УДК 539.3

О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В СТЕРЖНЕ[1]

Ватульян А. О.[2], Дударев В. В.[3]

ABOUT RECONSTRUCTION OF HETEROGENEOUS PRE-STRESSED STATE IN A ROD

Vatulyan A. O., Dudarev V. V.

The problem of bending vibrations of a heterogeneous pre-stressed rod is investigated. The direct problem is reduced to the solution of the Fredholm equation of the second kind. An iterative process for solving the inverse problem is developed. Examples of reconstruction of monotone functions of the pre-stressed state distribution are adduced.

Keywords: heterogeneous pre-stressed state, transverse vibrations, a rod, an inverse problem.

Введение

В настоящее время к классу коэффициентных обратных задач теории упругости, в которых требуется определить коэффициенты дифференциальных операторов по информации о граничных полях смещений, относят три типа задач [1]. Один из них — задачи определения структуры существенно неоднородного предварительного напряженного состояния — практически не изучался, однако в последние годы область приложения такого типа задач постоянно расширяется. Предварительно напряженное состояние обычно возникает в результате различных технологических процессов, таких как литье, ковка, сварка, термообработка, а также при жестком соединении материалов с различными физико-химическими свойствами. Отметим, что в ряде искусственных и природных конструкций существуют остаточные напряжения; например, учет этих напряжений играет важную роль в задачах идентификации биологических тканей и органов в рамках моделей линейной теории упругости и вязкоупругости. Анализ уровня предварительных напряжений является основополагающим фактором в задачах оценки прочности сооружений на различных стадиях эксплуатации и имеет приложения в совершенствовании методик неразрушающего контроля в геофизике и горной механике и идентификации сложных композиционных материалов, медицинской диагностике мягких тканей [2–4].

Как известно, к основным методам идентификации структуры и уровня внутренних напряжений относят акустические и интерференционные методы исследования. Исследование влияния однородного предварительного напряженного состояния на амплитудно-частотные характеристики конструкций позволяет оценивать его уровень и дать практические рекомендации. В случае же неоднородного предварительного напряженного состояния, которое наблюдается в окрестности сильных концентраторов типа полостей, трещин или включений, решение такой задачи может быть осуществлено лишь в рамках некоторой коэффициентной обратной задачи теории упругости с использованием современных вычислительных технологий.

Основной проблемой в решении нелинейных коэффициентных обратных задач является процедура построения операторных со-

[1]Работа выполнена при частичной поддержке ЮМИ, г. Владикавказ.

[2]Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

[3]Дударев Владимир Владимирович, аспирант кафедры теории упругости факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета; e-mail: dudarev_vv@mail.ru.

отношений, связывающих искомые и измеряемые функции. Наличие переменных коэффициентов не дает возможности построения в явном виде общих представлений решений для таких операторов. В этом случае решения прямых задач опираются либо на аппарат интегральных уравнений Фредгольма второго рода, либо на конечноэлементные технологии. При этом для построения решений в обратных задачах формулируются итерационные процессы, основанные на обобщении теоремы взаимности [1, 4].

В настоящей работе рассматриваются как прямая задача о поперечных колебаниях предварительно напряженного стержня, так и обратная — о восстановлении закона распределения предварительного напряженного состояния.

1. Общая постановка прямой задачи

В качестве объекта исследования рассмотрим упругое тело объема V, ограниченное поверхностью $S = S_u \cup S_\sigma$, в котором имеется неоднородное предварительное напряженное состояние, характеризующееся компонентами тензора напряжений σ^0_{ij}. Материал, из которого состоит тело, имеет плотность ρ. Будем считать, что колебания с частотой ω вызываются нагрузкой $\mathbf{P}$, приложенной на части S_σ, а часть S_u закреплена. Так как объектом исследования является упругое тело с тензором упругих модулей C_{ijkl}, то возмущения компонент тензора напряжений подчиняются обобщенному закону Гука.

Линеаризованные уравнения колебаний после отделения временного множителя имеют следующий вид [1, 2]:

$$T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \tag{1.1}$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,m}\sigma^0_{mj}, \tag{1.2}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}, \tag{1.3}$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad T_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.4}$$

где T_{ij} — компоненты несимметричного тензора, определяемого согласно (1.2).

Изменение амплитудно-частотных характеристик точек тела V может быть положено в основу процедуры идентификации начальных напряжений. Пусть на части границы S_σ измеряются компоненты поля смещений f_i в зависимости от частоты колебаний. Требуется определить компоненты предварительного напряженного состояния σ^0_{ij}. Сформулированная задача относится к классу нелинейных некорректных задач [5], которые требуют специальной процедуры построения решения, основанной на теории регуляризованных итерационных процессов.

2. Вариационная постановка задачи

Для вывода вариационной постановки задачи о колебаниях предварительно напряженного тела применим к задаче (1.1)–(1.4) методы и приемы вариационного исчисления.

Произведем следующие преобразования над уравнениями и граничными условиями:

– выберем некоторые гладкие функции δu_i таким образом, чтобы они удовлетворяли граничному условию на части поверхности S_u: $\delta u_i|_{S_u} = 0$;

– умножим уравнения движения и граничные условия на выбранные функции δu_i и проинтегрируем соответственно по поверхности S_σ и по объему V;

– вычтем из первого соотношения второе, тогда получим

$$\int_{S_\sigma} T_{ij}n_j\delta u_i dS - \int_{S_\sigma} p_i\delta u_i dS - \\ - \int_V T_{ij,j}\delta u_i dV - \int_V \rho\omega^2 u_i\delta u_i dV = 0. \tag{2.1}$$

Упростим уравнение (2.1), используя формулу Гаусса–Остроградского, приводя подобные и подставляя выражения T_{ij}, σ_{ij} согласно (1.2)–(1.3)

$$\int_V (\mathrm{C}_{ijkl}u_{k,l} + u_{i,m}\sigma^0_{mj})\delta u_{i,j} dV - \\ - \int_{S_\sigma} p_i\delta u_i dS - \int_V \rho\omega^2 u_i\delta u_i dV = 0.$$

Таким образом, получена общая вариационная постановка задачи о колебаниях предварительно напряженного тела в следующей форме:

$$\delta\left(\Pi - \omega^2\mathrm{K} + \Pi_\sigma\right) = 0, \tag{2.2}$$

где введены обозначения функционалов

$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V \mathrm{C}_{ijkl}u_{k,l}u_{i,j}dV - \int\limits_{s_\sigma} p_i u_i dS$ — потенциальная энергия системы;

$\Pi_\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_V \sigma^0_{mj}u_{i,m}u_{i,j}dV$, $\mathrm{K} = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho u_i^2 dV$ — кинетическая энергия системы.

3. Формулировка обратной задачи и построение итерационного процесса

Сформулированная обратная задача по определению структуры предварительного напряженного состояния является нелинейной задачей, при построении решения которой требуется использовать итерационную процедуру, основанную на методе линеаризации. Для того чтобы избежать утомительной процедуры решения задачи первого приближения, можно использовать обобщенное соотношение взаимности, построенное в [1, 4]. Пусть имеется два решения задачи (1.1)–(1.4), отвечающие различным предварительным напряженным состояниям. Основные характеристики задачи снабдим соответственно индексами 1 и 2: $u_i^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(01)}$, $T_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(02)}$, $T_{ij}^{(2)}$. В соответствии с [1] имеем

$$0 = \int\limits_{S_\sigma} p_i(u_i^{(2)} - u_i^{(1)})ds - \int\limits_V (\sigma_{mj}^{(01)}u_{i,m}^{(1)}u_{i,j}^{(2)} - \sigma_{mj}^{(02)}u_{i,m}^{(2)}u_{i,j}^{(1)})dV, \quad (3.1)$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2].$$

Соотношение (3.1) позволяет построить итерационный процесс и сформулировать последовательность линейных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с суммируемыми ядрами, если положить $\sigma_{mj}^{(01)} = t_{mj}^{(n-1)}$, $\sigma_{mj}^{(02)} = t_{mj}^{(n-1)} + t_{mj}^{(n)}$, $u_i^{(1)} = u_i^{(n-1)}$, $u_i^{(2)} = u_i^{(n-1)} + u_i^{(n)}$. Тогда, сохраняя в (3.1) линейные относительно возмущений слагаемые, получим [1]

$$\int\limits_{S_\sigma} p_i(f_i - u_i^{(n-1)})ds + \int\limits_V (t_{mj}^{(n)}u_{i,m}^{(n-1)}u_{i,j}^{(n-1)})dV = 0, \quad (3.2)$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2].$$

С помощью уравнения (3.2) можно организовать итерационный процесс для определения поправок компонент тензора предварительных напряжений $t_{mj}^{(n)}$ по отношению к некоторому начальному состоянию, которое может быть выбрано простейшим образом, например, однородным или линейным. Сразу отметим, что уравнение (3.2) есть интегральное уравнение Фредгольма первого рода, для решения которого необходимо использовать регуляризующие алгоритмы [7]. При этом отметим, что из одного операторного уравнения нельзя определить сразу все компоненты тензора предварительных напряжений, обычно составляется несколько таких соотношений, соответствующих различным видам приложенной нагрузки.

4. Формулировка краевой задачи для предварительно напряженного стержня

Одним из важных примеров поставленной проблемы является задача об установившихся изгибных колебаниях прямолинейного упругого изотропного стержня длины l под действием периодической во времени силы $Pe^{i\omega t}$ с предварительным одноосным напряженным состоянием.

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.4), считая, что из компонент тензора предварительных напряжений отлична от нуля лишь компонента $\sigma_{11}^0 \neq 0$. Оси Ox_2, Ox_3 выберем главными. Введем следующие обозначения в соответствии с гипотезами стержней: $u_1 = -x_3 w'(x_1)$ — компонента вектора смещений вдоль оси x_1, $u_2 = 0$ — компонента вектора смещений вдоль оси x_2, $u_3 = w(x_1)$ — компонента вектора смещений вдоль оси x_3, F – площадь поперечного сечения, $V = [0; l] \times F$ — объем стержня, $J = \int\limits_F x_3^2 dS$ — осевой момент инерции, E — модуль Юнга. Тогда ненулевые компоненты тензора T_{ij} представимы в виде

$$T_{11} = \sigma_{11} + u_{1,1}\sigma_{11}^0, \quad T_{13} = \sigma_{13}, \quad (4.1)$$

$$T_{31} = \sigma_{31} + u_{3,1}\sigma_{11}^0, \quad T_{33} = \sigma_{33}, \quad (4.2)$$

где $\sigma_{11} = Eu_{1,1} = -Ex_3 w''(x_1)$, а функция смещения нейтральной оси стрежня $w(x_1)$ удовлетворяет условию консольного закрепления на левом конце $w'(0) = 0$, $w(0) = 0$.

Подставляя выражения (4.1)–(4.2) в каждое из представлений Π, Π_σ, K и производя интегрирование по площади поперечного сечения, получим следующее вариационное уравнение:

$$\delta\left(\Pi-\omega^2\mathrm{K}+\Pi_\sigma\right)=$$
$$=\int\limits_0^l\Big\{(J(E+\sigma_{11}^0)w'')''-(F\sigma_{11}^0w')'-$$
$$-\rho F\omega^2w+\omega^2(J\rho w')'\Big\}\delta w dx_1+$$
$$+\Big\{(F\sigma_{11}^0w')(l)-(J(E+\sigma_{11}^0)w'')'(l)+P-$$
$$-\omega^2(J\rho w')(l)\Big\}\delta w(l)+$$
$$+(J(E+\sigma_{11}^0)w'')(l)\delta w'(l)=0. \quad (4.3)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим уравнение движения и граничные условия в следующем виде:

$$(J(E+\sigma_{11}^0)w'')''-$$
$$-(F\sigma_{11}^0w')'-\rho F\omega^2w=0, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}&w(0)=0,\\&w'(0)=0,\\&(J(E+\sigma_{11}^0)w'')(l)=0,\\&((J(E+\sigma_{11}^0)w'')'-F\sigma_{11}^0w')(l)=P.\end{aligned} \quad (4.5)$$

При этом осуществлено пренебрежение составляющей $\omega^2J\rho w'$, часто используемое в прикладных теориях.

Полученные уточненные граничные условия соответствуют действию сосредоточенной поперечной силы на конце консольно закрепленного стержня.

Заметим, что в приведенных соотношениях параметры системы J, E, σ_{11}^0, F, ρ могут быть заданы как функции по переменной $x=x_1$. Краевая задача (4.4)–(4.5) есть задача для уравнения 4 порядка с переменными коэффициентами, ее решение получим, используя предварительное сведение к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

5. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

Введем в рассмотрение безразмерные параметры и функции

$$\tau=\frac{\max\sigma_{11}^0}{E_0},\quad \kappa_1^2=\frac{F_0l^2}{J_0}\tau,\quad \kappa_2^4=\frac{\rho_0F_0l^4}{J_0E_0}\omega^2,$$

$$P_0=\frac{Pl^2}{J_0E_0},\quad \varphi(\xi)=\frac{\sigma_{11}^0}{\max\sigma_{11}^0},\quad J=J_0f_1(\xi),$$

$$E=E_0f_2(\xi),\quad F=F_0f_3(\xi),\quad \rho(\xi)=\rho_0f_4(\xi),$$

$$g_1(\xi)=f_1(\xi)f_2(\xi),\quad g_2(\xi)=f_3(\xi)f_4(\xi),$$

где $\xi=\frac{x}{l}\in[0;1]$. При этом отметим, что безразмерный параметр κ_1 характеризует величину максимального значения компоненты предварительного напряжения σ_{11}^0, а κ_2 — частоту колебаний ω.

Решение поставленной задачи в безразмерном виде сведено к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода относительно функции $y(\xi)$ [6]

$$y(\xi)=-\int\limits_0^1K(\xi,s)y(s)ds+f(\xi), \quad (5.1)$$

где

$$f(\xi)=(\xi-1)P_0,$$

$$K(\xi,s)=\frac{1}{a(s)}\int\limits_{\max(\zeta,s)}^1(\kappa_1^2f_3(\eta)\varphi(\eta)+$$
$$+\kappa_2^4(\xi-\eta)(\eta-s)g_2(\eta))d\eta,$$

$$a(s)=g_1(s)\left(1+\tau\frac{\varphi(s)}{f_2(s)}\right).$$

Численная реализация определения функции $w(\xi)$ (прямая задача) при заданном виде функции, характеризующей предварительное напряженное состояние, осуществлена следующим образом на основе метода коллокаций:

1) для аппроксимации интегрального оператора в уравнении (5.1) использована составная квадратурная формула Симпсона с соответствующими коэффициентами B_j и шагом $h=l/(N-1)$, где N — нечетное количество узлов. Значения функции $y(\xi)$ в выбранных узлах $s_i=(i-1)h$ находим из решения следующей линейной алгебраической системы: $y(s_i)+\sum\limits_{j=1}^{N}B_jK(s_i,s_j)\cdot y(s_j)=f(s_i)$, $i=1\ldots N$;

2) вычисление значений искомой функции $w(\xi)$ в тех же узлах s_i, $i=1\ldots N-1$ осуществлено по квадратурной формуле трапеций, а для повышения точности на конце

стержня — по составной квадратурной формуле Симпсона

$$w(s_N) = \sum_{j=1}^{N} B_j(s_N - s_j)\frac{y_j}{a(s_j)}. \qquad (5.2)$$

Тестирование программы, реализующей представленный подход, показало, что при постоянных параметрах системы для частот колебаний, находящихся ниже второго резонанса, относительная погрешность приближенного (5.2) решения и аналитического решения [8] в точке $\xi = 1$ при 41 узлах не превосходит 0,002%.

Отметим, что анализ влияния величины однородного предварительного напряжения на частотные характеристики [6] показал, что это влияние заметно для значений $\tau \geqslant 10^{-4}$; поэтому процедуру реконструкции следует проводить для частот, не превосходящих первую резонансную частоту [6], где это влияние наиболее значительно.

6. Решение обратной задачи для предварительно напряженного стержня

В качестве конкретной реализации сформулированного выше итерационного процесса, необходимого для построения решения обратной задачи, рассмотрим задачу об отыскании предварительного одноосного напряженного состояния ($\sigma_{11}^0 \neq 0$), тогда уравнение (3.2) примет вид

$$\int_0^l t_{11}^{(n)}(J(w^{(n-1)''})^2 + F(w^{(n-1)'})^2)dx - \\ - P(f - w^{(n-1)}) = 0,$$

$$\omega \in [\omega_1; \omega_2].$$

Или, переходя к безразмерным параметрам и вводя обозначение $f_0 = {}^{f}/_{l}$, имеем

$$\int_0^1 \varphi^{(n)}(\xi)\Big(\tau f_2(\xi)(w^{(n-1)''})^2 + \\ + \kappa_1^2 f_3(\xi)(w^{(n-1)'})^2\Big)d\xi - \\ - P_0(f_0 - w^{(n-1)}(1)) = 0, \qquad (6.1)$$

$$\kappa_2 \in \left[\kappa_2^{(1)}; \kappa_2^{(2)}\right].$$

Уравнение (6.1) есть интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с вполне непрерывным оператором, при обращении которого необходимо использовать регуляризующую процедуру [7]. Отметим также, что вопрос о выборе отрезка изменения частоты колебаний является весьма важным как с точки зрения обоснования единственности поставленных обратных задач, так и с точки зрения построения эффективных численных схем. Как правило, этот отрезок необходимо выбирать в нерезонансном диапазоне.

При вычислительной реализации обратной задачи в качестве регуляризующей процедуры использован метод Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации, а частотный диапазон выбран до первой резонансной частоты. Начальное приближение определялось из условия минимума функционала невязки

$$J = \int_{\kappa_2^{(1)}}^{\kappa_2^{(2)}} (w(1,\kappa_2) - f_0(\kappa_2))^2 d\kappa_2$$

в классе линейных функций на некотором компакте, построенном по данным об условиях ограниченности восстанавливаемой функции.

На рис. 1–4 представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению безразмерной функции $\varphi(\xi)$, характеризующей изменение величины σ_{11}^0, для следующих законов $\varphi(\xi) = 1 + \xi^2$, $\varphi(\xi) = 1 + e^{\xi}$, $\varphi(\xi) = -(1 + 0{,}5\xi^2)$, $\varphi(\xi) = -(1 + e^{0{,}5\xi})$. В вычислительном эксперименте рассматривался отрезок измерения амплитудно-частотной характеристики $w(1,\kappa_1)$. В серии расчетов было принято $\kappa_1 = 0{,}2$, $\kappa_2 = [0{,}9; 1{,}8]$, что соответствует частотному диапазону, расположенному до 1-ой резонансной частоты, измерения производились для пяти частот внутри выбранного диапазона. Здесь и далее сплошной линией показан график исходной функции, прерывистой — начального приближения, точками — восстановленной функции.

Заключение

Предложен способ реконструкции неоднородного напряженного состояния в стержне, основанный на анализе изгибных колебаний. Сформулированы операторные уравнения в обратной задаче, приведены результаты вычислительных экспериментов.

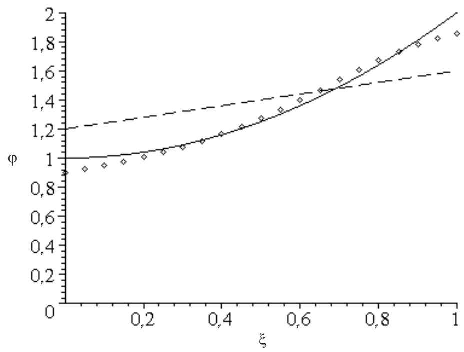

Рис. 1. 7 итераций

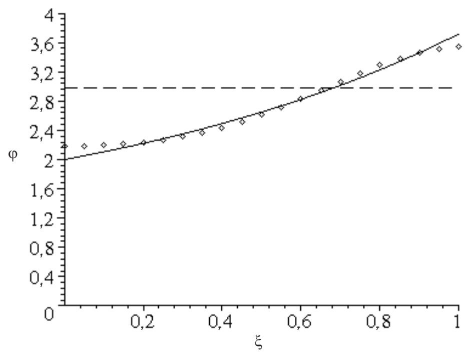

Рис. 2. 15 итераций

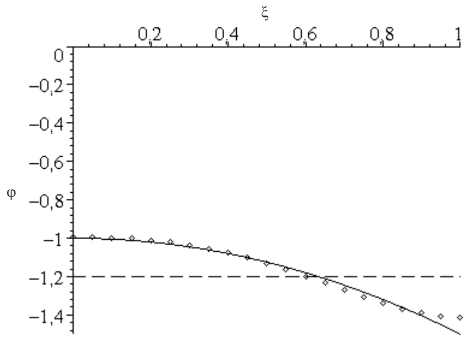

Рис. 3. 4 итерации

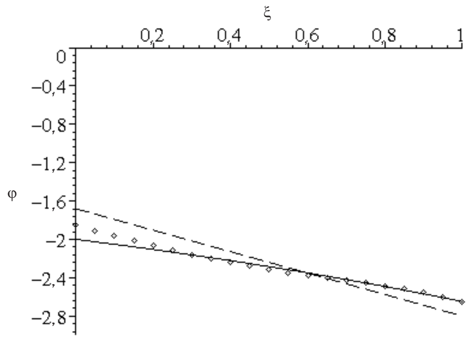

Рис. 4. 11 итераций

Литература

1. *Ватульян А. О.* Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел. // Вестник Самарского госуниверситета. 2007. Вып. 54. №4. С. 93–103.
2. *Гузь А. Н.* Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухслойных остаточных напряжений // Прикладная механика. 1994. Т. 30. №1 С. 3–17.
3. *Чернышев Г. Н., Попов А. Л., Козинцев В. М., Пономарев И. И.* Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. М.: Наука, 1996. 240 с.
4. *Ватульян А. О.* К формулировке интегральных уравнений в проблеме идентификации предварительного напряженного состояния // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №2. С. 23–25.
5. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
6. *Дударев В. В.* Об уточненной модели изгибных колебаний предварительно напряженной балки // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XII Международной конференции. 2008. Т. 2. С. 56–59.
7. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
8. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.

Ключевые слова: неоднородное предварительно напряженное состояние, поперечные колебания, стержень, обратная задача.

Статья поступила 22 июня 2009 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону