УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА С ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ[1]

Колосова Е. М.[2], Чебаков М. И.[3]

MODELING OF CONTACT INTERACTION OF AN ELASTIC CYLINDER WITH INNER SURFACE OF A PIECEWISE-INHOMOGENEOUS ELASTIC CYLINDRICAL LAYER

Kolosova E. M., Chebakov M. I.

The contact problem about interaction of an elastic cylinder with the inner surface of piecewise-inhomogeneous elastic cylindrical layer is considered. This problem can serve as a mathematical model of the cylindrical self-lubricating sliding bearing with the so-called protective inserts (binary bearings). Modeling of contact interaction in the two-dimensional and three-dimensional statements, calculation of contact and effective stresses, and size of the contact zone are carried out for various values of geometrical and mechanical parameters of the problem using finite-element complex ANSYS, for which appropriate programs are developed by the command language APDL ANSYS.

Keywords: a finite-element method, contact interaction, mathematical modeling, elasticity theory.

Рассматривается контактная задача о взаимодействии упругого цилиндра с внутренней поверхностью кусочно-неоднородного упругого цилиндрического слоя. Такая задача может служить математической моделью цилиндрического самосмазывающегося подшипника скольжения с так называемыми протекторными вставками (бинарные подшипники) [1].

С помощью конечно-элементного комплекса ANSYS, для которого разработаны соответствующие программы на командном языке APDL ANSYS, осуществлено моделирование контактного взаимодействия в двухмерной и трехмерной постановках, проведен расчет контактных и эффективных напряжений, величины зоны контакта при различных значениях геометрических и механических параметрах задачи.

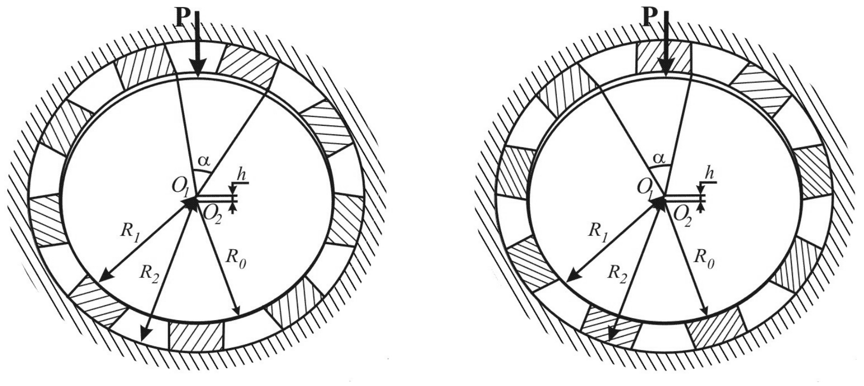
1. Плоская контактная задача

В полярной системе координат (r, φ) рассмотрим упругий кусочно-неоднородный цилиндрический слой $(R_1 \leqslant r \leqslant R_2)$ бесконечной длины с периодически изменяющими механическими свойствами по координате φ с периодом $\alpha = 2\pi/N$ (рис. 1). Границами раздела областей с одинаковыми механическими свойствами являются отрезки прямых, попарно параллельных между собой. В дальнейшем будем называть вставками области, где прямолинейные границы параллельны, а криволинейные представляют собой соответственно два семейства дуг $\Gamma_{mn} = \{r = R_m, \varphi_n^s - \varphi_m \leqslant \varphi \leqslant \varphi_n^s + \varphi_m\}$, где $\varphi_1 = \alpha/\eta$ $(\eta > 2)$, $\varphi_2 = \arcsin(R_1 \sin\varphi_1/R_2)$, m — номер семейства $(m = 1, 2)$, n — номер вставки $(n = 1, 2, \ldots, N)$, s — вид разбиения $(s = 1, 2)$, $\varphi_n^1 = \alpha(n-1)$ для первого вида разбиения (рис. 1а) и $\varphi_n^2 = \varphi_n^1 - \alpha/2$ — для

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (08-08-00873, 09-08-01195)

[2]Колосова Елена Михайловна, кандидат физико-математических наук, НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И. Южного федерального университета, научный сотрудник; e-mail: a_lena_ch@mail.ru.

[3]Чебаков Михаил Иванович, доктор физико-математических наук, НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И. Южного федерального университета, зав. отделом, профессор кафедры теории упругости; e-mail: chebakov@math.rsu.ru.



а) б)

Рис. 1. Схема задачи в двух случаях расположения вставок

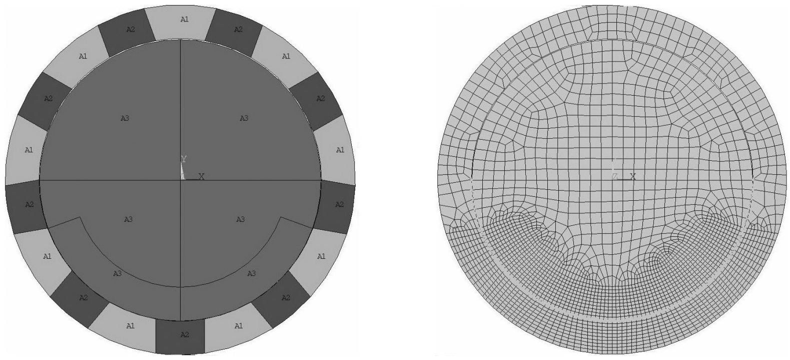


Рис. 2. Двумерные твердотельная и конечно-элементная модели задачи

второго вида (рис. 1б). Считаем, что $\varphi = 0$ определяет направление оси r вертикально вниз.

Вставки и промежуточные области жестко соединены между собой, граница $r = R_2$ неподвижна, а в границу $r = R_1$ вдавливается упругий круговой цилиндр бесконечной длины радиуса $R_0 = R_1 - h$ с центром в точке O_2, смещенный относительно центра цилиндрического слоя O_1 вниз на величину $h \geqslant 0$. Распределенная вдоль образующей цилиндра нагрузка интенсивности P приложена на образующей цилиндра с координатами $(R_0 - h, \pi)$, которая смещает его вертикально вниз. Предполагается, что трение между упругим цилиндром и кусочно-неоднородным слоем отсутствует. Схема задачи для двух видов расположения девяти вставок при $\eta = 4$ представлена на рис. 1 (вставки заштрихованы).

В качестве инструментария при конечно-элементном моделировании использовался пакет ANSYS и его командный язык программирования APDL. Построение двумерной твердотельной модели (геометрической модели с физическими свойствами) осуществлялось по технологии моделирования «снизу-вверх» с использованием следующей последовательности действий: задание опорных точек в полярных системах координат; построение дуг и прямых линий, соединяющих опорные точки; определение областей по опорным точкам; связывание с различными областями заданных физико-механических свойств материалов. Обозначим коэффициент Пуассона и модуль Юнга основного материала цилиндрического слоя соответственно ν и E; вставок — ν_v, E_v и цилиндра — ν_s, E_s.

Используя полученную твердотельную модель, осуществлялось автоматическое построение конечно-элементной модели. При этом плоские конечные элементы наследовали физико-механические свойства соответствующих геометрических областей. В областях, занимаемых упругими материалами цилиндра и кусочно-неоднородного цилиндрического слоя, использовались плоские восьмиузловые структурные конечные элементы PLANE82 с опцией плоского деформирования. На границе предполагаемого

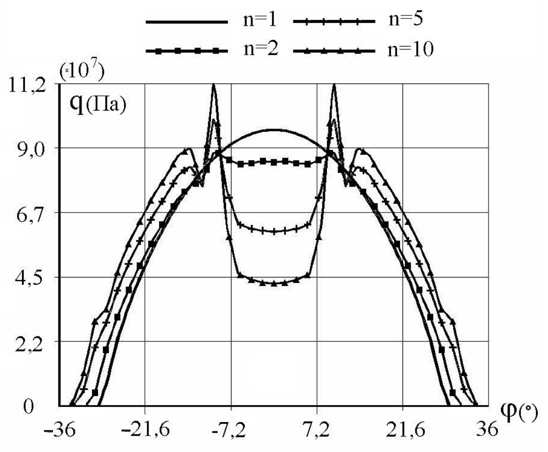


Рис. 3. Графики контактных напряжений при различных материальных постоянных вставок в первом случае их расположения

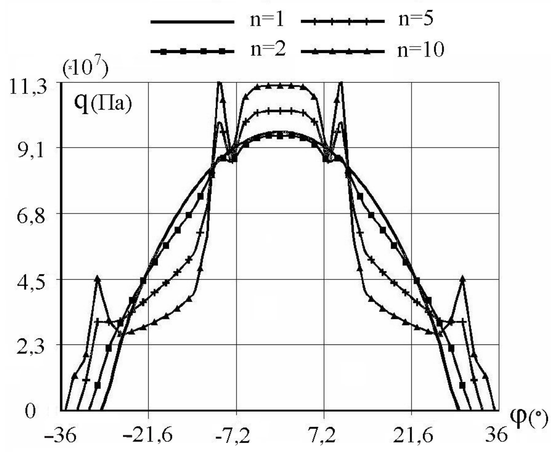


Рис. 4. Графики контактных напряжений при различных материальных постоянных вставок во втором случае их расположения

контакта кусочно-неоднородного цилиндрического слоя автоматически формировались контактные конечные элементы CONTA175, а на границе предполагаемого контакта упругого цилиндра — контактные элементы TARGE169 [2]. Для повышения точности результатов в соответствие с методологией решения контактных задач по методу конечных элементов строились канонические разбиения в предполагаемой зоне контакта слоя и цилиндра. На цилиндре выделялись два сектора искусственного слоя толщины h_k с каноническим разбиением, характеризуемым параметрами $n_{t\varphi}$ — количество элементов по угловой координате, n_{tr} — по радиальной координате. Создавались канонические разбиения нескольких сегментов для кусочно-неоднородного слоя со вставками с параметрами $n_{b\varphi}$ — количество элементов по угловой координате в каждом сегменте и n_{br} — по радиальной координате. Оставшиеся области кусочно-неоднородного цилиндрического слоя и упругого цилиндра разбивались свободным образом четырехугольными конечными элементами. Твердотельная и конечно-элементная модели задачи в первом случае расположения вставок изображены на рис. 2.

На рис. 3 приведены результаты конечно-элементных расчетов контактных напряжений $q(\varphi) = -\sigma_{rr}(R_1, \varphi)$ при различных значениях упругих констант вставок в первом случае их расположения в зависимости от угловой координаты φ. При расчетах распределенная нагрузка $P = 1,7$ МН/м, радиусы $R_1 = 0,025$ м, $R_2 = 0,031$ м, $R_0 = 0,02491$ м. Коэффициенты Пуассона и модули Юнга основного материала цилиндрического слоя и упругого цилиндра полагались равными соответственно $\nu = 0,3$ и $E = 10^5$ МПа, $\nu_s = 0,3$ и $E_s = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Упругие постоянные вставок варьировались таким образом, чтобы коэффициент Пуассона ν_v оставался без изменения и равнялся $0,4$, а модуль Юнга $E_v = E/n$, где $n = 1, 2, 5, 10$ ($n = 1$ соответствует однородному цилиндрическому слою). На рис. 4 приведены аналогичные результаты для второго случая расположения вставок.

Из построенных зависимостей видно, что локальная концентрация напряжений $q(\varphi)$ наблюдается на границах смены материала, лежащих в зоне контакта, при этом концентрация напряжений увеличивается с уменьшением модуля Юнга вставок, а величина зоны контакта $|\varphi| \leqslant \vartheta$ для кусочно-неоднородного цилиндрического слоя больше, чем для однородного и растёт с уменьшением модуля Юнга вставок.

2. Трехмерная контактная задача

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) рассмотрим кусочно-неоднородный цилиндрический слой конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $-l/2 \leqslant z \leqslant l/2$) с $2N$ цилиндрическими вставками из другого материала, оси которых проходят через ось цилиндрического слоя перпендикулярно ей (рис. 5).

Вставки радиуса R_3 при условиях $R_3 < l/4$ и $R_3 < R_1 \sin(\alpha/2)$ располагают-

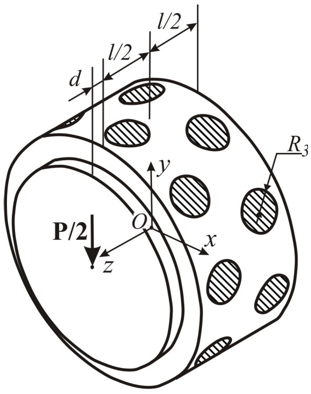


Рис. 5. Схема задачи в трехмерной постановке

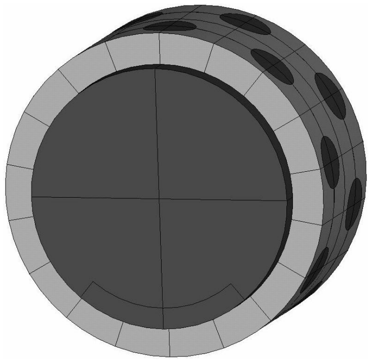


Рис. 6. Трехмерная твердотельная модель

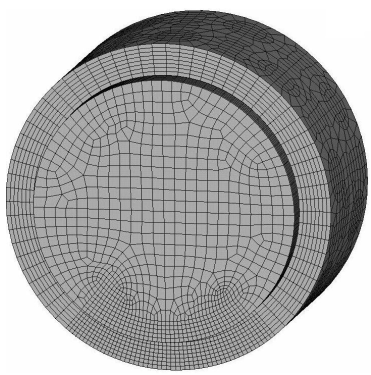


Рис. 7. Трехмерная конечно-элементная модель

ся в слое в два ряда по N вставок в каждом, при этом их оси являются соответственно отрезками прямых ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $z = -l/4$, $\varphi = 2\pi(n-1)/N$) и ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $z = l/4$, $\varphi = 2\pi(n-1)/N - \alpha/2$), где $n = 1, 2, \ldots, N$ — номер вставки в каждом ряду. На рис. 5 приведена схема задачи в трехмерной исходной постановке, а рис. 1 для этой задачи можно рассматривать как радиальные сечения, содержащие оси вставок первого ($z = -l/4$) и второго рядов ($z = l/4$), в случае наличия девяти вставок в каждом ряду. Кусочно-неоднородный цилиндрический слой можно поворачивать относительно исходного положения на произвольный угол γ. Поверхность $r = R_2$ неподвижна, а в поверхность $r = R_1$ вдавливается усилием P упругий цилиндр радиуса $R_0 = R_1 - h$, расположенный вдоль оси z в области $(-d-l \leqslant z \leqslant d+l)$ с центром O_2, который смещен относительно центра цилиндрического слоя O_1 вниз на величину $h \geqslant 0$. Таким образом, упругий цилиндр длиннее кусочно-неоднородного слоя вдоль осевой координаты на величину $2d$. Предполагается, что трение между упругим цилиндром и кусочно-неоднородным цилиндрическим слоем отсутствует.

Построение трехмерной геометрической модели осуществлялось по технологии моделирования «снизу-вверх» с использованием следующей последовательности действий: задание опорных точек в полярных системах координат; построение окружности, сегмента, дуг и прямых линий, соединяющих опорные точки; определение областей по точкам и линиям; создание объемных тел «протягиванием» поверхностей вдоль линий. При создании объемов также использовались готовые объемные примитивы и операции с объемами, такие как копирование, перемещение, пересечение и удаление лишних объемов. Построенные геометрические объемы «резались» рабочими плоскостями с целью получения более «простых» объемов. Трехмерная твердотельная модель, полученная связыванием с различными геометрическими объемами заданных физико-механических свойств материалов, изображена на рис. 6, на котором разными оттенками обозначены области с различными упругими постоянными.

Используя полученную трехмерную твердотельную модель, средствами пакета ANSYS строилось конечно-элементное разбиение упругих двадцати узловых квадратичных конечных элементов SOLID95. Конечно-элементная сетка строилась методом «протягивания», позволяющим получить для «простых» объемов регулярное разбиение. С целью повышения точности результатов и уменьшения вычислительного времени в предполагаемой зоне контакта кусочно-неоднородного цилиндрического слоя и цилиндра строилось более мелкое, чем вне этой зоны, регулярное конечно-элементное разбиение, для чего на цилиндре выделялись четыре сектора искусственного слоя толщины h_k, а в кусочно-неоднородном слое создавалось регулярное разбиение нескольких «простых» объемов, попадающих в предполагаемую зону контакта. Один из вариантов получаемого в итоге разбиения показан на рис. 7.

Для моделирования контактного взаимодействия упругого цилиндра и кусочно-неоднородного слоя границы контактирующих поверхностей покрываются на внутренней поверхности слоя контактными па-

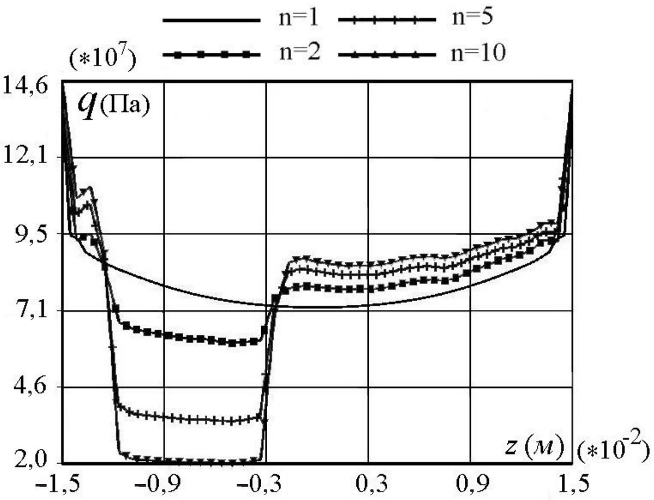


Рис. 8. Графики контактных напряжений $q(z)$ в зоне контакта на цилиндрическом слое при различных упругих постоянных вставок

рами элементов CONTA174 и на внешней поверхности цилиндра — элементами TARGE170 [1].

На торцах цилиндра, в плоскостях $z = l + d$ и $z = -l - d$, заданы условия связанности узлов с одной степенью свободы, допускающие перемещение цилиндра строго вертикально вниз. На каждом торце прикладывается сосредоточенная сила равная $P/2$.

На рис. 8 приведены результаты конечно-элементных расчетов контактных напряжений $q(z) = -\sigma_{rr}(R_1, 0, z)$ при различных упругих постоянных вставок в зависимости от координаты z, отсчитываемой по прямой от точки с координатами $(R_1, 0, -l/2)$ до точки с координатами $(R_1, 0, l/2)$. При расчетах приложенная сила $P = 30$ кН, угол $\gamma = 0°$, радиусы $R_1 = 0,025$ м, $R_2 = 0,031$ м, $R_0 = 0,02491$ м, радиус вставки $R_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ м, длина слоя $l = 0,03$ м и выступ цилиндра $d = 3,75 \cdot 10^{-3}$ м. Коэффициенты Пуассона и модули Юнга основного материала слоя и цилиндра полагались равными соответственно $\nu = 0,3$ и $E = 10^5$ МПа, $\nu_s = 0,3$ и $E_s = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Упругие постоянные вставок варьировались таким образом, чтобы коэффициент Пуассона ν_v оставался без изменения и равнялся 0,4, а модуль Юнга $E_v = E/n$, где $n = 1, 2, 5, 10$ ($n = 1$ соответствует однородному цилиндрическому слою). Из построенных зависимостей видно, что на поверхности вставки (при $-l/4 - R_3 \leqslant z \leqslant -l/4 + R_3$) значения напряжений $q(z)$ с уменьшением модуля Юнга E_v вставки уменьшаются, а непосредственно на слое без вставки $q(z)$ увеличиваются.

В частном случае, когда слой однородный и величина зоны контакта соизмерима с толщиной слоя, результаты конечно-элементных расчетов контактных напряжений для двумерной и трехмерной моделей незначительно отличаются от аналогичных результатов, полученных на основе формул теории Герца [3].

На рис. 9–12 приведены картинки распределения контактных напряжений σ_r и эффективных напряжений σ_e в зоне контакта на внутренней поверхности цилиндрического слоя. При расчетах радиусы цилиндрического слоя R_1, R_2 и цилиндра R_0 полагались равными $R_1 = 0,025$ м, $R_2 = 0,031$ м, $R_0 = 0,02491$ м, радиус вставки $R_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ м, длина слоя $l = 0,03$ м и выступ цилиндра $d = 3,75 \cdot 10^{-3}$ м. Коэффициенты Пуассона и модули Юнга основного материала цилиндрического слоя, цилиндра и вставок полагались равными соответственно $\nu = 0,3$ и $E = 10^5$ МПа, $\nu_s = 0,3$ и $E_s = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_v = 0,4$ и $E_v = 0,1 \cdot 10^5$ МПа, приложенная сила $P = 30$ кН (рис. 9–10); $P = 60$ кН (рис. 11–12) и угол поворота слоя $\gamma = 10°$ (рис. 9–10); $\gamma = 0°$ (рис. 11–12).

Здесь так же, как и в плоском случае, расчеты показали, что максимальные контактные и эффективные напряжения возникают в зоне контакта на границах вставок и основного материала цилиндрического слоя. При этом концентрация напряжений тем больше, чем меньше модуль Юнга материала вставок.

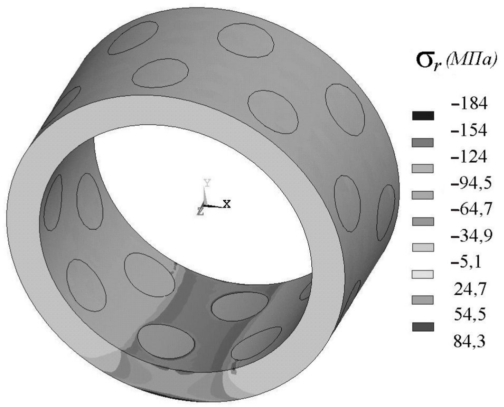


Рис. 9. Распределения контактных напряжений σ_r в слое ($P = 30$ кН)

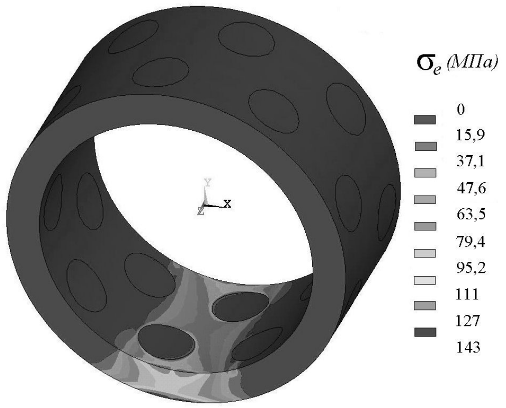


Рис. 10. Распределения эффективных напряжений σ_e в слое ($P = 30$ кН)

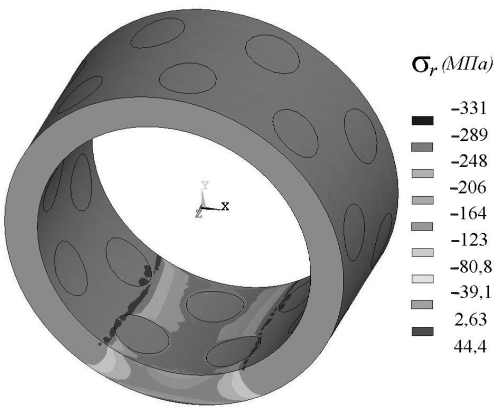


Рис. 11. Распределения контактных напряжений σ_r в слое ($P = 60$ кН)

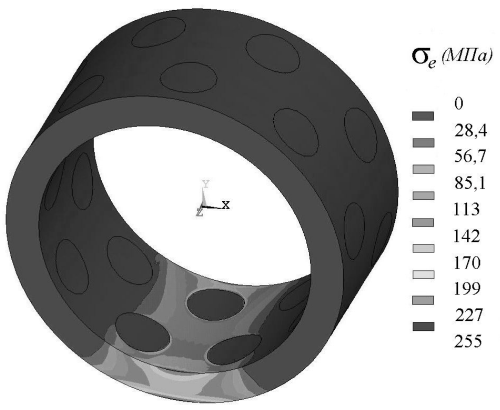


Рис. 12. Распределения эффективных напряжений σ_e в слое ($P = 60$ кН)

Литература

1. *Рубин М.Б., Бахарева В.Е.* Подшипники в судовой технике. Ленинград: Судостроение, 1987. 344 с.
2. *Басов К.А.* ANSYS: справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 2 / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 464 с.

Ключевые слова: метод конечного элемента, контактное взаимодействие, математическое моделирование, теория упругости.

Статья поступила 6 сентября 2009 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону