$

Здесь введены обозначения

$$-c_{31}=c_{11}^2, \quad c_{21}=c_{21}^2, \quad c_{11}=c_{31}^2,$$

$$-c_{32}=c_{12}^2, \quad c_{22}=c_{22}^2, \quad c_{12}=c_{32}^2,$$

$$-c_{33}=c_{13}^2, \quad c_{23}=c_{23}^2, \quad c_{13}=c_{33}^2,$$

$$c_{11}a - c_{31}b + x_{1\nu 0}^3 = x_{1\nu 0}^2,$$

$$c_{12}a - c_{32}b = x_{2\nu 0}^2,$$

$$c_{13}a - c_{33}b = x_{3\nu 0}^2,$$

$$c_{11}=c_{11}^6, \quad -c_{31}=c_{21}^6, \quad c_{21}=c_{31}^6,$$

$$c_{12}=c_{12}^6, \quad -c_{32}=c_{22}^6, \quad c_{22}=c_{32}^6,$$

$$c_{13}=c_{13}^6, \quad -c_{33}=c_{23}^6, \quad c_{23}=c_{33}^6,$$

$$c_{21}c - c_{31}b + x_{1\nu 0}^6 = x_{1\nu 0}^6,$$

$$c_{22}c - c_{32}b = x_{2\nu 0}^6,$$

$$c_{23}c - c_{33}b = x_{3\nu 0}^6.$$

2. В работе [1] под номером (1) рассматривается краевая задача, на примере которой вводится блочный элемент в форме прямоугольного параллелепипеда, она же рассматривается и в настоящей работе но в прямоугольной пирамиде. В [1] представлен вид дифференциальных уравнений краевой задачи во всех введенных граничных локальных системах координат, сохраняемый и для прямоугольной пирамиды в системах $x^n o^n$, $n=2$, 3,6. В настоящей работе введена на плоскости (1) новая локальная система координат $x^\nu o^\nu$, в которой дифференциальное уравнение краевой задачи имеет вид

$$Q\left(\partial x_1^\nu, \partial x_2^\nu, \partial x_3^\nu\right)\varphi \equiv \left(\mathrm{A}_{ms}^\nu \partial x_m^\nu \partial x_s^\nu + \mathrm{A}\right)\varphi = 0,$$

$$\mathrm{A}_{pp} \mathrm{c}_{pm} \mathrm{c}_{ps} = \mathrm{A}_{ms}^\nu.$$

Внешняя форма для этого уравнения представима

$$\omega = R^\nu dx_1^\nu \wedge dx_2^\nu + Q^\nu dx_3^\nu \wedge dx_1^\nu + \mathrm{P}^\nu dx_2^\nu \wedge dx_3^\nu,$$

$$R^\nu = e^{i\langle\alpha x\rangle}\Bigg[\mathrm{A}_{33}^\nu\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_3^\nu} - i\alpha_3^\nu\varphi_\nu\right) - \\ - i\alpha_1^\nu \mathrm{A}_{13}^\nu\varphi_\nu - i\alpha_2^\nu \mathrm{A}_{23}^\nu\varphi_\nu\Bigg],$$

$$G^\nu = e^{i\langle\alpha x\rangle}\Bigg[\mathrm{A}_{22}^\nu\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_2^\nu} - i\alpha_2^\nu\varphi_\nu\right) - \\ - i\alpha_1^\nu \mathrm{A}_{12}^\nu\varphi_\nu + \mathrm{A}_{23}^\nu\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_3^\nu}\Bigg],$$

$$\mathrm{P}^\nu = e^{i\langle\alpha x\rangle}\Bigg[\mathrm{A}_{11}^\nu\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_1^\nu} - i\alpha_1^\nu\varphi_\nu\right) + \\ + \mathrm{A}_{13}^\nu\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_3^\nu} + \mathrm{A}_{12}^\nu\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_2^\nu}\Bigg],$$

$$e^{i\langle\alpha x\rangle} = \exp i\left(\alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu + \alpha_3^\nu x_3^\nu\right).$$

Здесь m — номер уравнения, r — номер представления функции ϕ_r.

Внешние формы для остальных локальных систем координат приведены в [1]. Для построения функциональных уравнений введем обозначения

$$\exp i\left(\alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_2^2 x_2^2 + \alpha_3^2 x_3^2\right) = \exp i\alpha_k^2 x_k^2 = \\ \exp i\alpha_k^2(c_{km}^2 x_m^\nu - c_{km}^2 x_{m\nu 0}^2) = \\ = \mathrm{E}_{2\nu}\left(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, x_1^\nu, x_2^\nu, x_3^\nu\right),$$

$$\exp i\left(\alpha_1^3 x_1^3 + \alpha_2^3 x_2^3 + \alpha_3^3 x_3^3\right) = \exp i\alpha_k^3 x_k^3 = \\ \exp i\alpha_k^3(c_{km}^3 x_m^\nu - c_{km}^3 x_{m\nu 0}^3) = \\ = \mathrm{E}_{3\nu}\left(\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3, x_1^\nu, x_2^\nu, x_3^\nu\right),$$

$$\exp i\left(\alpha_1^6 x_1^6 + \alpha_2^6 x_2^6 + \alpha_3^6 x_3^6\right) = \exp i\alpha_k^6 x_k^6 = \\ \exp i\alpha_k^6(c_{km}^6 x_m^\nu - c_{km}^6 x_{m\nu 0}^6) = \\ = \mathrm{E}_{6\nu}\left(\alpha_1^6, \alpha_2^6, \alpha_3^6, x_1^\nu, x_2^\nu, x_3^\nu\right),$$

$$\exp i\left(\alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu + \alpha_3^\nu x_3^\nu\right) = \exp i\alpha_k^\nu x_k^\nu = \\ \exp i\alpha_k^\nu(c_{mk}^n x_m^n + x_{k\nu 0}^n) = \\ = \mathrm{E}_{\nu n}\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu, x_1^n, x_2^n, x_3^n\right),$$

$$n=2,3,6.$$

Приведем функциональные уравнения краевой задачи для прямоугольной пирамиды в двух типичных системах координат $x^\tau o^\tau$, $\tau = 3$, ν

$$\mathrm{K}_3\Phi_3 = \int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}\left(\varphi'_{33} - i\alpha_3^3\varphi_3\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^3\eta_1^3 + \alpha_2^3\eta_2^3\right] d\eta_1^3 d\eta_2^3 - \\ - \int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{11}\left(\varphi'_{23} - i\alpha_1^3\varphi_2\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^3\alpha + \alpha_2^3 x_2^2 - \alpha_3^3\left(x_1^2 + b\right)\right] dx_1^2 dx_2^2 - \\ - \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}\left(\varphi'_{63} - i\alpha_2^3\varphi_6\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^3 x_1^6 + \alpha_2^3 c - \alpha_3^3\left(x_2^6 + b\right)\right] dx_1^6 dx_2^6 + \\ + \iint_{\partial\Omega_\nu}\Big[\mathrm{A}_{33}^\nu\left(\varphi'_{\nu 3} - ic_{k3}^3\alpha_k^3\varphi_\nu\right) - \\ - ic_{k1}^3\alpha_k^3\mathrm{A}_{13}^\nu\varphi_\nu - ic_{k3}^3\alpha_k^3\mathrm{A}_{23}^\nu\varphi_\nu\Big] \times \\ \times \mathrm{E}_{3\nu}\left(\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3, x_1^\nu, x_2^\nu, 0\right) dx_1^\nu dx_2^\nu,$$

$$\mathrm{K}_\nu\Phi_\nu = \iint_{\partial\Omega_\nu}\Big[\mathrm{A}_{33}^\nu\left(\varphi'_{\nu 3} - i\alpha_3^\nu\varphi_\nu\right) - i\alpha_1^\nu\mathrm{A}_{13}^\nu\varphi_\nu - \\ - i\alpha_2^\nu\mathrm{A}_{23}^\nu\varphi_v\Big] \exp i\left[\alpha_1^\nu\eta_1^\nu + \alpha_2^\nu\eta_2^\nu\right] d\eta_1^\nu d\eta_2^\nu + \\ + \int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{11}\left(\varphi'_{23} - ic_{3m}^2\alpha_m^\nu\varphi_2\right) \times \\ \times \mathrm{E}_{\nu 2}\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu, x_1^2, x_2^2, 0\right) dx_1^2 dx_2^2 + \\ + \int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}\left(\varphi'_{33} - ic_{3m}^3\alpha_m^\nu\varphi_3\right) \times \\ \times \mathrm{E}_{\nu 3}\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu, x_1^3, x_2^3, 0\right) dx_1^3 dx_2^3 + \\ + \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}\left(\varphi'_{63} - ic_{3m}^6\alpha_m^\nu\varphi_6\right) \times \\ \times \mathrm{E}_{\nu 6}\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu, x_1^6, x_2^6, 0\right) dx_1^6 dx_2^6.$$

Составим псевдодифференциальные уравнения для рассматриваемого блочного элемента. Для этого найдем корни характеристического уравнения

$$\mathrm{K}\left(\alpha^\nu\right) \equiv -Q\left(-i\alpha^\nu\right) \equiv \\ \equiv \mathrm{A}_{33}^\nu\left(\alpha_3^\nu\right)^2 + \mathrm{A}_1\alpha_3^\nu + \mathrm{A}_0 - \mathrm{A} = 0,$$

$$\mathrm{A}_1 = \sum_{m,s=1}^{2}\left[\mathrm{A}_{m3}\alpha_m^\nu + \mathrm{A}_{3s}\alpha_s^\nu\right],$$

$$\mathrm{A}_0 = \sum_{m,s=1}^{2}\mathrm{A}_{ms}^\nu\alpha_m^\nu\alpha_s^\nu.$$

Здесь коэффициент A_{33}^ν не зависит от α^ν, а коэффициенты A_0, A_1 зависит только от α_1^ν, α_2^ν. Искомые корни уравнения имеют вид

$$\alpha_{3\pm}^\nu = \frac{-\mathrm{A}_1 \pm \sqrt{\mathrm{A}_1^2 - 4\mathrm{A}_{33}^\nu\left(\mathrm{A}_0 - \mathrm{A}\right)}}{2\mathrm{A}_{33}^\nu}.$$

Обозначаем через α_{3-}^ν корень с отрицательной мнимой частью, т. е. $\operatorname{Im}\alpha_{3-}^\nu < 0$, а через α_{3+}^ν, $\operatorname{Im}\alpha_{3+}^\nu > 0$ — с положительной.

3. Псевдодифференциальные уравнения рассматриваемой краевой задачи, получаемые дифференциальным методом факторизации [3–5], имеют вид

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^3, x_2^3)\Bigg\{\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}\left(\varphi'_{33} - i\alpha_{3-}^3\varphi_3\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^3\eta_1^3 + \alpha_2^3\eta_2^3\right] d\eta_1^3 d\eta_2^3 - \\ - \int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{11}\left(\varphi'_{23} - i\alpha_1^3\varphi_2\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^3\alpha + \alpha_2^3 x_2^2 - \alpha_{3-}^3\left(x_1^2 + b\right)\right] dx_1^2 dx_2^2 - \\ - \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}\left(\varphi'_{63} - i\alpha_2^3\varphi_6\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^3 x_1^6 + \alpha_2^3 c - \alpha_{3-}^3\left(x_2^6 + b\right)\right] dx_1^6 dx_2^6 + \\ + \iint_{\partial\Omega_\nu}\Big[\mathrm{A}_{33}^\nu\left(\varphi'_{\nu 3} - i(c_{k3}^3\alpha_k^3)_-\varphi_\nu\right) - \\ - i(c_{k1}^3\alpha_k^3)_-\mathrm{A}_{13}^\nu\varphi_\nu - i(c_{k3}^3\alpha_k^3)_-\mathrm{A}_{23}^\nu\varphi_\nu\Big] \times \\ \times \mathrm{E}_{3\nu}\left(\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_{3-}^3, x_1^\nu, x_2^\nu, 0\right) dx_1^\nu dx_2^\nu\Bigg\} = 0,$$

$$x_1^3, x_2^3 \in \partial\Omega_3,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^\nu, x_2^\nu)\Bigg\{\iint_{\partial\Omega_\nu}\Big[\mathrm{A}_{33}^\nu\left(\varphi'_{\nu 3} - i\alpha_{3-}^\nu\varphi_\nu\right) - \\ - i\alpha_1^\nu\mathrm{A}_{13}^\nu\varphi_\nu^- i\alpha_2^\nu\mathrm{A}_{23}^\nu\varphi_\nu\Big] \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^\nu\eta_1^\nu + \alpha_2^\nu\eta_2^\nu\right] d\eta_1^\nu d\eta_2^\nu +$$

$$+\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{11}\left(\varphi'_{23}-i(c^2_{3m}\alpha^\nu_m)_-\varphi_2\right)\times$$
$$\times\, \mathrm{E}_{\nu 2}\left(\alpha^\nu_1,\alpha^\nu_2,\alpha^\nu_{3-},x^2_1,x^2_2,0\right)dx^2_1dx^2_2+$$
$$\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}\left(\varphi'_{23}-i(c^3_{3m}\alpha^\nu_m)_-\varphi_3\right)\times$$
$$\times\, \mathrm{E}_{\nu 3}\left(\alpha^\nu_1,\alpha^\nu_2,\alpha^\nu_{3-},x^3_1,x^3_2,0\right)dx^3_1dx^3_2+$$
$$+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}\left(\varphi'_{63}-i(c^6_{3m}\alpha^\nu_m)_-\varphi_6\right)\times$$
$$\left.\times\, \mathrm{E}_{\nu 6}\left(\alpha^\nu_1,\alpha^\nu_2,\alpha^\nu_{3-},x^6_1,x^6_2,0\right)dx^6_1dx^6_2\right\}=0,$$

$$x^\nu_1,x^\nu_2\in\partial\Omega_\nu.$$

Здесь для α^n_{3-}, $n=2,3,6$ приняты обозначения работы [1] и введено обозначение

$$(c^s_{pm}\alpha^n_m)_- = c^s_{p1}\alpha^n_1 + c^s_{p2}\alpha^n_2 + c^s_{p3}\alpha^n_{3-}.$$

Интегральное представление блочного элемента в указанных локальных системах координат дается в форме

$$\varphi_3(x^3_1,x^3_2,x^3_3) = \mathbf{F}^{-1}(x^3_1,x^3_2,x^3_3)\times$$
$$\times\, \mathrm{K}_3^{-1}\left\{\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}\left(\varphi'_{33}-i\alpha^3_3\varphi_3\right)\times\right.$$
$$\times \exp i\left[\alpha^3_1\eta^3_1+\alpha^3_2\eta^3_2\right]d\eta^3_1d\eta^3_2-$$
$$-\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{11}\left(\varphi'_{23}-i\alpha^3_1\varphi_2\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha^3_1\alpha+\alpha^3_2x^2_2-\alpha^3_3\left(x^2_1+b\right)\right]dx^2_1dx^2_2-$$
$$-\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}\left(\varphi'_{63}-i\alpha^3_2\varphi_6\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha^3_1x^6_1+\alpha^3_2c-\alpha^3_3\left(x^6_2+b\right)\right]dx^6_1dx^6_2+$$

$$+\iint_{\partial\Omega_\nu}\left[\mathrm{A}^\nu_{33}\left(\varphi'_{\nu 3}-ic^3_{k3}\alpha^3_k\varphi_\nu\right)-\right.$$
$$\left.-\,ic^3_{k1}\alpha^3_k\mathrm{A}^\nu_{13}\varphi_\nu-ic^3_{k3}\alpha^3_k\mathrm{A}^\nu_{23}\varphi_\nu\right]\times$$
$$\left.\times\, \mathrm{E}_{3\nu}\left(\alpha^3_1,\alpha^3_2,\alpha^3_3,x^\nu_1,x^\nu_2,0\right)dx^\nu_1dx^\nu_2\right\}.$$

$$\varphi_\nu(x^\nu_1,x^\nu_2,x^\nu_3) = \mathbf{F}^{-1}(x^\nu_1,x^\nu_2,x^\nu_3)\times$$
$$\times\, \mathrm{K}_\nu^{-1}\left\{\iint_{\partial\Omega_\nu}\left[\mathrm{A}^\nu_{33}\left(\varphi'_{\nu 3}-i\alpha^\nu_3\varphi_\nu\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\,i\alpha^\nu_1\mathrm{A}^\nu_{13}\varphi_\nu-i\alpha^\nu_2\mathrm{A}^\nu_{23}\varphi_\nu\right]\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha^\nu_1\eta^\nu_1+\alpha^\nu_2\eta^\nu_2\right]d\eta^\nu_1d\eta^\nu_2+$$
$$+\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{11}\left(\varphi'_{23}-ic^2_{3m}\alpha^\nu_m\varphi_2\right)\times$$
$$\times\, \mathrm{E}_{\nu 2}\left(\alpha^\nu_1,\alpha^\nu_2,\alpha^\nu_3,x^2_1,x^2_2,0\right)dx^2_1dx^2_2+$$
$$+\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}\left(\varphi'_{23}-ic^3_{3m}\alpha^\nu_m\varphi_3\right)\times$$
$$\times\, \mathrm{E}_{\nu 3}\left(\alpha^\nu_1,\alpha^\nu_2,\alpha^\nu_3,x^3_1,x^3_2,0\right)dx^3_1dx^3_2+$$
$$+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}\left(\varphi'_{63}-ic^6_{3m}\alpha^\nu_m\varphi_6\right)\times$$
$$\left.\times\, \mathrm{E}_{\nu 6}\left(\alpha^\nu_1,\alpha^\nu_2,\alpha^\nu_3,x^6_1,x^6_2,0\right)dx^6_1dx^6_2\right\}.$$

Замечание. Рассмотренный блочный элемент может быть самостоятельным упругим телом в форме прямоугольной пирамиды, занимающим область Ω. В этом случае решения псевдодифференциальных уравнений и их производные могут иметь особенности в вершинах пирамиды и на ее ребрах [6], как и само решение краевой задачи. Если же блочный элемент возник как результат разбиения на контактирующие блоки некоторой области, занятой однородной средой, то в этом случае указанные особенности взаимно уничтожаются при контакте блоков и не присутствуют в решении. Это обстоятельство позволяет упрощать решение псевдодифференциальных уравнений для блоков указанной природы, используя для этого большой арсенал методов [7–14].

Литература

1. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О проблеме блочных структур академика М. А. Садовского // ДАН. 2009. Т. 427. №4. С. 480–485.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т. 427. №2. С. 183–186.
3. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Дифференциальный метод факториза-

ции в блочных структурах и нано структурах // ДАН. 2007. Т. 415. №5. С. 596–599.

4. *Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А.* О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. 2008. Т. 418. №3. С. 321–323.
5. *Бабешко В. А, Евдокимова О. В, Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Павлова А. В.* Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. 2009. Т. 424. №1. С. 36–39.
6. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Лапина О. Н.* Особенность напряжений в окрестности вершины упругого трехгранника // ДАН СССР. 1991. Т. 318. №5. С. 1113–1116.
7. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* О дифференциальном методе факторизации в задачах для сплошных сред // ДАН. 2008. Т. 421. №1. С. 37–40.
8. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Дифференциальный метод факторизации в статических задачах // ДАН. 2008. Т. 423. №6. 2008, С. 748–752.
9. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. №4. С. 473–477.
10. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
11. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
12. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
13. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Интегральный метод факторизации в смешанных задачах для анизотропных сред // ДАН. 2009. Т. 426. №4. С. 471–475.
14. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.

Ключевые слова: блочный элемент, граничная задача, анизотропные уравнения, прямоугольная пирамида.

Статья поступила 20 сентября 2009 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар