

УДК 539.3

ТОРСИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО ЦИЛИНДРА¹*Белянкова Т. И.², Каламбет В. Б.³, Калинин В. В.⁴***TORSION OSCILLATIONS OF A STRESSED CYLINDER**

Belyankova T. I., Kalambet V. B., Kalinchuk V. V.

Torsion harmonic oscillations of a rigid band on the surface of an elastic thin-walled cylindrical pipe are considered. The pipe is filled with the liquid under large static pressure. The problem is reduced to an integral equation, the kernel of which is constructed numerically. Properties of this integral equation are analyzed, and its solution method is offered. The action of initial stresses on the wave field properties is investigated for the contact zone and for the free surface of the pipe. The results are presented on diagrams.

Keywords: torsion harmonic oscillations, a rigid band, a cylindrical pipe, surface waves, large static stresses, ideal liquid, an integral equation.

Исследуются крутильные гармонические колебания жесткого банджа на поверхности упругой тонкостенной цилиндрической трубы, заполненной находящейся под большим статическим давлением жидкостью. Задача сведена к интегральному уравнению, символ ядра которого строится численным образом. Исследованы свойства интегрального уравнения, предложен метод его решения, изучено влияние начальных напряжений на характеристики волнового поля в зоне контакта и на свободной поверхности трубы. Результаты представлены в виде графиков. Ранее смешанная задача о радиальных колебаниях неоднородного, заполненного идеальной жидкостью цилиндра рассмотрена в [1, 2]. Исследованы его динамические свойства и структура волнового поля на свободной поверхности. В [3,4] рассмотрена динамическая осесимметричная контактная задача для однородного, заполненного идеальной жидкостью цилиндра в отсутствие начальных напряжений. В [5] изучены крутильные колебания банджа на поверхности неоднородного цилиндра. Исследовано распределение

контактных напряжений и структура поверхностного волнового поля. В [6] рассмотрена задача о колебаниях цилиндра без жидкости, находящегося в условиях однородного начального напряженного состояния.

1. Постановка задачи

В рассмотрение вводится система координат r, φ, z . Рассматривается задача о торсионных колебаниях жесткого банджа на поверхности цилиндрической трубы, заполненной находящейся под большим статическим давлением жидкостью. Краевая задача в случае крутильных колебаний преднапряженного цилиндра описывается уравнением движения [5, 7]

$$\frac{\partial \theta_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{\theta_{r\varphi} + \theta_{\varphi r}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta_{\varphi z}}{\partial z} = -\rho \omega^2 u_{\varphi} \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (09-01-00695, 09-08-01065, 09-08-96527-юг), Президиума РАН (направление №12 программы №24П РАН, программы №11П РАН).

²Белянкова Татьяна Ивановна, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: belyankova@mmbi.krinc.ru.

³Каламбет Вячеслав Борисович, лаборант-исследователь Южного научного центра РАН; e-mail: kalin@mmbi.krinc.ru.

⁴Калинчук Валерий Владимирович, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: kalin@mmbi.krinc.ru.

с граничными условиями

$$r = R_0 :$$

$$\theta_{r\varphi} = \begin{cases} q(z)e^{-i\omega t}, & -a \leq z \leq a, \\ 0, & |z| > a, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$r = R_1 : \theta_{r\varphi} = 0, \quad -\infty \leq z \leq \infty, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{r\varphi} &= \mu_r^+ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \mu_r^- \frac{u_\varphi}{r}, \\ \theta_{\varphi r} &= \mu_r^- \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \mu^0 \frac{u_\varphi}{r}, \\ \theta_{z\varphi} &= \mu_z^+ \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad \theta_{\varphi z} = \mu_z^- \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь u_φ — тангенциальная компонента вектора перемещений

$$\begin{aligned} \mu_r^+ &= \mu + \frac{3}{4}\sigma_r^0 - \frac{1}{4}\sigma_\varphi^0, \\ \mu_z^+ &= \mu + \frac{3}{4}\sigma_z^0 - \frac{1}{4}\sigma_\varphi^0, \\ \mu_r^- &= \mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 - \frac{1}{4}\sigma_\varphi^0, \\ \mu_z^- &= \mu - \frac{1}{4}\sigma_z^0 - \frac{1}{4}\sigma_\varphi^0, \\ \mu^0 &= \mu - \frac{1}{4}\sigma_z^0 + \frac{3}{4}\sigma_\varphi^0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

После внесения выражений (1.4) в уравнение (1.1) и применения преобразования Фурье по координате z (α — параметр преобразования, U_φ — трансформанта Фурье функции u_φ) получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{\mu_r^+} \left(\frac{\mu_r^+}{r} + \mu_r^{+'} \right) \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \\ - \frac{1}{\mu_r^+} \left(\frac{\mu^0}{r} + \mu_r^{-'} \right) \frac{U_\varphi}{r} - \frac{\mu_z^+}{\mu_r^+} \sigma^2 U_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь

$$\sigma^2 = \alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu_z^+}.$$

Граничные условия после аналогичной процедуры принимают вид

$$\begin{aligned} r = R_0 : \mu_r^+ \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \mu_r^- \frac{U_\varphi}{r} &= Q_\varphi(\alpha), \\ r = R_1 : \mu_r^+ \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \mu_r^- \frac{U_\varphi}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$Q_\varphi = \int_{-a}^a q(z)e^{i\alpha z} dz.$$

В формулах (1.6) и (1.7) использованы безразмерные параметры: линейные величины отнесены к толщине стенки трубы $h = R_0 - R_1$, напряжения и усилия в упругой среде — к модулю сдвига μ , скорость колебания частиц жидкости — к скорости звука в жидкости C . В качестве частоты используется безразмерный параметр $\kappa_2 = \omega h C_S^{-1}$, где $C_S = \sqrt{\mu\rho^{-1}}$ — скорость сдвиговой волны в стенке трубопровода.

Уравнение (1.6) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, решение которого в аналитическом виде возможно лишь в исключительных случаях. Например, когда упругие модули и плотность материала среды изменяются по одному и тому же тригонометрическому или экспоненциальному закону. В данной работе для решения уравнения (1.6) необходимо привлекать численные методы [1–5, 8–10].

2. Начальное напряженное состояние цилиндра, заполненного находящейся под давлением жидкостью

Для определения начального напряженного состояния будем исходить из того, что цилиндр бесконечен, жидкость оказывает равномерное воздействие на стенки цилиндра, прилипание жидкости к стенкам цилиндра отсутствует.

В работе [5] было показано, что давление жидкости p наводит в стенке цилиндра начальное напряженное состояние, которое определяется формулами ($k = R_1 R_0^{-1}$)

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 &= \eta_r p, \quad \eta_r = \frac{k^2}{1 - k^2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right), \\ \sigma_\varphi^0 &= \eta_\varphi p, \quad \eta_\varphi = \frac{k^2}{1 - k^2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

На рис. 1а и 1б представлены графики функций η_r , η_φ в зависимости от координаты r , рассчитанные для различных значений толщины стенок цилиндра. Кривые 1–7 на рисунках соответствуют толщине стенок от 0,1 (кривые 1) до 0,04 (кривые 7).

Из рисунков следует, что давление жидкости наводит в стенке цилиндра неоднородное напряженное состояние, градиентность

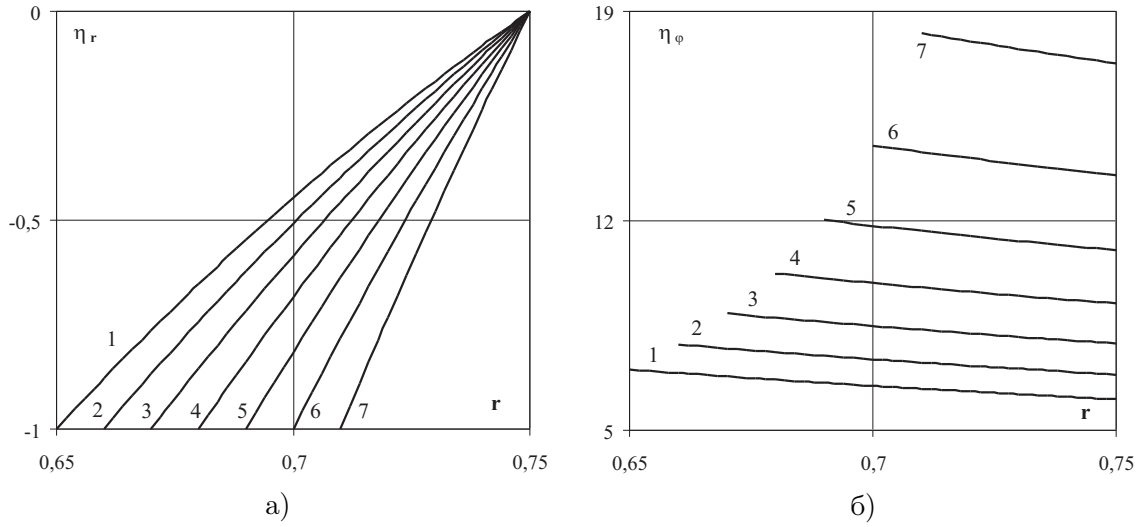


Рис. 1

которого существенно зависит как от толщины стенок, так и от радиуса цилиндра. Нетрудно заметить, что основным фактором, определяющим начальное напряженное состояние в стенке цилиндра, является η_φ , который с одной стороны значительно превосходит η_r , с другой, как было показано в [5], не участвует в представлении радиальных перемещений. Тем самым радиальные колебания не в полной мере могут характеризовать начальное напряженное состояние в стенке цилиндра.

3. Решение краевой задачи о колебаниях однородного, заполненного жидкостью цилиндра

В частном случае, когда давление в жидкости отсутствует, решение краевой задачи о торсионных колебаниях после применения обратного преобразования Фурье представится в виде (u_φ — перемещение, q_φ — напряжение)

$$u_\varphi(r, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a k(z - \xi, r, \omega) q_\varphi(\xi) d\xi, \quad (3.1)$$

$$k(s, r, \omega) = \int_{\Gamma} K(\alpha, r, \omega) e^{-i\alpha s} d\alpha.$$

$K(\alpha, r, \omega)$ определяются формулами

$$K = \Delta_0^{-1} [\Delta_{k1} I_1(\sigma r) + \Delta_{k2} K_1(\sigma r)]. \quad (3.2)$$

Здесь Δ_0 — определитель, Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента l_{ik} матрицы

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11}^0 & l_{12}^0 \\ l_{11}^1 & l_{12}^1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$l_{sk}^n = l_{sk}(R_n), \quad n = 0, 1,$$

$$l_{11}^n(r) = \sigma I_0(R_n) - \frac{2}{R_n} I_1(R_n),$$

$$l_{12}^n(r) = \sigma K_0(R_n) + \frac{2}{R_n} K_1(R_n).$$

Такое исследование необходимо для верификации результатов, которые будут получены в следующем пункте.

4. Решение задачи о колебаниях цилиндра, заполненного жидкостью, находящейся под большим давлением

В случае, когда напряженное состояние является неоднородным, решение краевой задачи о торсионных колебаниях представляется в виде (4.1) [1, 2], но символ ядра строится численно

$$K = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{i=1}^2 \Delta_{i1} y_{1i}. \quad (4.1)$$

Здесь Δ_0 — определитель, Δ_{i1} — алгебраическое дополнение элемента l_{i1} матрицы

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

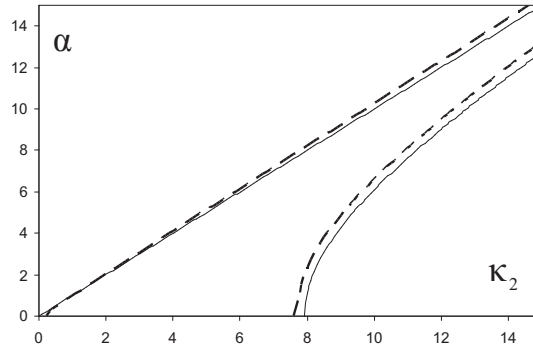


Рис. 2

Элементы l_{mn} определяются формулами

$$\begin{aligned} l_{11} &= \mu_r^+(R_0) y_{12} - \frac{\mu_r^-(R_0) y_{22}}{R_0}, \\ l_{12} &= -\frac{\mu_r^-(R_1)}{R_1}, \\ l_{21} &= \mu_r^+(R_0) y_{11} - \frac{\mu_r^-(R_0) y_{21}}{R_0}, \\ l_{22} &= \mu_r^+(R_1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для построения решения уравнения (1.6), когда упругие константы материала стенок цилиндра представляют собой произвольные функции радиуса, преобразуем его за счет введения новой неизвестной [8]

$$\mathbf{Y} = \uparrow \{U'_\varphi, U_\varphi\} = \uparrow \{Y_1, Y_2\}. \quad (4.4)$$

В новых обозначениях уравнение (1.6) принимает вид

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{M}(\alpha, r) \mathbf{Y} \quad (4.5)$$

с матрицей $\mathbf{M} = \|m_{ij}\|_{i,j=1}^2$, элементами которой являются

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{1}{\mu_r^+} \left(\frac{\mu_r^+}{r} + \mu_r^{+'} \right), \\ m_{12} &= -\frac{1}{\mu_r^+ r} \left(\frac{\mu^0}{r} + \mu_r^{-'} \right) - \frac{\mu_z^+}{\mu_r^+} \sigma^2, \\ m_{21} &= 0, \quad m_{22} = 1, \quad \sigma^2 = \alpha^2 - \frac{\rho \omega^2}{\mu_z^+}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Представим решение системы (4.5) в виде

$$Y_j = \sum_{i=1}^2 c_i(\alpha) y_{ij}(\alpha, r), \quad j = 1, 2, \quad (4.7)$$

где $y_{ij}(\alpha, r)$, $i, j = 1, 2$ — линейно независимые решения задачи Коши для уравнения (4.5) с начальными условиями $y_{ij}(\alpha, R_0) = \delta_{ij}$. Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Неизвестные $c_i(\alpha)$ ($i = 1, 2$), участвующие в представлении (4.7), находятся при удовлетворении граничных условий.

Особенностью рассматриваемого класса задач является наличие у функции K_{11} (4.1) вещественных нулей и полюсов, обуславливающих осцилляцию ядра интегрального уравнения [11].

На рис. 2 приведены дисперсионные кривые для пустого (первые две «упругие» моды — сплошные линии) и заполненного жидкостью цилиндра (штриховые линии), находящейся под большим начальным напряжением.

Как следует из графиков, наличие жидкости изменило дисперсионные свойства цилиндра: кривые мод распространяющихся волн сместились вверх, значение критической частоты возникновения второй моды уменьшилось.

На рис. 3а и 3б приведены кривые η ($\eta = \alpha^0 - \alpha^\sigma$, α^0 , α^σ — значения волновых чисел в отсутствии и при наличии преднапряжений соответственно), иллюстрирующие влияние интенсивности начальных напряжений на первую (рис. 3а) и вторую (рис. 3б) моды поверхностных волн заполненного жидкостью цилиндра. Как следует из графиков, это влияние носит качественно различный характер.

5. Интегральное уравнение задачи о крутильных колебаниях бандажа на поверхности цилиндра

Интегральное представление (3.1) с функцией (3.2) или с функцией (4.1) опи-

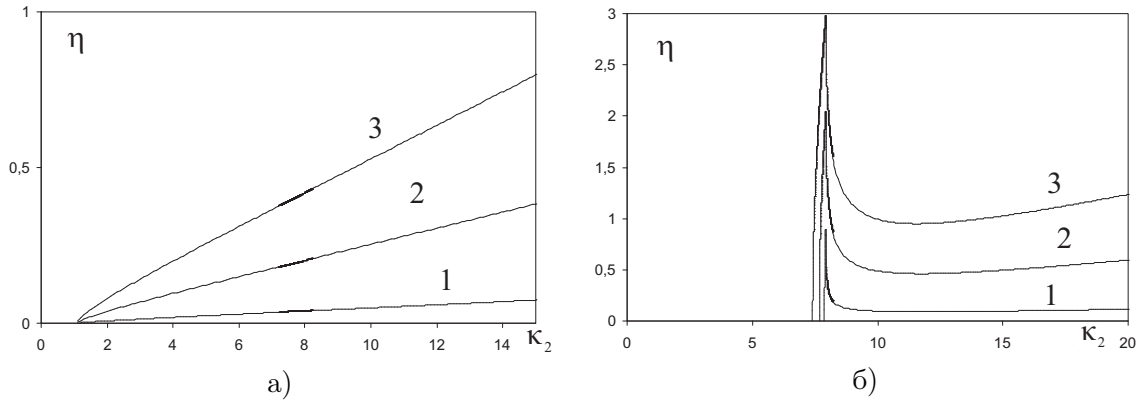


Рис. 3. Влияние интенсивности начальных напряжений на моды поверхностных волн заполненного жидкостью цилиндра (1 — $p = 0,01$, 2 — $p = 0,05$, 3 — $p = 0,1$)

сывает перемещение произвольной точки цилиндра, выполненного соответственно из однородного (в отсутствие начальных напряжений) или неоднородного по толщине (при наличии начальных напряжений) материала. В случае задачи о крутильных колебаниях банджа на поверхности цилиндра, в (3.2) и (4.1) необходимо положить $r = R_0$, перемещение внутренней поверхности банджа (поверхности цилиндра в области контакта) считается известным. Далее будем предполагать, что трение в области контакта отсутствует. Выражение (3.1) в этом случае представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестной функции распределения контактных напряжений под банджом

$$u_\varphi(R_0, z, \kappa_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a k(z - \xi, R_0, \kappa_2) q_\varphi(\xi) d\xi, \quad (5.1)$$

$$k(s, R_0, \kappa_2) = \int_{\Gamma} K(\alpha, R_0, \kappa_2) e^{i\alpha s} d\alpha.$$

В случае однородного материала функция K имеет вид

$$K(\alpha, R_0, \kappa_2) = \Delta_0^{-1} [\Delta_{11} I_1(\sigma R_0) + \Delta_{12} K_1(\sigma R_0)] \quad (5.2)$$

Функции Δ_0 , Δ_{ik} определяются формулами (3.2), (3.3) (не учитывается наличие жидкости) при условии, что $r = R_0$. В случае неоднородной среды функция K строится численно с использованием формул (4.1)–(4.6).

Контур Γ в представлении (5.1) выбирается в соответствии с правилами, указанными в [11]. Он почти всюду совпадает с вещественной осью и отклоняется от нее, обходя положительные полюсы снизу, а отрицательные — сверху.

Анализ распределения полюсов и нулей символа ядра интегрального оператора задачи о крутильных колебаниях банджа на поверхности заполненного жидкостью цилиндра показал, что имеет место строгое чередование нулей и полюсов, чем обеспечивается единственность решения интегрального уравнения [11]. При этом наличие значительного количества нулей и полюсов свидетельствует о сильной осцилляции ядра, что определяет необходимость использования для решения интегрального уравнения (5.1) методов, позволяющих учитывать это обстоятельство [9–11].

6. Решение интегрального уравнения

Трансформанта Фурье решения интегрального уравнения (5.1) представляется формулой [10]

$$Q(\alpha) = T(\alpha) \Pi^{-1}(\alpha) + \sum_{k=1}^{2M} C_k e^{i\alpha z^p}, \quad (6.1)$$

$$\Pi(\alpha) = \prod_{k=1}^M (\alpha^2 - \gamma_k^2) (\alpha^2 - \zeta_k^2)^{-1}, \quad (6.2)$$

где ζ_k ($k = 1, 2, \dots, n_1$) и γ_k ($k = 1, 2, \dots, n_2$) — вещественные полюсы и нули символа $K(\alpha, R_0, \kappa_2)$, остальные ζ_k ($k = n_1 + 1, \dots, M$) и γ_k ($k = n_2 + 1, \dots, M$), $M \geq \max\{n_1, n_2\}$ —

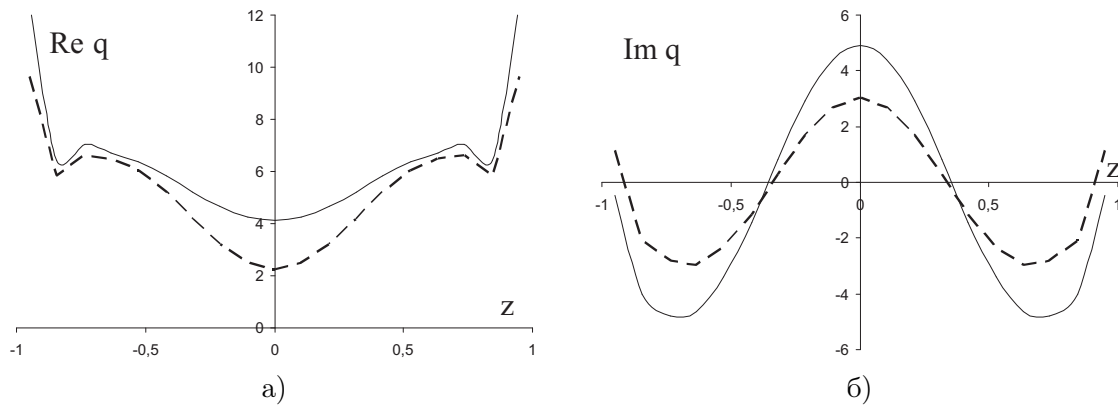


Рис. 4. Распределение контактных напряжений для однородного материала стенки цилиндра в отсутствие (сплошные линии) и наличии жидкости (прерывистые линии). $p = 0,01$ Частота 6,3

комплексные полюсы и нули $K(\alpha, R_0, \kappa_2)$, лежащие в полосе $|\operatorname{Im} \alpha| \leq \varepsilon_0$. Метод построения функции $T(\alpha)$, а также система уравнений для определения коэффициентов C_k , $k = 1, 2, \dots, 2M$ приведены в [10].

7. Влияние начального напряжения цилиндра на напряженное состояние в зоне контакта

Формулы (6.1)–(6.2) позволяют детально исследовать влияние параметров задачи на напряженное состояние в зоне контакта банджа с цилиндром. Роль наличия жидкости внутри цилиндра на процесс формирования поля контактных напряжений иллюстрируют графики на рис. 4 а и 4б (реальная и мнимая составляющие соответственно).

Для иллюстрации выбрано значение частоты 6,3. Из графиков следует, что наличие жидкости внутри цилиндра ощутимо влияет на распределение контактных напряжений. Уменьшилась амплитуда действительной и мнимой составляющей, изменилась фаза контактных напряжений. Материал стал более податливым. На других частотах наблюдаются аналогичные эффекты. Это свидетельствует о необходимости в каждом конкретном случае проводить детальное исследование динамических свойств объекта с учетом значений частоты возможного воздействия и наличия жидкости.

Заключение

Разработан и реализован метод исследования колебаний жесткого банджа на поверхности кругового цилиндра, заполненного

идеальной жидкостью. Изучены закономерности влияния давления жидкости на напряженное состояние в зоне контакта при динамических воздействиях.

Литература

1. Калинин В. В., Белянкова Т. И. Об одном подходе к исследованию динамики преднапряженного цилиндра, заполненного жидкостью // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естест. науки. 2003. Спецвыпуск. С. 227–230.
2. Калинин В. В., Белянкова Т. И., Лыжов В. А. К проблеме моделирования динамических процессов в нефте-газо-трубопроводах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 4. С. 5–13.
3. Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамическая контактная задача для заполненного несжимаемой жидкостью бесконечного цилиндра // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 1. С. 33–38.
4. Белянкова Т. И., Анджилович И. Е., Калинин В. В. О динамической жесткости неоднородного, заполненного идеальной жидкостью цилиндра // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 1. С. 16–23.
5. Белянкова Т. И., Каламбет В. Б., Калинин В. В. Динамическая контактная задача о крутильных колебаниях банджа на поверхности полого цилиндра, выполненного из функционально градиентного материала // Вестник Южного научного центра. Ростов-на-Дону. 2008. С. 9–14.
6. Akbarov S. D., Guz A. N. Axisymmetric longitudinal wave propagation in pre-stressed compound circular cylinders // International Journal of Engineering Science. 2004. Vol. 42. P. 769–791.

7. *Зубов Л. М.* Теория малых деформаций предварительно напряженных тонких оболочек // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 85–95.
8. *Ананьев И. В., Бабешко В. А.* Колебания штампа на слое с переменными по глубине характеристиками // МТТ. 1978. № 1. С. 64–69.
9. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
10. *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных полугораниченных сред. М: Физматлит, 2002. 240 с.
11. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М: Наука, 1979. 320 с.

Ключевые слова: торсионные гармонические колебания, жесткий бандаж, цилиндрическая труба, поверхностные волны, большие статические напряжения, идеальная жидкость, интегральное уравнение.

Статья поступила 8 сентября 2009 г.

Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону

© Белянкова Т. И., Каламбет В. Б., Калинчук В. В., 2009