

УДК 539.3

**КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ<sup>1</sup>***Ватульян А. О.<sup>2</sup>, Нестеров С. А.<sup>3</sup>*

COEFFICIENT INVERSE THERMO-ELASTICITY PROBLEMS FOR INHOMOGENEOUS BODIES

Vatulyan A. O., Nesterov S. A.

An alternative approach of the reconstruction of transport factors and elasticity modules for inhomogeneous bodies is offered. On the basis of the generalized reciprocity relation in the space of transforms for thermo-elastic inhomogeneous bodies, an iterative process is formulated. Results of numerical experiments for one-dimensional problems are given.

Keywords: an inverse problem, thermo-elasticity, integral equations.

Коэффициентные обратные задачи термомеханики привлекают все большее внимание ученых в связи с внедрением во многие области техники новых неоднородных материалов, таких как функционально-градиентные, и возникшими технологическими проблемами контроля их качества после изготовления. Для расчета компонент физических полей в конструкциях из этих материалов необходимо отказаться от гипотезы однородности среды и использовать усложненную модель, для которой характеристики исследуемого объекта (модули упругости, коэффициенты переноса, плотность) являются функциями координат. Такие функции не могут быть определены из простых макрокспериментов и требуют решения коэффициентных обратных задач термоупругости при динамическом нагружении. Для таких задач по данным о граничных полях смещений и температуры, которые доступны для непосредственного измерения, требуются восстановить функции — коэффициенты дифференциальных операторов уравнений термоупругости. В настоящее время накоплен достаточный опыт решения коэффициентных обратных задач теплопроводности [1, 3, 6–8] и теории упругости [3–5]. При их решении наибольшие трудности возникают при построении нелинейных операторных соотношений, связывающих искомые и из-

меряемые в эксперименте функции. Чтобы обойти эту сложность, в [3–8] предложены подходы, основанные на построении итерационных процессов, исходя либо из обобщения соотношения взаимности [3–8], либо из условия ортогональности [4, 5]. При этом на каждом этапе итерационного процесса необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма первого рода с суммируемым ядром и осуществлять решение прямой задачи с переменными характеристиками, найденными на предыдущем этапе. В основе такого подхода лежат либо конечноэлементные технологии, либо аппарат интегральных уравнений Фредгольма второго рода (для одномерных обратных задач). В настоящей работе для восстановления теплофизических и механических характеристик неоднородных тел построен итерационный процесс, основанный на обобщении уравнения взаимности в пространстве трансформант по Лапласу. Приведены результаты реконструкции коэффициентов переноса неоднородного изотропного термоупругого стержня. При решении прямой задачи использованы метод возмущений и сведение к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода в пространстве трансформант.

Рассмотрим динамическую связанную задачу термоупругости [2] в ограниченной области  $V$  с границей  $S = S_T \cup S_q \cup S_u \cup S_\sigma$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке ЮМИ, г. Владикавказ.

<sup>2</sup>Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

<sup>3</sup>Нестеров Сергей Анатольевич, преподаватель математики и физики Поливянской средней школы № 29; e-mail: 1079l@list.ru.

При этом будем различать два состояния: первое состояние с компонентами тензора модулей упругости  $c_{ijkl}^{(1)}(M)$ , компонентами тензора теплопроводности  $k_{ij}^{(1)}(M)$ , компонентами тензора температурных напряжений  $\gamma_{ij}^{(1)}(M)$ , плотностью  $\rho^{(1)}(M)$ , теплоемкостью  $C^{(1)}(M)$ , приращением температуры  $\theta^{(1)}(M, t) = T^{(1)}(M, t) - T_0$  от естественного состояния с температурой  $T_0$ , компонентами вектора смещений  $u_i^{(1)}(M, t)$  и тензора напряжений  $\sigma_{ij}^{(1)}(M, t)$ , второе — соответственно  $c_{ijkl}^{(2)}(M), k_{ij}^{(2)}(M), \gamma_{ij}^{(2)}(M), \rho^{(2)}(M), C^{(2)}(M), \theta^{(2)}(M, t)$  и  $\sigma_{ij}^{(2)}(M, t)$ . В области  $V$  для каждого состояния выполнены уравнения термоупругости и граничные условия (одинаковые для обоих состояний)

$$\sigma_{ij,j}^{(m)} = \rho^{(m)} \ddot{u}_i^{(m)}, \quad m = 1, 2, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^{(m)} = c_{ijkl}^{(m)} \varepsilon_{kl}^{(m)} - \gamma_{ij}^{(m)} \theta^{(m)}, \quad m = 1, 2, \quad (2)$$

$$(k_{ij}^{(m)}(M) \theta_{,j}^{(m)}(M, t))_{,i} - C^{(m)} \rho^{(m)}(M) \dot{\theta}^{(m)} - T_0 \gamma_{ij}^{(m)} \dot{u}_{i,j}^{(m)} = 0, \quad (3)$$

$$m = 1, 2,$$

$$\theta^{(m)}|_{S_T} = 0, \quad -k_{ij}^{(m)} \theta_{,j}^{(m)} n_i|_{S_q} = q, \quad (4)$$

$$m = 1, 2,$$

$$u_i^{(m)}|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij}^{(m)} n_j|_{S_\sigma} = p_i, \quad (5)$$

$$m = 1, 2.$$

Применим к уравнениям (1)–(3) и граничным условиям (4)–(5) преобразование Лапласа и, полагая тепловые и механические начальные условия нулевыми, запишем для каждого состояния

$$(k_{ij}^{(1)}(M) \tilde{\theta}_{,j}^{(1)}(M, p))_{,i} - p C^{(1)} \rho^{(1)}(M) \tilde{\theta}^{(1)}(M, p) - p T_0 \gamma_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} = 0, \quad (6)$$

$$(k_{ij}^{(2)}(M) \tilde{\theta}_{,j}^{(2)}(M, p))_{,i} - p C^{(2)} \rho^{(2)}(M) \tilde{\theta}^{(2)}(M, p) - p T_0 \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} = 0, \quad (7)$$

$$(c_{ijkl}^{(1)} \tilde{u}_{k,l}^{(1)} - \gamma_{ij}^{(1)} \tilde{\theta}^{(1)})_{,j} = p^2 \rho^{(1)} \tilde{u}_i^{(1)}, \quad (8)$$

$$(c_{ijkl}^{(2)} \tilde{u}_{k,l}^{(2)} - \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{\theta}^{(2)})_{,j} = p^2 \rho^{(2)} \tilde{u}_i^{(2)}. \quad (9)$$

Умножим уравнение (6) на  $\tilde{\theta}^{(2)}(M, p)$ , а (7) — на  $\tilde{\theta}^{(1)}(M, p)$  и вычтем их друг из друга

$$(k_{ij}^{(1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(1)})_{,i} \tilde{\theta}^{(2)} - (k_{ij}^{(2)} \tilde{\theta}_{,j}^{(2)})_{,i} \tilde{\theta}^{(1)} - p(C^{(1)} \rho^{(1)} - C^{(2)} \rho^{(2)}) \tilde{\theta}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)} - p T_0 (\gamma_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)} - \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} \tilde{\theta}^{(1)}) = 0. \quad (10)$$

Аналогично, умножим уравнение (8) на  $\tilde{u}_i^{(2)}(M, p)$ , а (9) — на  $\tilde{u}_i^{(1)}(M, p)$  и вычтем их друг из друга

$$(c_{ijkl}^{(1)} \tilde{u}_{k,l}^{(1)} - \gamma_{ij}^{(1)} \tilde{\theta}^{(1)})_{,j} \tilde{u}_i^{(2)} - (c_{ijkl}^{(2)} \tilde{u}_{k,l}^{(2)} - \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{\theta}^{(2)})_{,j} \tilde{u}_i^{(1)} - p^2 (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) \tilde{u}_i^{(1)} \tilde{u}_i^{(2)} = 0. \quad (11)$$

Далее выполним следующую последовательность действий: преобразуем (10), (11) с использованием формулы дифференцирования произведения, проинтегрируем полученные соотношения по области  $V$  с границей  $S$ , используя формулу Остроградского–Гаусса, а также граничные условия и симметрию тензоров теплопроводности и модулей упругости. Тогда имеем

$$\int_V (k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}) \tilde{\theta}_{,i}^{(1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(2)} dV + p \int_V (C^{(2)} \rho^{(2)} - C^{(1)} \rho^{(1)}) \tilde{\theta}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)} dV - p T_0 \int_V (\gamma_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)} - \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} \tilde{\theta}^{(1)}) dV - \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{\theta}^{(2)} - \tilde{\theta}^{(1)}) dS = 0, \quad (12)$$

$$\int_V (c_{ijkl}^{(2)} - c_{ijkl}^{(1)}) \tilde{u}_{k,l}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} dV + \int_V p^2 (\rho^{(2)} - \rho^{(1)}) \tilde{u}_i^{(1)} \tilde{u}_i^{(2)} dV + \int_V (\gamma_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} \tilde{\theta}^{(1)} - \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)}) dV + \int_V \tilde{p}_i (\tilde{u}_i^{(2)} - \tilde{u}_i^{(1)}) dV = 0. \quad (13)$$

Умножив (13) на  $pT_0$  и сложив с (12), получим соотношение взаимности в пространстве трансформант

$$\begin{aligned}
& pT_0 \int_V (c_{ijkl}^{(2)} - c_{ijkl}^{(1)}) \tilde{u}_{k,l}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} dV + \\
& + T_0 \int_V p^3 (\rho^{(2)} - \rho^{(1)}) \tilde{u}_i^{(1)} \tilde{u}_i^{(2)} dV + \\
& + \int_V (k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}) \tilde{\theta}_{,i}^{(1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(2)} dV + \\
& + p \int_V (C^{(2)} \rho^{(2)} - C^{(1)} \rho^{(1)}) \tilde{\theta}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)} dV - \\
& - pT_0 \int_V (\gamma_{ij}^{(2)} + \gamma_{ij}^{(1)}) (\tilde{u}_{i,j}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)} - \tilde{u}_{i,j}^{(2)} \tilde{\theta}^{(1)}) dV = \\
& = -pT_0 \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (\tilde{u}_i^{(2)} - \tilde{u}_i^{(1)}) dS + \\
& + \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{\theta}^{(2)} - \tilde{\theta}^{(1)}) dS. \quad (14)
\end{aligned}$$

Соотношение (14) можно трактовать как обобщение соотношения взаимности [2] на случай термоупругих тел с различными теплофизическими характеристиками. Оно используется для получения операторных уравнений в обратной задаче. Обратная задача о нахождении коэффициентов дифференциальных операторов уравнений термоупругости может быть решена на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого осуществляется решение линейной задачи. Полагая

$$\tilde{\theta}^{(1)} = \tilde{\theta}^{(n-1)}, \quad \tilde{\theta}^{(2)} = \tilde{\theta}^{(n-1)} + \tilde{\theta}^{(n)},$$

$$\tilde{u}^{(1)} = \tilde{u}^{(n-1)}, \quad \tilde{u}^{(2)} = \tilde{u}^{(n-1)} + \tilde{u}^{(n)},$$

$$k_{ij}^{(1)} = k_{ij}^{(n-1)}, \quad k_{ij}^{(2)} = k_{ij}^{(n-1)} + k_{ij}^{(n)},$$

$$c_{ijkl}^{(1)} = c_{ijkl}^{(n-1)}, \quad c_{ijkl}^{(2)} = c_{ijkl}^{(n-1)} + c_{ijkl}^{(n)},$$

$$\rho^{(1)} = \rho^{(n-1)}, \quad \rho^{(2)} = \rho^{(n-1)} + \rho^{(n)},$$

$$C^{(1)} = C^{(n-1)}, \quad C^{(2)} = C^{(n-1)} + C^{(n)}$$

и сохраняя в соотношении взаимности (14) линейные слагаемые, с учетом дополнительной информации в обратной задаче

$u_i|_{S_\sigma} = f_i(M, t)$ ,  $\theta|_{S_q} = \theta_T(M, t)$ , получим

$$\begin{aligned}
& pT_0 \int_V c_{ijkl}^{(n)} \tilde{u}_{k,l}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} dV + \\
& + T_0 \int_V p^3 \rho^{(n)} \tilde{u}_i^{(n-1)} \tilde{u}_i^{(n-1)} dV + \\
& + \int_V k_{ij}^{(n)} \tilde{\theta}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(n-1)} dV + \\
& + p \int_V C^{(n)} \rho^{(n)} \tilde{\theta}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = \\
& = -pT_0 \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (f_i - \tilde{u}_i^{(n-1)}) dS + \\
& + \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{\theta}_T - \tilde{\theta}^{(n-1)}) dS. \quad (15)
\end{aligned}$$

Соотношение (15) является интегральным уравнением относительно компонент  $k_{ij}^{(n)}(M)$ ,  $C^{(n)}(M)$ ,  $\rho^{(n)}(M)$ ,  $c_{ijkl}^{(n)}(M)$  и позволяет находить приближения коэффициентов, если предварительно решена прямая задача о динамическом поведении тела  $V$  с теплофизическими и упругими характеристиками предыдущего этапа  $k_{ij}^{(n-1)}(M)$ ,  $C^{(n-1)}(M)$ ,  $\rho^{(n-1)}(M)$ ,  $c_{ijkl}^{(n-1)}(M)$ . Итерационный процесс стартует при выбранном, например, методом минимизации функционала невязки, некотором начальном распределении коэффициентов  $k_{ij}^{(0)}(M)$ ,  $C^{(0)}(M)$ ,  $\rho^{(0)}(M)$ ,  $c_{ijkl}^{(0)}(M)$ . Для реконструкции всех тепловых и механических характеристик одного интегрального уравнения вида (15) недостаточно. Дополнительные уравнения обычно получают при изменении вида или области нагружения. Однако в некоторых частных случаях этого уравнения вполне достаточно.

В качестве примера рассмотрим задачу о продольных колебаниях стержня, возбужденных внезапным приложением силы  $p_1 = \sigma_0 H(t)$  и (или) теплового потока  $q = q_0 H(t)$  к одному из его торцов. В этом случае уравнение (15) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
& pT_0 \int_0^l E^{(n)} \left( \frac{d\tilde{u}_{(n-1)}}{dx} \right)^2 dx + \\
& + T_0 p^3 \int_0^l \rho^{(n)} \tilde{u}_{(n-1)}^2 dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^l k^{(n)}(x) \left( \frac{d\tilde{\theta}_{(n-1)}}{dx} \right)^2 dx + \\
 & + p \int_0^l C^{(n)} \rho^{(n)}(x) \tilde{\theta}_{(n-1)}^2 dx = \\
 & = \sigma_0 T_0 (\tilde{u}_T - \tilde{u}_{(n-1)})|_{x=l} + \\
 & + \frac{q_0}{p} (\tilde{\theta}_T - \tilde{\theta}_{(n-1)})|_{x=l}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Входной информацией для решения обратной задачи служат измеренные смещения (приращение температуры) на торце стержня

$$u(l, t) = f(t) \quad (\theta(l, t) = g(t)), \quad (17)$$

которые необходимо знать в любой момент времени. Однако из соотношения (16) нельзя найти поправки для нахождения коэффициента теплового расширения.

Имеем следующие возможные постановки обратных задач для стержня при наличии дополнительной информации (17):

1) по известным  $C(x)$ ,  $\rho(x)$ ,  $k(x)$ ,  $\alpha(x)$  найти  $E(x)$ ;

2) по известным  $C(x)$ ,  $\rho(x)$ ,  $E(x)$ ,  $\alpha(x)$  найти  $k(x)$ ;

3) по известным  $C(x)$ ,  $E(x)$ ,  $k(x)$ ,  $\alpha(x)$  найти  $\rho(x)$ ;

4) по известным  $\rho(x)$ ,  $k(x)$ ,  $E(x)$ ,  $\alpha(x)$  найти  $C(x)$ .

Перейдем в (16) к безразмерным переменным

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{x}{l}; \quad \bar{k}^{(n)}(z) = \frac{k^{(n)}(zl)}{k_0}; \\
 \bar{C}^{(n)}(z) &= \frac{C^{(n)}(zl)}{c_0}; \quad \bar{\rho}^{(n)}(z) = \frac{\rho^{(n)}(zl)}{\rho_0}; \\
 \bar{\alpha}^{(n)}(z) &= \frac{\alpha^{(n)}(zl)}{\alpha_0}; \quad \bar{E}^{(n)}(z) = \frac{E^{(n)}(zl)}{E_0}; \\
 p_0 &= \frac{c_0 \rho_0 l^2 p}{k_0}; \quad \tilde{W}_{(n)}(z, p) = \frac{\tilde{\theta}_{(n)} \alpha_0 k_0}{c_0 \rho_0 l^2}; \\
 \tilde{U}_{(n)}(z, p) &= \frac{\tilde{u}_{(n)} k_0}{l^3 c_0 \rho_0}; \quad \tilde{\Omega}_{(n)}(z, p) = \frac{\tilde{\sigma}_{(n)} k_0}{E_0 c_0 \rho_0 l^2}; \\
 \varepsilon^2 &= \frac{k_0^2}{c_0^2 \rho_0 E_0 l^2}; \quad \delta = \frac{\alpha_0^2 T_0 E_0}{c_0 \rho_0}; \quad \lambda = \frac{\sigma_0}{E_0}; \\
 \varphi &= \frac{\alpha_0 q_0 l}{k_0}; \quad \tau = \sqrt{\frac{E_0 t}{\rho_0 l}}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $k_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $C_0$ ,  $\rho_0$ ,  $E_0$  — некоторые характерные коэффициенты теплопроводности и

теплового расширения, теплоемкость, плотность и модуль Юнга соответственно.

Для безразмерных параметров уравнение (16) примет вид

$$\begin{aligned}
 & \delta p_0 \int_0^1 E^{(n)} \left( \frac{d\tilde{U}_{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + \\
 & + \delta \varepsilon^2 p_0^3 \int_0^1 \bar{\rho}^{(n)} \tilde{U}_{(n-1)}^2 dz + \\
 & + \int_0^1 \bar{k}^{(n)}(z) \left( \frac{d\tilde{W}_{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + \\
 & + p_0 \int_0^1 \bar{C}^{(n)} \bar{\rho}^{(n)}(z) \tilde{W}_{(n-1)}^2 dz = \\
 & = \lambda \delta (\tilde{U}_T - \tilde{U}_{(n-1)})|_{z=1} + \\
 & + \frac{\varphi}{p} (\tilde{\theta}_T - \tilde{\theta}_{(n-1)})|_{z=1}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

В случае, если параметр связанности полей  $\delta$  мал, положив его равным нулю в уравнении (18), получим интегральное уравнение для восстановления коэффициентов переноса из несвязанной задачи теплопроводности, хорошо изученной в [1, 6].

В настоящей работе численно восстанавливались теплофизические коэффициенты при внезапном приложении силы к одному из торцов стержня, при этом для нахождения поправок  $\bar{k}^{(n)}(z)$  и  $\bar{C}^{(n)}(z)$  согласно 2-й и 4-й постановкам необходимо на каждом шаге итерационного процесса решать интегральные уравнения

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \bar{k}^{(n)}(z) \left( \frac{d\tilde{W}_{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz = \\
 & = \lambda \delta (\tilde{U}_T - \tilde{U}_{(n-1)})|_{z=1}, \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & p_0 \int_0^1 \bar{C}^{(n)} \bar{\rho}^{(n)}(z) \tilde{W}_{(n-1)}^2 dz = \\
 & = \lambda \delta (\tilde{U}_T - \tilde{U}_{(n-1)})|_{z=1}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Трансформанты  $\tilde{U}_{(n-1)}$  и  $\tilde{W}_{(n-1)}$  на  $(n-1)$ -ой итерации находятся из решения прямой

задачи в пространстве трансформант

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dz} \left( \bar{k}^{(n-1)}(z) \frac{d\tilde{W}_{(n-1)}}{dz} \right) = \\ = p_0 \bar{C}^{(n-1)}(z) \bar{\rho}^{(n-1)}(z) \tilde{W}_{(n-1)} + \\ + p_0 \delta \bar{\alpha}^{(n-1)}(z) \bar{E}^{(n-1)}(z) \frac{d\tilde{U}_{(n-1)}}{dz}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{(n-1)}(z, p) = \bar{E}^{(n-1)}(z) \frac{d\tilde{U}_{(n-1)}}{dz} - \\ - \bar{\alpha}^{(n-1)}(z) \bar{E}^{(n-1)}(z) \tilde{W}_{(n-1)}(z, p), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}_{(n-1)}}{dz} = p_0^2 \bar{\rho}^{(n-1)}(z) \tilde{U}_{(n-1)}(z, p), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{(n-1)}(0, p) = 0, \quad \tilde{U}_{(n-1)}(0, p) = 0, \\ \frac{d\tilde{W}_{(n-1)}}{dz} \Big|_{z=1} = 0, \quad \tilde{\Omega}_{(n-1)}(1, p) = -\frac{\lambda}{p}. \end{aligned} \quad (24)$$

Прямая задача исследовалась методом малого параметра, в качестве которого был выбран параметр  $\delta$ , характеризующий связанность упругих и тепловых полей. В этом случае решения задачи ищем в виде разложения по малому параметру

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{(n-1)} &= \tilde{U}_{(n-1)}^{(0)} + \delta \tilde{U}_{(n-1)}^{(1)}, \\ \tilde{W}_{(n-1)} &= \tilde{W}_{(n-1)}^{(0)} + \delta \tilde{W}_{(n-1)}^{(1)}, \\ \tilde{\Omega}_{(n-1)} &= \tilde{\Omega}_{(n-1)}^{(0)} + \delta \tilde{\Omega}_{(n-1)}^{(1)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив (25) в уравнения и граничные условия (21)–(24) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\delta$ , получаем следующую цепочку задач:

$$\tilde{W}_{(n-1)}^{(0)} \equiv 0, \quad (26)$$

$$\tilde{\Omega}_{(n-1)}^{(0)}(z, p) = \bar{E}^{(n-1)}(z) \frac{d\tilde{U}_{(n-1)}^{(0)}}{dz}, \quad (27)$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}_{(n-1)}^{(0)}}{dz} = p_0^2 \bar{\rho}^{(n-1)}(z) \tilde{U}_{(n-1)}^{(0)}(z, p), \quad (28)$$

$$\tilde{U}_{(n-1)}^{(0)}(0, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_{(n-1)}^{(0)}(1, p) = -\frac{\lambda}{p}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dz} \left( \bar{k}^{(n-1)}(z) \frac{d\tilde{W}_{(n-1)}^{(1)}}{dz} \right) = \\ = p_0 \bar{C}^{(n-1)}(z) \bar{\rho}^{(n-1)}(z) \tilde{W}_{(n-1)}^{(1)} + \\ + p_0 \delta \bar{\alpha}^{(n-1)}(z) \bar{E}^{(n-1)}(z) \frac{d\tilde{U}_{(n-1)}^{(0)}}{dz}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\tilde{W}_{(n-1)}^{(1)}(0, p) = 0, \quad \frac{d\tilde{W}_{(n-1)}^{(1)}}{dz} \Big|_{z=1} = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{(n-1)}^{(1)}(z, p) = \bar{E}^{(n-1)}(z) \frac{d\tilde{U}_{(n-1)}^{(1)}}{dz} - \\ - \bar{\alpha}^{(n-1)}(z) \bar{E}^{(n-1)}(z) \tilde{W}_{(n-1)}^{(1)}(z, p), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}_{(n-1)}^{(1)}}{dz} = p_0^2 \bar{\rho}^{(n-1)}(z) \tilde{U}_{(n-1)}^{(1)}(z, p), \quad (33)$$

$$\tilde{U}_{(n-1)}^{(1)}(0, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_{(n-1)}^{(1)}(1, p) = 0. \quad (34)$$

Определение поправок из интегральных уравнений (19), (20) является некорректной задачей и требует регуляризации. Применена дискретная реализация метода Тихонова с выбором набора параметров аналогично [6].

После нахождения решения  $\bar{k}^{(n)}(z)$  ( $\bar{C}^{(n)}(z)$ ) строится новое приближение  $\bar{k}^{(n+1)}(z) = \bar{k}^{(n-1)}(z) + \bar{k}^{(n)}(z)$  ( $\bar{C}^{(n+1)}(z) = \bar{C}^{(n-1)}(z) + \bar{C}^{(n)}(z)$ ) и осуществляется итерационная схема. Критерием выхода из итерационного процесса является условие стабилизации функционала невязки

$$\begin{aligned} J_{(n-1)} = \int_c^d \left( \tilde{U}_{(n-1)}(1, p_0) - \right. \\ \left. - \tilde{U}_T(1, p_0) \right)^2 dp_0. \end{aligned} \quad (35)$$

В работе натурный эксперимент заменен вычислительным. Здесь  $[c, d]$  — отрезок изменения параметра  $p_0$ , на котором вычисляется невязка,  $\tilde{U}_T(1, p_0)$  — вычисленная безразмерная трансформанта смещений на торце стержня при точных значениях коэффициентов, а  $\tilde{U}_{(n-1)}(1, p_0)$  — вычисленная безразмерная трансформанта смещений на торце при значениях коэффициентов на  $(n-1)$ -ой итерации; нулевое приближение ищется в классе линейных функций из условия минимизации функционала невязки (35).

При проведении вычислительных экспериментов полагалось, что модуль Юнга, плотность, теплоемкость и коэффициент теплового расширения известны и являются постоянными. В этом случае решение прямой

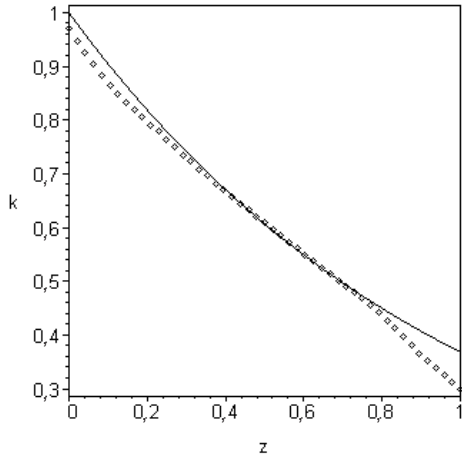


Рис. 1. Пунктирная линия обозначает численное решение, сплошная линия —  $k(z) = \exp(-z)$

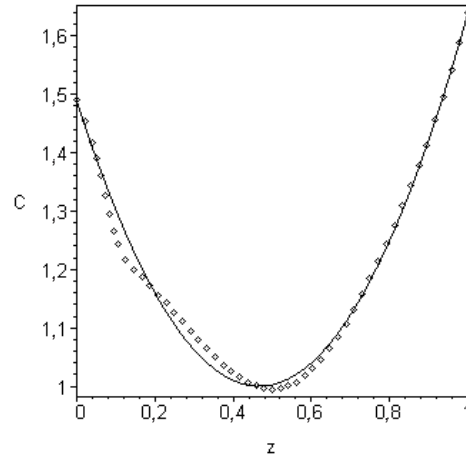


Рис. 2. Пунктирная линия обозначает численное решение, сплошная линия —  $c(z) = 1 + (1,5z - 0,7)^2$

задачи (26)–(34) сводится к последовательному решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве трансформант [9]

$$\tilde{W}_{(n-1)}^{(0)} \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{(n-1)}^{(0)}(z, p) = & -p_0^2 \int_0^1 \tilde{U}_{(n-1)}^{(0)}(\eta, p) \times \\ & \times \int_0^{\min\{z, \eta\}} d\xi d\eta - \frac{\lambda}{p_0} z, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{(n-1)}^{(1)}(z, p) = & -\frac{p_0}{\varepsilon} \int_0^1 \bar{C}^{(n-1)}(\eta) \times \\ & \times \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\xi}{\bar{k}^{(n-1)}(\xi)} d\eta + \\ & + \frac{p_0}{\varepsilon} \left( \int_0^z \tilde{U}_{(n-1)}^{(0)}(\eta, p) d\eta - \right. \\ & \left. - z \tilde{U}_{(n-1)}^{(0)}(1, p) \right), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\tilde{U}_{(n-1)}^{(1)}(z, p) = p_0^2 \int_0^1 \tilde{U}_{(n-1)}^{(1)}(\eta, p) \times$$

$$\times \int_0^{\min\{z, \eta\}} d\xi d\eta + \int_0^z \tilde{W}_{(n-1)}^{(1)}(\eta, p) d\eta. \quad (38)$$

При решении интегральных уравнений (36)–(38) использован метод коллокаций, а интегралы заменены их приближенными значениями по квадратурной формуле трапеций.

В вычислительных экспериментах рассмотрены различные классы гладких функций — степенные, тригонометрические, экспоненциальные. Во всех расчетах принято:  $[c, d] = [0, 1, 0, 2]$ ,  $\lambda = 0,05$ ,  $\delta = 0,001$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Важно обратить внимание на ядра интегральных уравнений (19), (20). Они обращаются в нуль при  $z = 1$  и  $z = 0$  соответственно, поэтому следует ожидать плохого восстановления в окрестности торцов (погрешность реконструкции до 30%). Для улучшения восстановления необходимо задавать значения реконструируемых коэффициентов на торце. Результаты расчетов показали, что при известных торцевых значениях погрешность восстановления значительно снижается. Восстановление коэффициента теплопроводности происходит с большей погрешностью, чем теплоемкости, восстанавливаются только монотонные функции, что связано с особенностью численного построения ядра интегрального уравнения (19). Проведена серия экспериментов по зашумлению входной информации. На рисунках сплошной линией изображен точный закон, точками — восстановленный.

На рис. 1 представлен результат восстановления функции  $\bar{k}(z) = \exp(-z)$  при  $\bar{C}(z) = 1$ . Начальное приближе-

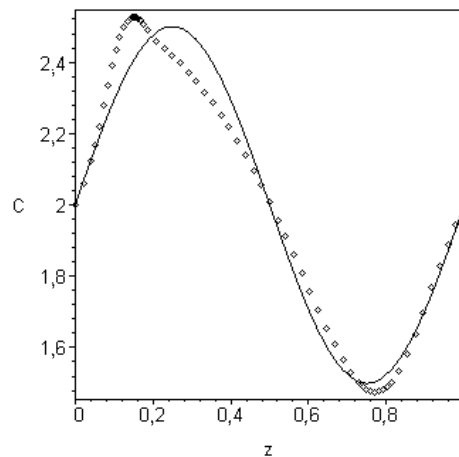


Рис. 3. Пунктирная линия обозначает численное решение, сплошная линия —  $c(z) = 2 + 0,5 \sin(2\pi z)$

ние  $\bar{k}_0(z) = 1 - 0,7z$ . При этом на второй итерации погрешность восстановления не превысила 13%. На рис. 2 приводится пример реконструкции теплоемкости  $\bar{C}(z) = 1 + (1,5z - 0,7)^2$  при  $\bar{k}(z) = 1$  и задаваемых торцевых значениях. Параметр регуляризации  $\alpha = 10^{-12}$ , начальное приближение  $\bar{C}_0(z) = 1 + z$ . Погрешность реконструкции во внутренних точках стержня после четвертой итерации не превысила 5%. На рис. 3 представлен график реконструкции функции  $C(z) = 2 + 0,5 \sin(2\pi z)$  при  $k(z) = 1$  и задаваемых торцевых значениях. Параметр регуляризации  $\alpha = 10^{-12}$ , начальное приближение  $\bar{C}_0(z) = 1 + z$ . Погрешность реконструкции во внутренних точках стержня после шестой итерации не превысила 8%. Проведена серия экспериментов по зашумлению входной информации. В случае 2% шума погрешность реконструкции функции возрастает до 12%, а при 4%-м шуме погрешность восстановления — 16%.

Результаты вычислительных экспериментов показали достаточную эффективность предлагаемого подхода реконструкции монотонных неоднородных теплофизических характеристик.

### Литература

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некор-

ректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.

2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
4. Бочарова О. В., Ватульян А. О. Обратные задачи для упругого неоднородного стержня // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2008. №3. С. 33–37.
5. Бочарова О. В., Ватульян А. О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. 2009. Т. 55. №3. С. 281–288.
6. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном подходе к восстановлению коэффициентов переноса // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2009. №3. С. 39–43.
7. Нестеров С. А. О реконструкции коэффициента теплопроводности неоднородного стержня // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: Тез. докл. Всерос. школы-семинара. Ростов-на-Дону: Терра-Принт. С. 75–76.
8. Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи теплопроводности для неоднородных тел // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XII Междунар. конф. Ростов-на-Дону: ЦВВР. Т. 2. С. 143–146.
9. Нестеров С. А. Об одном методе решения нестационарной задачи теплопроводности для неоднородного стержня // Мат. моделирование и биомеханика в современном университете: Тез. докл. Всерос. школы-семинара. Ростов-на-Дону: Терра-Принт. С. 63–64.

Ключевые слова: обратная задача, термоупругость, интегральные уравнения.