УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

Дроботенко М. И.[1]

NUMERICAL SOLUTION OF THE FILTRATION CONSOLIDATION PROBLEM

Drobotenko M. I.

The article states the results of the numerical solution of model problems of the filtration consolidation for the elastic-viscous porous medium with the rheological Calvin-Foigt relation. To solve the problems numerically, the final-element method was used with exact integration on the basis of linear triangular elements. Thus, the problem was reduced to a problem about the search for a saddle point of a function, which was solved using the Udzawa method.

Keywords: numerical methods, filtration consolidation, porous medium.

Термин «фильтрационная консолидация» (ФК) в широком смысле означает реакцию насыщенной пористой среды на изменение внешних воздействий и охватывает квазистационарные взаимосвязанные процессы деформирования пористой матрицы и фильтрации насыщающей ее жидкости [1]. Математическая модель таких процессов включает в себя уравнения безынерционного движения (квазиравновесия) среды в целом, реологии пористой матрицы, неразрывности процесса, фильтрации, а также граничные и начальные условия [2].

В [3] дана вариационная постановка задачи для вязкоупругой пористой среды типа Кельвина-Фойгта, определено обобщенное решение и доказана его корректность, в [4] построено приближенное решение и доказана его сходимость к обобщенному.

В настоящей работе приводятся результаты численного решения модельных задач фильтрационной консолидации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим консолидацию упруговязкой пористой среды с реологическим соотношением типа Кельвина–Фойгта

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \varphi}{\partial e_{ij}}, \tag{1.1}$$

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

$$e_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t},$$

насыщенной жидкостью, фильтрующейся по закону

$$\mathbf{q} = -f^{-1}(\theta, |\nabla p|)\frac{\nabla p}{|\nabla p|}. \tag{1.2}$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, e_{ij}$ — тензоры эффективных напряжений, деформаций и скоростей деформации в скелете; $\mathbf{q}, p$ — скорость фильтрации и давление жидкости; $\theta = \operatorname{div}\mathbf{u}$; $\mathbf{u}$ — вектор макроперемещений скелета; $F(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon, e)$ — упругий и диссипативный потенциалы.

Будем считать зерна скелета и жидкость несжимаемыми, тогда условие неразрывности процесса можно записать в виде [2]

$$\operatorname{div}\mathbf{q} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \tag{1.3}$$

Уравнение движения запишем в безынерционном виде без учета массовых сил [1, 2]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \tag{1.4}$$

Граничные условия сформулируем для пористого скелета

$$\begin{gathered} \sigma_{ij}n_j - pn_i = \pi_i, \quad x \in \Gamma_\sigma, \\ \mathbf{u} = 0, \quad x \in \Gamma_u, \end{gathered} \tag{1.5}$$

[1]Дроботенко Михаил Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры численного анализа Кубанского государственного университета; e-mail: mdrobotenko@mail.ru.

и для фильтрационного потока

$$\begin{aligned} &p = p_0, \quad x \in \Gamma_p, \\ &\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_q. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \partial\Omega$, $\Gamma_p \cup \Gamma_q = \partial\Omega$ — два произвольных разбиения кусочно-гладкой области Ω, Γ_u непусто.

В качестве начального условия зададим

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.7}$$

Решение задачи фильтрационной консолидации состоит в отыскании функции $\mathbf{u}(x,t)$ по заданным F, φ, f, π, p_0 и $\mathbf{u}_0$.

Определим пространства функций, используемые в дальнейшем.

$$P = W_2^1(\Omega), \quad V = \left(W_2^1(\Omega)\right)^m,$$

$$V_0 = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} = 0 \text{ на } \Gamma_u\},$$

$$W = \left\{\mathbf{q} = (q_i)_{i=1}^m : q_i \in L_2(\Omega), \right.$$
$$\left. \|\mathbf{q}\|_W^2 = \int\limits_\Omega (q_i q_i + (\operatorname{div}\mathbf{q})^2) dx \right\},$$

$$W_0 = \{\mathbf{q} \in W : \mathbf{q}_n = 0 \text{ на } \Gamma_q\},$$

$$M = \{(\mathbf{v},\mathbf{q}) \in V_0 \times W_0 : \operatorname{div}\mathbf{v} + \operatorname{div}\mathbf{q} = 0\}.$$

m — размерность физического пространства.

Дадим определение обобщенного решения задачи (1.1)–(1.7). Для этого введем в рассмотрение функционал

$$J(t,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{q}) = \int\limits_\Omega \Psi dx - \int\limits_{\Gamma_\sigma} \pi_i v_i d\Gamma +$$
$$+ \int\limits_\Omega \int\limits_0^{|q|} f(\theta,\eta) d\eta dx + \int\limits_{\Gamma_p} p_0 q_n d\Gamma.$$

Определим оператор $G(t) : V_0 \to V_0$ для $t \in [0,T]$ следующим образом:

$$G(t)\mathbf{u} = \mathbf{v},$$

если

$$J(t,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{q}) = \inf_{(\boldsymbol{\delta}\mathbf{v},\boldsymbol{\delta}\mathbf{q}) \in M} J(t,\mathbf{u},\boldsymbol{\delta}\mathbf{v},\boldsymbol{\delta}\mathbf{q}).$$

Обобщенным решением назовем функцию $u \in C^1([0,T],\Omega)$, являющуюся решением задачи Коши

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial t} = G(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \tag{1.9}$$

В [3] при некоторых условиях доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Обобщенное решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи.*

2. Построение приближенного решения обобщенной задачи

Пусть V_h, W_h, P_h — конечномерные пространства, аппроксимирующие пространства V_0, W_0 и P соответственно, при этом $V_h \subset V_0$, $W_h \subset W_0$, $P_h \subset P$, $M_h = M \cap (V_h \times W_h)$, $N > 0$ — целое число, $\tau = T/N$, $t^i = i\tau$, $i = \overline{0,N}$.

Приближенным решением обобщенной задачи (1.9) будем называть последовательность $\{\mathbf{u}_h^i\}_{i=0}^N$, $\mathbf{u}_h^i \in V_h$, определенную следующим образом:

$$\mathbf{u}_h^0 \text{ аппроксимирует } \mathbf{u}_0,$$

$$\mathbf{u}_h^{i+1} = \mathbf{u}_h^i + \tau \mathbf{v}_h^i, \ i = \overline{0,N-1}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{v}_h^i \in V_h$ есть решение задачи

$$\inf_{(\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}_h,\boldsymbol{\delta}\mathbf{q}_h) \in M_h} J(t^i,\mathbf{u}_h^i,\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}_h,\boldsymbol{\delta}\mathbf{q}_h). \tag{2.2}$$

Имеет место следующая теорема о сходимости приближенного решения [4].

Теорема 2. *Приближенное решение, определенное условиями (2.1), сходится к обобщенному решению задачи ФК.*

3. Результаты решения модельных задач

Для численного решения задачи (2.1) применялся метод конечных элементов с точным интегрированием на основе линейных треугольных элементов. При этом задача (2.2) сводилась к задаче о поиске седловой точки некоторого функционала, которая решалась методом Удзавы [4, 5]. Возникающая при этом вспомогательная задача минимизации решалась с помощью градиентного метода.

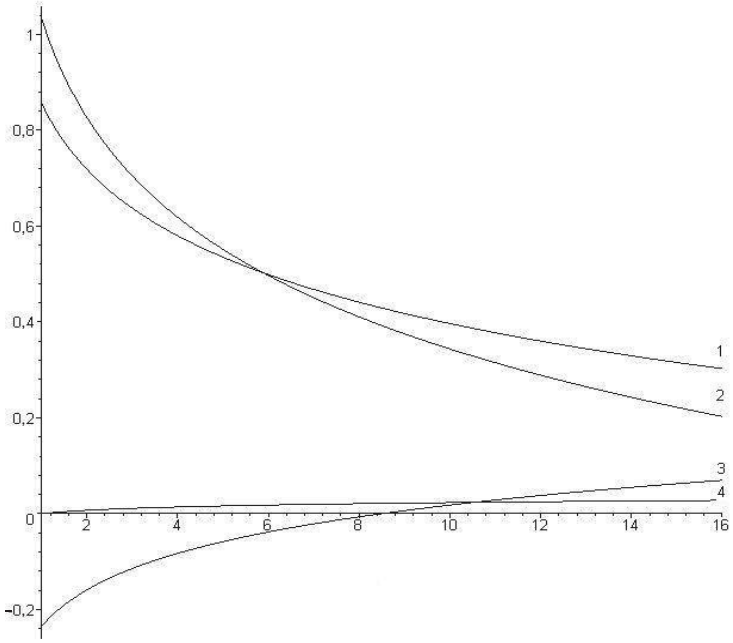

Рис. 1. Графики расхода жидкости

Задача. Область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, участки границы Γ_σ, Γ_u, Γ_q, Γ_p, значение функций φ, F, f, π, p_0 и $\mathbf{u}_0$ задаются следующим образом:

$$\Omega = \{(x, y) : \ 0 < x < 1; \ -h < y < 0\}.$$

Введем обозначения

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : \ y = 0; \ 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : \ x = 1; \ 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) : \ x = 0; \ 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

$$\Gamma_4 = \{(x, y) : \ y = -h; \ 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

$$\Gamma_\pi = \{(x, y) \in \Gamma_1 : \ \pi(x) \neq 0\}.$$

Тогда

$$\Gamma_\sigma = \Gamma_1, \quad \Gamma_u = \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

$$\Gamma_q = \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_\pi, \quad \Gamma_p = \Gamma_1 \setminus \Gamma_\pi.$$

Функция π принимает значение

$$\pi = 0 \text{ при } (x, y) \in \Gamma_1, \ x \leqslant 1/5, \ x \geqslant 4/5,$$

$$\pi = -10 \text{ при } (x, y) \in \Gamma_1, \ 1/5 < x < 4/5.$$

$$p_0 = 0, \quad \varphi(\varepsilon, e) = e_{ij} e_{ij},$$

$$F(\varepsilon) = 10 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad f(\theta, \eta) = \eta, \quad \mathbf{u}_0 = 0.$$

Значение параметра $\rho = \rho_k$ в методе Удзавы выбиралось из численного эксперимента. Нужная точность алгоритма Удзавы считалась достигнутой, если выполнялось условие

$$\|\operatorname{div} \mathbf{v}^k + \operatorname{div} \mathbf{q}^k\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta.$$

Расчеты проводились для различных N. Удовлетворительные результаты были получены уже при $N = 50$. Вычислялись значения расхода жидкости Q_y через поверхность $y = \text{const}$

$$Q_y = \int_0^1 q_2(x, y) dx.$$

На рис. 1 представлены графики расхода жидкости через поверхность $y = 0$ и $y = -0{,}2$ на временном промежутке $[0, 1]$ при $\tau = 1/15$. Здесь кривые 1 и 3 получены для $h = 1$, кривые 2 и 4 — для $h = 0{,}5$.

Полученные отрицательные значения расхода через поверхность $y = -0{,}2$ при $h = 1$ означают, что в части области Ω может происходить увеличение порового пространства.

Литература

1. *Николаевский В. Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
2. *Егоров А. Г., Костерин А. В., Скворцов Э. В.* Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. Казань: Изд-во КГУ, 1990. 104 с.
3. *Дроботенко М. И., Костерин А. В.* Обобщенное решение задачи фильтрационной консолидации // ДАН. Т.350. № 5. 1996. С. 619–621.
4. *Дроботенко М. И., Ляшко А. Д.* Приближенное решение задачи фильтрационной консолидации // Изв. вузов. Сер. Математика. № 3. 1992. С. 3–6.
5. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.

Ключевые слова: численные методы, фильтрационная консолидация, пористая среда.

Статья поступила 16 сентября 2009 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Дроботенко М. И., 2009