УДК 539.3

# ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА И ЗАДАЧА О ТРЕЩИНЕ ДЛЯ ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО УПРУГОГО СЛОЯ[1]

***Костырева Л. А.***[2]

A PLANE CONTACT PROBLEM AND A CRACK PROBLEM FOR AN ELASTIC PRESTRESSED ELASTIC LAYER

Kostyreva L. A.

Two problems for an elastic layer, which was initially under the large deformation, are considered. They are the crack problem and the plane contact problem. The material of the layer is defined by the harmonic potential. Extra stresses are assumed to be small, therefore, it is possible to linearize the problems. The latter are reduced to the solution of similar integral equations of the first kind with difference kernels. The asymptotic and numerical solutions are constructed for a wide range of the values of the parameter, which describes the relevant width of the layer.

Keywords: a contact, a crack, a harmonic potential, an integral equation.

В работе рассматриваются две задачи для преднапряженного упругого слоя. В первой изучается напряженно-деформированное состояние слоя, ослабленного продольной трещиной, расположенной симметрично относительно его граней; во второй — приводится плоская задача о вдавливании жесткого штампа в верхнюю грань слоя. Предполагается, что упругие свойства материала слоя задаются потенциалом гармонического типа. Первоначально слой подвергнут большой деформации однородными усилиями, приложенными на бесконечности. Затем, в случае трещины, грани слоя защемляются, а к ее берегам прикладывается равномерное давление. Во второй задаче защемленной оказывается нижняя грань, на верхней действует жесткий штамп, создавая распределенную нормальную нагрузку. Возникающие при этом дополнительные напряжения считаются малыми по сравнению с основным нелинейным напряженным состоянием. Это позволяет линеаризовать задачу по определению дополнительных напряжений и перемещений. В дальнейшем обе задачи сводятся к решению интегральных уравнений. В зависимости от безразмерного параметра $\varepsilon$, характеризующего относительную толщину слоя, строятся асимптотические решения для больших и малых значений этого параметра. Также с помощью модифицированного метода Мультоппа–Каландии получается решение для широкого интервала значений параметра, исследуемого методами больших и малых $\varepsilon$.

## 1. Постановка задач

**Упругий слой, ослабленный трещиной.** Рассмотрим упругий слой толщины $h$ с продольной трещиной, расположенной симметрично относительно его граней. Считаем, что упругие свойства материала слоя задаются потенциалом гармонического типа. Слой находится в однородном напряженно-деформированном состоянии, создаваемом растягивающими усилиями, приложенными на бесконечности. Тогда в начальном состоянии перемещения и напряжения определяются формулами [1]

$$u_j^0 = (\lambda_j - 1)x_j = (\lambda_j - 1)\lambda_j^{-1} y_j,$$
$$\sigma_{jj}^0 = 2\mu\lambda_j^{-1}(\lambda_j - \lambda_2),$$
$$\lambda_j = \text{const},\ j = 1, 2, 3,$$
$$\lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) = -2\mu(\lambda_2 - 1). \quad (1.1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (08-01-00003).

[2]Костырева Лилия Александровна, аспирантка кафедры теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; e-mail: kostyle@inbox.ru.

Здесь $x_j$ — лагранжевы координаты, $y_j$ — декартовы координаты начального состояния (далее полагаем $y_1 = x$, $y_2 = y$, $y_3 = z$), $\lambda$ и $\mu$ — упругие постоянные, $\lambda_j$ — коэффициенты удлинений вдоль осей $x_j$, причем $\lambda_j > 0$. В начальном состоянии слой занимает область $|x| < \infty$, $|y| \leqslant h$, $|z| < \infty$. Трещина в слое в начальном состоянии определяется условиями $y = 0$, $|x| \leqslant a$, $|z| < \infty$.

Будем считать, что после предварительной большой деформации грани слоя защемляются, а к берегам трещины прикладывается равномерное давление $q$. Предполагаем, что возникающие при этом возмущения напряжений и деформаций относительно малы. Это дает возможность линеаризовать задачу по определению дополнительных перемещений и напряжений на фоне основного нелинейного напряженного состояния (1.1). Обозначим соответствующие компоненты дополнительных перемещений вдоль осей $x$ и $y$ через $u$ и $v$. Они должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия [1]:

$$\alpha^2 b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$
$$b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha^2 b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,$$
$$b_1 = \frac{(1+\alpha)(\beta+2)}{(1+\alpha)\beta+2},$$
$$b_2 = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)\beta+2},$$
$$\alpha = \lambda_1 \lambda_2^{-1}, \ \beta = \lambda \mu^{-1}. \quad (1.2)$$

Кроме того, выразим для дополнительных напряжений $\sigma_y$ и $\tau_{yx}$ через дополнительные перемещения

$$\tau_{yx} = \frac{2\mu}{\lambda_3(1+\alpha)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$
$$\sigma_y = \frac{\mu}{\lambda_3 \alpha} \left( \alpha\beta \frac{\partial u}{\partial x} + (\beta+2) \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (1.3)$$

Остается сформулировать граничные условия

$$y = \pm h: \ u = v = 0; \quad y = 0: \ \tau_{xy} = 0,$$
$$\sigma_y = -q \text{ при } |x| \leqslant a.$$

**Контактная задача.** Здесь, как и в предыдущей задаче, рассматривается упругий слой толщины $h$, материал которого характеризуется упругим потенциалом гармонического типа. В начальном состоянии слой подвергается большой деформации, создаваемой растягивающими усилиями, приложенными на бесконечности. Его напряженное состояние также определяется соотношениями (1.1).

После предварительной большой деформации нижняя грань слоя защемляется, а на верхней посредством жесткого штампа в виде продольной полосы ($|x| \leqslant a$, $|z| < \infty$) создается дополнительная нагрузка. Вновь делается предположение о малости возникающих дополнительных напряжений и перемещений. В этом случае задачу нахождения перемещений можно линеаризовать на фоне основного напряженно-деформированного состояния. В результате опять придем к системе дифференциальных уравнений (1.2) и соотношениям (1.3).

Граничные условия в этом случае имеют вид

$$y = 0: u = v = 0;$$
$$y = h: \tau_{yx} = 0, \ \sigma_y = 0 \ (|x| > a),$$
$$v = -[\delta + \omega x - f(x)] \ (|x| \leqslant a).$$

Здесь $\delta$ — величина погружения штампа в слой, $\omega$ — угол его поворота вокруг оси, перпендикулярной плоскости $Oxy$, $f(x)$ задает поверхность штампа.

## 2. Сведение задачи к интегральному уравнению

Разберем подробнее контактную задачу. Для этого рассмотрим сначала вспомогательную задачу со следующими граничными условиями:

$$\begin{gathered} y = 0: u = v = 0; \\ y = h: \tau_{yx} = 0; \ \sigma_y = -\tilde{q}(x), \\ \text{где } \tilde{q}(x) = \begin{cases} q(x), & \text{при } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{при } |x| > a. \end{cases} \end{gathered} \quad (2.1)$$

Решение системы уравнений (1.2) будем искать в виде [1]

$$u = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y},$$
$$v = \left( b_1 \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b_2}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \chi.$$

Нетрудно убедиться, что первое из уравнений данной системы удовлетворяется тождественно, а второе приводится к следующему виду относительно функции $\chi$:

$$\left(\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\chi=0. \qquad (2.2)$$

Применив к уравнению (2.2) интегральное преобразование Фурье, получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно трансформанты функции $\chi$. Введем для нее обозначение

$$X(\gamma,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(x,y)e^{i\gamma x}dx.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения представляется в виде

$$X=(C_1+C_2\alpha|\gamma|y)e^{\alpha\gamma y}+(C_3+C_4\alpha|\gamma|y)e^{-\alpha\gamma y}.$$

Для определения неизвестных функций $C_i=C_i(\gamma)$ воспользуемся граничными условиями (2.1), преобразованными в краевые условия для трансформант. Также введем обозначение для трансформанты контактного давления

$$Q(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{q}(x)e^{i\gamma x}dx.$$

В результате придем к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно величин $C_i(\gamma)$, решив которую, получим

$$\begin{gathered}v(x,h)=-\frac{1}{2\pi\theta}\int_{-\infty}^{\infty}Q(\gamma)\frac{L_1(\alpha\gamma h)}{\gamma}e^{-i\gamma x}d\gamma,\\ L_1(u)=\frac{\operatorname{sh}2u-A_3u}{\operatorname{ch}2u+A_1u^2+A_2},\\ A_1=2(\alpha\beta+\beta+2)^2\Delta^{-1},\\ A_2=(5\alpha^2\beta^2+16\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\\ +16\alpha^2+\beta^2-4\alpha\beta+4\beta+4)\Delta^{-1},\\ A_3=\frac{2(\alpha\beta+\beta+2)}{\alpha\beta+4\alpha+\beta+2},\\ \Delta=(\alpha\beta+4\alpha+\beta+2)(3\alpha\beta+4\alpha-\beta-2),\\ \theta=\frac{\mu(3\alpha\beta+4\alpha-\beta-2)}{\alpha\lambda_3(\beta+2)}.\end{gathered} \qquad (2.3)$$

Величину $\theta$ назовем контактной жесткостью. Заметим, что при некотором значении $\alpha=\alpha_{\text{кр}}=(\beta+2)(3\beta+4)^{-1}$ величина $\theta$ обращается в нуль, а коэффициенты $A_1$ и $A_2$ — в бесконечность. Далее будем считать, что $\alpha>\alpha_{\text{кр}}$.

Осталось неиспользованным единственное краевое условие на перемещение под штампом. Подставим выражение (2.3) в это условие и придем к интегральному уравнению относительно функции контактного давления $q(x)$, которое после введения безразмерных величин

$$\begin{gathered}\xi'=\frac{\xi}{a},\ x'=\frac{x}{a},\ \varepsilon=\frac{\alpha h}{a},\\ \varphi(x')=\frac{q(x)}{\theta},\ g(x')=\frac{\delta+\omega x-f(x)}{a}\end{gathered} \qquad (2.4)$$

(в дальнейшем штрихи опускаем) представляется в виде

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)K_1\left(\frac{\xi-x}{\varepsilon}\right)d\xi=\pi g(x),\ |x|\leqslant 1,\\ K_1(t)=\int_0^{\infty}\frac{L_1(u)}{u}\cos(ut)du.\end{gathered} \qquad (2.5)$$

Аналогичным образом задача о трещине сводится к решению интегрального уравнения относительно некоторой функции $\tilde{\gamma}(x)$, определяемой соотношением

$$\tilde{\gamma}(x)=\frac{\partial v}{\partial x}\text{ при }y=0,$$

которое после введения безразмерных величин, аналогичных (2.4), и функции

$$\varphi(x')=\tilde{\gamma}(x)$$

(штрихи далее опускаем) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)K_2\left(\frac{\xi-x}{\varepsilon}\right)d\xi=-\pi\varepsilon\frac{q}{\theta},\\ |x|\leqslant 1,\\ K_2(t)=\int_0^{\infty}L_2(u)\sin(ut)du,\\ L_2(u)=\frac{\operatorname{ch}2u+A_1u^2+A_2}{\operatorname{sh}2u-A_3u}.\end{gathered} \qquad (2.6)$$

## 3. Модифицированный метод Мультоппа-Каландии

Заметим, что для функций $L_i(u)$ имеют место асимптотические оценки

$$
\begin{aligned}
&L_1(u) = 1 + O(e^{-2u}),\ u \to \infty,\\
&L_1(u) = \frac{2 - A_3}{1 + A_2} u + O(u^3),\ u \to 0,\\
&L_2(u) = 1 + O(e^{-2u}),\ u \to \infty,\\
&L_2(u) = \frac{1 + A_2}{2 - A_3}\frac{1}{u} + O(u),\ u \to 0.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

На основании этих оценок ядра $K_i(t)$ интегральных уравнений (2.5) и (2.6) могут быть представлены в форме

$$
K_1(t) = -\ln|t| + F(t),
$$
$$
K_2(t) = \frac{1}{t} + G(t),
$$

где $F(t)$ и $G(t)$ — регулярные функции. С учетом этих представлений интегральные уравнения (2.5) и (2.6) приводятся соответсвенно к виду

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln\left|\frac{\xi - x}{\varepsilon}\right| d\xi = \pi g(x) -\\
&\quad -\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) F\left(\frac{\xi - x}{\varepsilon}\right) d\xi, \quad |x| \leqslant 1;
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\pi \frac{q}{\theta} -\\
&-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) G\left(\frac{\xi - x}{\varepsilon}\right) d\xi, \quad |x| \leqslant 1.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Решения последних интегральных уравнений существуют и могут быть представлены в виде

$$
\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{3.4}
$$

причем функция $\Phi(x)$ является непрерывной.

Для нахождения приближенного численного решения уравнений (3.2)–(3.3) (с учетом представления (3.4)) строятся интерполяционные полиномы Лагранжа для функции $\Phi(x)$ по чебышевским узлам [2]

$$
x_n = \cos\vartheta_n;\ \vartheta_n = \frac{\pi(2n - 1)}{2N}\ (n = 1, 2, \ldots, N).
$$

Заметим, что функция $F(t)$ является четной, а $G(t)$ — нечетной. Поэтому в обоих случаях функцию $\Phi(x)$ удобно искать в виде

$$
\Phi(x) = \Phi_1(x) + x\Phi_2(x),
$$

где $\Phi_i(x)$ являются четными, и уже для них строить интерполяционные многочлены. Кроме того, в этом случае необходимо в уравнении (3.2) функцию $g(x)$ также представить в виде суммы $g(x) = g_1(x) + xg_2(x)$, где $g_i(x)$ — четная функция. Тогда каждое из уравнений (3.2)–(3.3) распадается на два новых интегральных уравнения относительно $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ соответственно. После подстановки полиномов в эти уравнения интегралы в левых частях вычисляются явным образом, а для нахождения интегралов правых частей можно воспользоваться квадратурной формулой Гаусса. Таким образом, приняв $N = 2l + 2$, приходим к системам из $l + 1$ линейного алгебраического уравнения относительно значений $\tilde{\Phi}_j(\vartheta_n) = \Phi_j(\cos\vartheta_n)$.

Уравнение (3.2) сводится к следующим двум системам для четной и нечетной функций соответственно:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{l+1} \tilde{\Phi}_1(\vartheta_n) \left\{\ln 2\varepsilon + \Psi_l^{+}(\vartheta_n, \vartheta_k) + \right.\\
&\quad + \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{\cos\vartheta_n - \cos\vartheta_k}{\varepsilon}\right) + \right.\\
&\quad \left.\left. + F\left(\frac{\cos\vartheta_n + \cos\vartheta_n}{\varepsilon}\right)\right]\right\} =\\
&= (l + 1)\, \hat{g}_1(\vartheta_k)),\ (k = 1, \ldots, l + 1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{l+1} \tilde{\Phi}_2(\vartheta_n) \left\{\cos(\vartheta_k) + \Psi_l^{-}(\vartheta_n, \vartheta_k) + \right.\\
&\quad + \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{\cos\vartheta_n - \cos\vartheta_k}{\varepsilon}\right) - \right.\\
&\quad \left.\left. - F\left(\frac{\cos\vartheta_n + \cos\vartheta_k}{\varepsilon}\right)\right]\right\} =\\
&= (l + 1)\, \hat{g}_2(\theta_k) \cos\vartheta_k,\ (k = 1, \ldots, l + 1),
\end{aligned}
$$

где

$$
\hat{g}_j(\vartheta_k) = g_j(x_k),
$$
$$
\Psi_l^{+}(\psi, \vartheta) = \sum_{m=1}^{l} \frac{\cos 2m\psi \cos 2m\vartheta}{m},
$$
$$
\Psi_l^{-}(\psi, \vartheta) = \sum_{m=1}^{l} \cos 2m\psi \times
$$
$$
\times \left(\frac{\cos(2m + 1)\vartheta}{2m + 1} + \frac{\cos(2m - 1)\vartheta}{2m - 1}\right).
$$

Отметим, что задача о трещине ограничивается рассмотрением случая равномерной нагрузки $q$ на ее берегах. Следовательно, решение уравнения (3.3) оказывается функцией нечетной и, значит, $\Phi_1(x) \equiv 0$ и $\Phi(x) \equiv x\Phi_2(x)$. Поэтому для определения значений $\tilde{\Phi}_2(\vartheta_n)$ достаточно решить одну систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^{l+1}\tilde{\Phi}_2(\vartheta_n)\left\{\varepsilon\left(1+2\,\frac{\chi_l(\vartheta_n,\vartheta_k)}{\operatorname{tg}\vartheta_k}\right)+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\left[G\left(\frac{\cos\vartheta_n-\cos\vartheta_k}{\varepsilon}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\,G\left(\frac{\cos\vartheta_n+\cos\vartheta_k}{\varepsilon}\right)\right]\right\}=$$
$$=-(l+1)\,\varepsilon\frac{q}{\theta}\,,\ (k=1,\ldots,l+1),$$

где $\chi_l(\psi,\vartheta)=\sum\limits_{m=1}^{l}\cos 2m\psi\cos 2m\vartheta$.

## 4. Асимптотические решения при большой относительной толщине слоя

Вновь рассмотрим интегральные уравнения (3.2)–(3.3). Регулярные функции $F(t)$ и $G(t)$ могут быть представлены в форме абсолютно сходящихся при $|t|<4$ (следовательно, при $|\varepsilon|>2$) степенных рядов [3], которые, с учетом четности, имеют вид

$$F(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_it^{2i},\quad G(t)=\sum_{i=0}^{\infty}b_it^{2i+1},$$

где

$$a_0=\int_0^{\infty}\frac{L_1(u)+e^{-u}-1}{u}du,$$

$$a_i=\frac{(-1)^i}{(2i)!}\int_0^{\infty}[L_1(u)-1]u^{2i-1}du,\ i=1,2,\ldots;$$

$$b_i=\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\int_0^{\infty}[L_2(u)-1]u^{2i+1}du.$$

После соответствующей подстановки рядов в уравнения (3.2)–(3.3) получим

$$-\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\ln\left|\frac{\xi-x}{\varepsilon}\right|d\xi=$$
$$=\pi g(x)-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{\varepsilon^{2i}}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)(\xi-x)^{2i}d\xi,\quad(4.1)$$
$$|x|\leqslant 1,$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\xi)}{\xi-x}d\xi=-\pi\frac{q}{\theta}-$$
$$-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{b_i}{\varepsilon^{2i+2}}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)(\xi-x)^{2i+1}d\xi,\quad(4.2)$$
$$|x|\leqslant 1.$$

Ищем решение интегральных уравнений (4.1)–(4.2) в виде ряда

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\varepsilon^{-2n}.\qquad(4.3)$$

Подставим выражение (4.3) в уравнения и, приравнивая члены при одинаковых степенях $\varepsilon$, придем к бесконечной системе последовательно решаемых интегральных уравнений относительно функций $\varphi_n(x)$. Приведем соответствующие решения с точностью до членов порядка $\varepsilon^{-8}$.

Решение уравнения (4.1)

$$\varphi(x)=\frac{N_0}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[1+\frac{2a_1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)+\right.$$
$$+\frac{4a_2}{\varepsilon^4}\left(\frac{7}{8}-x^2-x^4\right)+$$
$$+\frac{6a_3}{\varepsilon^6}\left(\frac{13}{8}+\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x^4-x^6\right)-$$
$$\left.-\frac{3a_1a_2}{\varepsilon^6}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)\right]-\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\times$$
$$\times\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}g'(t)\left[\frac{1}{t-x}-\frac{2a_1x}{\varepsilon^2}-\right.$$
$$-\frac{2a_2}{\varepsilon^4}(6x^3-6x^2t+2xt^2-2x+3t)-$$
$$-\frac{3a_3}{\varepsilon^6}\{10x^5-20x^4t+$$
$$+x^3(20t^2+5)-x^2(10t^3-5t)+$$
$$\left.-\frac{2a_1^2x}{\varepsilon^4}-x\left(2t^4-9t^2-\frac{11}{2}\right)+5t+5t^2\right\}-$$
$$\left.-\frac{a_1a_2}{\varepsilon^6}\,x(12x^2+4t^2+2)-\frac{2a_1^3x}{\varepsilon^6}\right]dt+O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right).$$

Величина контактного давления

$$N_0 = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) d\xi$$

в этом выражении должна быть определена из соотношения

$$N_0 \ln 2\varepsilon = \int_{-1}^{1} \frac{g(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} - \\ - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{\varepsilon^{2i}} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\pi\sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)(\xi - t)^{2i} d\xi.$$

С точностью до членов порядка $\varepsilon^{-8}$

$$N_0 = \left( \ln 2\varepsilon + a_0 + \frac{a_1}{\varepsilon^2} - \frac{a_1^2}{4\varepsilon^4} + \right. \\ \left. + \frac{9a_2}{4\varepsilon^4} - \frac{2a_1 a_2}{\varepsilon^6} + \frac{25a_3}{4\varepsilon^6} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right) \right)^{-1} \times \\ \times \left( \int_{-1}^{1} \frac{g(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} g'(t) t \times \right. \\ \times \left\{ \frac{a_1}{\varepsilon^2} + \frac{a_2}{\varepsilon^4}\left(t^2 + \frac{7}{2}\right) + \frac{a_3}{\varepsilon^6}\left(t^4 + 8t^2 + \frac{39}{4}\right) - \right. \\ \left. \left. - \frac{3a_1 a_2}{2\varepsilon^6} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right) \right\} dt \right). \quad (4.4)$$

Ограничимся рассмотрением случая плоского наклонного штампа, откуда следует, что $g(x) = \delta + \omega x$. Вычисляя интегралы в (4.4), придем к следующему выражению относительно $N_0$

$$N_0 = \pi\delta \left[ \ln 2\varepsilon + a_0 + \frac{a_1}{\varepsilon^2} - \frac{a_1^2}{4\varepsilon^4} + \frac{9a_2}{4\varepsilon^4} - \right. \\ \left. - \frac{2a_1 a_2}{\varepsilon^6} + \frac{25a_3}{4\varepsilon^6} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right) \right]^{-1}. \quad (4.5)$$

Решение уравнения (4.2)

$$\varphi(x) = -\frac{qx}{\theta\sqrt{1-x^2}} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{b_0}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon^4}\left(\frac{3}{2} b_1 \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{b_0^2}{4}\right) - \right. \\ - \frac{1}{\varepsilon^6} \left\{ \frac{5}{2} b_2 \left(x^4 + x^2 - \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4} b_0 b_1 \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - \right. \\ \left. \left. - \frac{b_0^3}{8} \right\} \right] + O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right).$$

В этой задаче также находится значение коэффициента интенсивности нормальных напряжений в вершине трещины (на ее продолжении). Воспользуемся формулой

$$K = -\lim_{x \to 1} \theta \varphi(x) \sqrt{1-x}.$$

Тогда

$$K = \frac{q}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{b_0}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}\left(\frac{b_0^2}{4} - \frac{9b_1}{8}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon^6}\left(\frac{b_0}{8} + \frac{15 b_0 b_1}{16} - \frac{25 b_2}{8}\right) \right] + \\ + O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right). \quad (4.6)$$

## 5. Асимптотическое решение при малой относительной толщине слоя

Ограничимся построениями главных членов асимптотики решений уравнений (2.5)–(2.6). При достаточно малых значениях $\varepsilon$ решение полученного уравнения в контактной задаче представляется в виде [3]

$$\varphi(x) = \varphi^{(1)}\left(\frac{1+x}{\varepsilon}\right) + \\ + \varphi^{(2)}\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) - \varphi^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (5.1)$$

где функции $\varphi^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2)$ должны быть найдены из уравнений

$$\int_{0}^{\infty} \varphi^{(1)}(\tau) K_1(\tau - t) d\tau = \frac{\pi}{\varepsilon} g(\varepsilon t - 1), \\ (0 \leqslant t < \infty), \\ \int_{0}^{\infty} \varphi^{(2)}(\tau) K_1(\tau - t) d\tau = \frac{\pi}{\varepsilon} g(1 - \varepsilon t), \quad (5.2) \\ (0 \leqslant t < \infty), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(0)}(\tau) K_1(\tau - t) d\tau = \frac{\pi}{\varepsilon} g(\varepsilon t), \\ (-\infty < t < \infty).$$

Первые два уравнения решаются при помощи метода Винера-Хопфа [4, 5]. Решение последнего строится путем применения техники интегрального преобразования Фурье.

Рассмотрим конкретный пример. Как и прежде $g(x) = \delta + \omega x$, что соответствует вдавливанию плоского наклонного штампа. Тогда решение третьего интегрального уравнения (5.2) определяется несложно и имеет вид

$$\varphi^{(0)}(x) = \frac{\delta + \omega\varepsilon x}{l\varepsilon}, \qquad l = \frac{2 - A_3}{1 + A_2}. \tag{5.3}$$

Для построения решения первых двух интегральных уравнений (5.2) аппроксимируем функцию $L_1(u)$ следующим образом:

$$L_1^*(u) = \frac{u\sqrt{u^2 + B^2}}{u^2 + A^2}.$$

Постоянные $A$ и $B$ подбираются так, чтобы для функции $L_1^*(u)$ были справедливы те же оценки, что и для $L_1(u)$ в (3.1). С учетом аппроксимации решения, построенные методом Винера–Хопфа, имеют вид

$$\varphi^{(1)}(t) = \frac{\delta - \omega}{\varepsilon}\psi_0(t) + \omega\psi_1(t),$$

$$\varphi^{(2)}(t) = \frac{\delta + \omega}{\varepsilon}\psi_0(t) - \omega\psi_1(t), \tag{5.4}$$

$$\psi_0(t) = \frac{A}{\sqrt{B}}\frac{e^{-Bt}}{\sqrt{\pi t}} + \frac{A^2}{B}\mathrm{erf}(\sqrt{Bt}),$$

$$\psi_1(t) = \frac{A}{B}(1 + At)\mathrm{erf}(\sqrt{Bt}),$$

где $\mathrm{erf}(x)$ — интеграл вероятности.

Вычислим теперь величину интеграла от контактного давления $N_0$. Согласно (5.1), (5.3) и (5.4), будем иметь

$$N_0 = 2\delta\int\limits_0^{2/\varepsilon}\psi_0(\tau)d\tau - \frac{2\delta}{l\varepsilon} =$$

$$= \delta\left[\mathrm{erf}\sqrt{\frac{2B}{\varepsilon}}\left(\frac{4}{l\varepsilon} + \frac{2}{\sqrt{Bl}} - \frac{1}{Bl}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{l}\sqrt{\frac{2}{\pi B\varepsilon}}\exp\left(-\frac{2B}{\varepsilon}\right) - \frac{2}{l\varepsilon}\right]. \tag{5.5}$$

Вернемся теперь к рассмотрению задачи о трещине. Здесь главный член асимптотики решения уравнения (2.6) при достаточно малых $\varepsilon$ может быть представлен в виде

$$\varphi(x) = \varphi^{(1)}\left(\frac{1+x}{\varepsilon}\right) - \varphi^{(2)}\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right),$$

где функции $\varphi^{(i)}(t)$, $(i = 1, 2)$ являются решениями интегрального уравнения, аналогичного (5.2), с соответствующей правой частью

$$\int\limits_0^{\infty}\varphi^{(i)}(\tau)K_2(\tau - t)d\tau = -\pi\frac{q}{\theta}.$$

Для построения аналитического решения аппроксимируем функцию $L_2(u)$ выражением

$$L_2^*(u) = \frac{u^2 + C^2}{u\sqrt{u^2 + D^2}}.$$

Постоянные $C$ и $D$ подбираем таким образом, чтобы для функции $L_2^*(u)$ выполнялись те же оценки, что и для $L_2(u)$ в (3.1). Далее при помощи метода Винера–Хопфа находим

$$\varphi^{(i)}(t) = \frac{q\sqrt{D}}{\theta C}\Big(\frac{e^{-Ct}}{\sqrt{\pi t}} +$$

$$\sqrt{C - D}\,\mathrm{erf}\sqrt{(C - D)t}\Big),$$

$$i = 1.2.$$

В этом случае при малых $\varepsilon$ будем иметь

$$K = \frac{q}{C}\sqrt{\frac{D\varepsilon}{\pi}}. \tag{5.6}$$

## 6. Численный пример

Рассмотрим случай, когда $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Вычислим необходимые коэффициенты, встречающиеся в выражениях (4.5), (4.6), (5.5) и (5.6). В контактной задаче при больших значениях $\varepsilon$ имеем $a_0 = -0,569$, $a_1 = 0,747$, $a_2 = -0,260$, $a_3 = 0,856$; при малых — $A = 1,327$, $B = 0,660$ (при этом погрешность аппроксимации (5.4) не превосходит 8,5 %). В задаче о трещине при больших значениях $\varepsilon$ $b_0 = 3,753$, $b_1 = -1,336$, $b_2 = 0,5576$; при малых — $C = 1,327$, $D = 0,6603$ (погрешность также не превышает 8,5%).

Далее в таблицах приводятся значения величин $N_0/\delta$ и $K/q$ при различных $\varepsilon$.

В работе учитывается материал, представленный в [6, 7]. Здесь проведены дополнительные исследования, говорящие в пользу применимости всех выше изложенных методов решения поставленных задач.

| Контактная задача | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Метод Мультоппа–Каландии | | | | Асимптотические методы | | | | |
| | | | | | малые $\varepsilon$ | | | большие $\varepsilon$ | |
| $\varepsilon$ | 0.5 | 1 | 2 | 4 | 0.5 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| $\frac{N_0}{\delta}$ | 11,095 | 5,811 | 3,239 | 2,020 | 10,716 | 5,604 | 3,230 | 3,227 | 2,020 |

| Задача о трещине | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\varepsilon = 2$ | 2,2 | 2,5 | 3 | 4 |
| Метод Мультоппа–Каландии | 0,509 | 0,531 | 0,559 | 0,594 | 0,636 |
| Асимптотический метод (малые $\varepsilon$) | 0,489 | 0,512 | 0,546 | 0,598 | 0,691 |
| Асимптотический метод (большие $\varepsilon$) | 0,453 | 0,503 | 0,548 | 0,591 | 0,636 |

## *Литература*


1. *Гузъ. А. Н.* Комплексные потенциалы плоской линеаризованной задачи теории упругости (сжимаемые тела) // Прикладная механика. 1980. Т. 16. № 5. С. 72–83.
2. *Александров В. М.* Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 91–94.
3. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
4. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
5. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 467 с.
6. *Александров В. М., Серов М. В.* Плоская контактная задача для преднапряженного упругого слоя // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 1. С. 7–13.
7. *Александров В. М., Серов М. В.* Преднапряженный упругий слой с защемленными гранями, ослабленный продольной трещиной // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2006. № 1. С. 27–30.


Ключевые слова: контакт, трещина, потенциал гармонического типа, интегральное уравнение.

Статья поступила 1 сентября 2009 г.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва