УДК 539.3

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГИХ ВОЛН В МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТАХ[1]

Кривонос А. С.[2]

ENERGY CHARACTERISTICS OF ELASTIC WAVES IN MULTILAYERED ANISOTROPIC COMPOSITES

Krivonos A. S.

Asymptotic representation of Lamb waves generated in anisotropic composite laminates by surface load is discussed. The characteristics of the energy flow are analyzed numerically depending on the source type (a vertical concentrated source and a piesoactuator), as well as anisotropic properties of the waveguide. Directional diagrams of the energy flow for distinct materials and wave sources, energy flow lines are investigated.

Keywords: multilayered composites, anisotropy, Green's matrix, energy flow.

Введение

Многие композиционные материалы, используемые в таких областях как ядерная энергетика, аэрокосмическая промышленность, химическое производство и машиностроение представляют собой многослойные структуры с резко отличающимися, как правило, анизотропными механическими свойствами составляющих их слоев. Типичным примером таких материалов являются углепластики, состоящие из эпоксидных слоев, армированных упрочняющими графитовыми нитями или стекловолокном.

Для обеспечения равномерности прочностных свойств материала композит составляется из слоев с ориентацией волокон в различных направлениях. Однако каждый из слоев обладает сильной трансверсальной анизотропией, что обуславливает существенное отличие волноводных свойств таких материалов от свойств аналогичных изотропных волноводов с усредненными («эффективными») упругими параметрами. Поэтому для детального анализа амплитудных и энергетических характеристик волновых полей, возбуждаемых в многослойных композитах силовыми нагрузками, во многих случаях оказывается недостаточным использование традиционных упрощенных теорий, в рамках которых динамическое поведение многослойного пакета описывается двумерными уравнениями теории анизотропных пластин или даже трехмерными уравнениями для изотропного слоя с «эффективными» модулями (уравнениями Ляме). Здесь возникает необходимость использования полной системы трехмерных уравнений движения для анизотропного материала каждого из слоев композита.

В инженерной практике необходимость анализа особенностей оттока волновой энергии из зоны нагружения возникает при расчете динамической прочности материалов, используемых, например, для бронежилетов, антиударных покрытий, виброзащиты и т.п. Для правильной расстановки сенсоров и адекватной интерпретации измерений в системах волнового мониторинга (structural health monitoring [1, 2]) корпусов летательных аппаратов, стенок реакторов и других конструкций ответственного назначения, выполненных из современных композитных материалов, также необходимо учитывать направленность бегущих волн, возбужденных пьезокристаллами.

[1]Работа выполнена при поддержке Аналитической ведомственной целевой программы Минобрнауки (2.1.1/1231).

[2]Кривонос Александр Сергеевич, аспирант кафедры вычислительных технологий, младший научный сотрудник Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: KrivonosAS@urd.uralsib.ru.

Целью настоящей работы является анализ особенностей оттока волновой энергии из зоны нагружения, обусловленных анизотропией упругих свойств материала, для двух указанных выше типов локального вибровоздействия: 1) нормальная к поверхности нагрузка, 2) пара касательных разнонаправленных сосредоточенных сил, моделирующая действие пьезоактуатора. Численный анализ проводится в рамках полной трехмерной теории упругости на основе интегрального представления волнового поля $\mathbf{u}$ в виде свертки матрицы Грина $\mathbf{k}(\mathbf{x})$, рассматриваемого пакета анизотропных слоев с возбуждающей его нагрузкой $\mathbf{q}$, а также полученной из этого представления асимптотики бегущих волн. Ключевую роль в применении указанного подхода играет разработка и компьютерная реализация эффективного алгоритма построения Фурье-символа матрицы Грина $\mathbf{K}$, вычисления контурных интегралов и коэффициентов асимптотического представления бегущих волн.

Используемые для расчетов методы являются обобщением на анизотропный случай численно-устойчивых алгоритмов построения матрицы Грина изотропных многослойных и градиентных сред, подробно описанных в [5, 6]. Решение в каждом слое строится в виде суммы собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$, алгоритм построения которой для анизотропного случая описан в [7], с неизвестными коэффициентами $\mathbf{t}$, являющиеся решениями системы $\mathbf{Bt} = \mathbf{p}$, полученой из граничных условий. Структура блочно-диагональной матрицы $\mathbf{B}$ описана в [8, 9]. В настоящей статье дается только краткая сводка основных соотношений, а основное внимание уделено анализу выявленных эффектов.

1. Постановка задачи и сводка асимптотических соотношений

Рассматривается композитный материал толщины H, состоящий из N слоев, занимающий в пространстве объем $-\infty \leqslant x, y \leqslant \infty$, $-H \leqslant z \leqslant 0$. Верхняя граница материала совпадает с плоскостью XoY, нижняя граница каждого из слоев имеет координату $-h_i$ по оси z: $0 > -h_1 > \ldots > -h_N = -H$. Каждый слой состоит из материала с произвольной анизотропией, свойства которого задаются плотностью ρ^n и тензором модулей упругости c^n_{ijkl}, $n = \overline{1, N}$. В тензорной записи уравнения, определяющие волновое поле $\mathbf{u}^k(\mathbf{x})$ в каждом из слоев имеют вид

$$\frac{\partial \sigma^k_{ij}}{\partial x_j} + \rho^k \omega^2 u^k_i = 0, \quad x_3 \leqslant 0,$$

$$i = \overline{1,3}, \quad k = \overline{1,N},$$

$$\sigma^k_{ij} = c^k_{ijml} \frac{\partial u^k_l}{\partial x_m},$$

где σ_{ij} — тензор механических напряжений. Слои жестко сцеплены между собой, что означает непрерывность перемещений и напряжений при переходе от слоя к слою

$$u^k_i = u^{k+1}_i\big|_{z=-h_k}, \quad i = \overline{1,3} \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$\sigma^k_{i3} = \sigma^{k+1}_{i3}\big|_{z=-h_k}, \quad i = \overline{1,3} \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Источником колебаний служит заданная в произвольной области Ω на поверхности $z = 0$ композита нагрузка $\mathbf{q}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, вне области Ω напряжения отсутствуют

$$\sigma^1_{i3}\big|_{z=0} = q_i(x, y), \quad i = \overline{1,3} \quad (x, y) \in \Omega.$$

Нижняя граница свободна от напряжений.

$$\sigma^N_{i3}\big|_{z=-H} = 0, \quad i = \overline{1,3}$$

Колебания считаются гармоническими установившимися с круговой частотой ω, в дальнейшем множитель $e^{-i\omega t}$ опущен, а запись (x_1, x_2, x_3) и (x, y, z) считается эквивалентной. Здесь и далее по возможности используются обозначения и понятия, традиционные для предыдущих работ [3, 4]. В этих работах указывается, что искомое волновое поле $\mathbf{u}^k$ в каждом слое $k = \overline{1, N}$ представимо в виде

$$\mathbf{u}^k(\mathbf{x}) = \iint\limits_{\Omega} \mathbf{k}^k(x-\xi, y-\eta, z)\mathbf{q}(\xi, \eta)d\xi d\eta \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\Gamma_1} \int\limits_{\Gamma_2} \mathbf{K}^k(\alpha_1, \alpha_2, z)\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) \times$$
$$\times e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{K} = \mathcal{F}[\mathbf{k}]$ и $\mathbf{Q} = \mathcal{F}[\mathbf{q}]$ — Фурье символы (то есть результат преобразования Фурье $\mathcal{F}$ по горизонтальным координатам x и y) матрицы-функции $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ и вектор-функции $\mathbf{q}$, Γ_1, Γ_2 — контуры интегрирования обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}$.

В полярных координатах

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha \cos\gamma, \\ \alpha_2 = \alpha \sin\gamma, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos, \varphi \\ y = r\sin, \varphi \\ z = z, \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2},$$
$$0 \leqslant \varphi, \gamma \leqslant 2\pi$$

представление (1.1) принимает вид:

$$\mathbf{u}^k(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_\Gamma \mathbf{K}^k(\alpha, \gamma, z) \times$$
$$\times \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) e^{-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)} \alpha d\alpha d\gamma. \quad (1.2)$$

Здесь Γ — контур, идущий вдоль положительной вещественной полуоси $[0, \infty]$, отклоняясь от нее при обходе вещественных полюсов ζ_n определителя матрицы $\mathbf{K}$, $n = 1, \ldots, P$, как правило, в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \alpha < 0$ комплексной плоскости α. Сверху обходятся только так называемые нерегулярные полюса, с отрицательным углом наклона касательной $d\zeta_n/d\omega$.

Для $r > r_0$, где r_0 — радиус круга, целиком содержащего область Ω, справедливо следующее асимптотическое представление

$$\mathbf{u}^k(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{P} \mathbf{u}_n^k(r, \varphi, z) + O^k((r\kappa)^{-3/2}),$$
$$r\kappa \to \infty;$$
$$\mathbf{u}_n^k = \frac{i}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \mathbf{b}_n^k(\theta, z) e^{i\zeta_n(\theta) r \sin\gamma} d\gamma,$$
$$\theta = \gamma + \varphi + \pi/2;$$

$$\mathbf{b}_n^k(\gamma, z) =$$
$$= j_n \operatorname{res}[\mathbf{K}^k(\alpha, \gamma, z) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \alpha]|_{\alpha = \zeta_n(\gamma)}, \quad (1.3)$$

где $\kappa = \omega/v$ — волновое число, соответствующее характерной скорости распространения волн v, $j_n = 1$ для регулярных и $j_n = -1$ для нерегулярных полюсов матрицы Грина ζ_n. Вектор-функции $\mathbf{u}_n$ — нормальные моды, возбуждаемые в композите нагрузкой $\mathbf{q}$. В дальней зоне $r\kappa \gg 1$ главный вклад в их асимптотическое представление вносят стационарные точки γ_m фазовой функции $s_n(\gamma) = \zeta_n(\theta) \sin\gamma$ интеграла (1.3)

$$\mathbf{u}_n^k(r, \varphi, z) \sim \sum_m \mathbf{d}_{n,m}^k(\varphi, z) e^{i s_n(\gamma_m) r} / \sqrt{r},$$

$$\mathbf{d}_{n,m}^k = \mathbf{b}_n^k(\theta_m, z) / \sqrt{2\pi i s_n''(\gamma_m)},$$

$$\gamma_m: \ s_n'(\gamma_m) = 0, \quad \theta_m = \gamma_m + \varphi + \pi/2. \quad (1.4)$$

Представление (1.4) является удобным как для модального, так и для амплитудного анализа. Его слагаемые описывают распространяющиеся от источника цилиндрические волны, амплитуды которых убывают с расстоянием как $(r\kappa)^{-1/2}$. Это волны типа Релея-Лэмба, Стоунли и Лява, волновые числа которых $s_n(\gamma_m)$ (и соответственно фазовые и групповые скорости $v_n = \omega/s_n$ и $c_n = d\omega/ds_n$) зависят от направления излучения φ. Амплитудные множители $\mathbf{d}_{n,m}^k$, определяющие энергию и направленность излучения, зависят как от структуры материала, информация о которой учитывается в элементах матрицы $\mathbf{K}^k$, так и от источника, влияние которого на характеристики возбуждаемого поля описывается векторами $\mathbf{Q}(\zeta_n, \gamma_m)$. Данное представление становится эффективным инструментом быстрого параметрического анализа только при наличии надежного алгоритма построения матрицы $\mathbf{K}^k$, поиска полюсов ζ_n и вычисления вычетов $\operatorname{res} \mathbf{K}^k|_{\alpha = \zeta_n}$ [4, 6]. Для численного поиска полюсов ζ_n используется метод половинного деления, при этом фиксируется угол γ и идет поиск вещественных корней уравнения $1/|\mathbf{K}| = 0$.

Наряду с амплитудой важной характеристикой волнового поля является количество переносимой волнами энергии. Понятие потока и вектора плотности потока энергии упругих волн было введено Умовым [13]. Осредненное за период количество энергии E проходящее через поверхность S равно

$$E = \iint_S (\mathbf{e}_n, \mathbf{n}) dS,$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S, $\mathbf{e}_n$ — вектор плотности потока энергии, компоненты которого вычисляются по формуле

$$e_k = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}_k), \quad (1.5)$$

где ($\boldsymbol{\tau}_k$ — напряжения на площадке с нормалью $\mathbf{i}_k$). В объеме, занятом средой, определено непрерывное, в силу непрерывной зависимости напряжений и перемещений от координат, векторное поле $\mathbf{e}(\mathbf{x})$. Ему соответствует семейство кривых $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, определяемых дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \frac{\mathbf{e}(\mathbf{x})}{|\mathbf{e}(\mathbf{x})|}.$$

За счет нормировки правая часть является вектором единичной длины, в этом случае

s — естественный параметр, совпадающий с длиной кривой от начала $\mathbf{x}(0)$ до рассматриваемой точки $\mathbf{x}(s)$. В каждой точке вектор плотности энергии $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ является касательным к интегральной кривой $\mathbf{x}(s)$, проходящей через данную точку, следовательно, в среднем за период энергия течет вдоль этих кривых, называемых линиями тока энергии.

2. Примеры направленности оттока энергии из зоны вибровоздействия

Для проверки достоверности численных результатов наряду со стандартным тестированием программ, реализующих предлагаемый подход (численное удовлетворение уравнениям и граничным условиям), проводилось сопоставление с результатами других авторов. Для этой цели были выбраны работы [10, 11], в которых приводятся теоретические и экспериментальные исследования.

Все приводимые в дальнейшем результаты (если это не указано отдельно) были получены для графито-эпоксидных ламинатов А и В со следующими характеристиками ортотропных слоев (в главных осях) [11]:

C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}
110,7	7,5	7,5	14,1	7,3

C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}	ρ
1,1	3,37	6,1	6,1	1550

Упругие константы $C_{\alpha\beta}$ даны в традиционной сокращенной (матричной) нумерации, в которой индексы α и β соответствуют первой и второй паре индексов ij и kl тензора C_{ijkl} по следующему правилу

ij или kl :	11	22	33	23	13	12
α или β :	1	2	3	4	5	6

,

$C_{\alpha\beta}$ даны в гигапаскалях (1 ГПа=10^9 н/м^2), а плотность ρ в кг/м^3. В приведенных ниже примерах материалы А и В имеют одинаковую общую толщину $H = 2,72$ мм, но разную упаковку слоев. Материал А представляет собой симметричный относительно срединной плоскости $z = -H/2$ пакет с упаковкой слоев $[+45_5/-45_5]_s$, а материал В с упаковкой $[+45_2/-45_8]_s$. Обозначение упаковки означает, что в материале А, например, армирующие волокна пяти слоев ориентированы под углом 45° относительно оси Ox_1 глобальной системы координат $\mathbf{x}$, а пять следующих — под углом −45°. Далее (при $z < -H/2$) в силу симметрии идут пять слоев с ориентацией −45° и пять с +45°. Таким образом, в ламинате А десять слоев (по пять сверху и снизу) ориентировано в направлении +45° и столько же в перпендикулярном направлении, когда в ламинате В всего четыре наружных слоя имеют ориентацию +45°, а шестнадцать внутренних −45°. В рамках математической модели набор одинаково ориентированных слоев можно рассматривать как один однородный слой, поэтому материал А моделируется трехслойным пакетом с толщиной наружных слоев $H/4$ и внутреннего $H/2$, а материал В $h_1 = h_3 = H/10$ и $h_2 = 4/5H$ соответственно. Значения упругих модулей C_{ijkl} в глобальной системе $\mathbf{x}$ определяются по заданным в локальной системе $\mathbf{x}'$ значениям C'_{ijkl} (т.е. по приведенным выше $C_{\alpha\beta}$) с помощью известных формул перехода [12]

$$C_{ijkl} = p_{mi}p_{kj}p_{rk}p_{sl}\,C'_{mnrs},$$

p_{ij} — компоненты ортогональной матрицы поворота $\mathbf{P}$: $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}'$.

Для проведения расчетов и представления результатов используется безразмерная форма, в которой в качестве базисных единиц длины, скорости и плотности зафиксированы толщина $H = 2,72 \cdot 10^{-3}$ м, скорость распространения волн $c = 4\,587$ м/с и плотность $\rho = 1\,550$ кг/м^3. При этом безразмерная круговая частота $\omega = 2\pi Hf/c$, где f — размерная частота в герцах. Все приведенные ниже результаты получены для безразмерной частоты $\omega = 1$ ($f = 270$ кГц), на которой возбуждаются 3 моды, т. е. для достаточно высокой частоты, на которой уже не работают упрощенные теории. Графики зависимостей фазовых скоростей поверхностных волн от направления φ приведены на рис. 1.

На рис. 2 приведены результаты расчета плотности потока энергии E поверхностных волн, генерируемых в материалах А (слева) и В (справа) точечной вертикальной нагрузкой $\mathbf{q} = \delta(\mathbf{x})\mathbf{i}_3$. Следует отметить, что для изотропного материала соответствующая диаграмма направленности представляет собой простую окружность. Крестиками (внешний контур) обозначена общая плотность потока энергии

$$E(\varphi) = \int_{-H}^{0} (\mathbf{e}_n, \mathbf{n})dz, \quad \mathbf{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

в зависимости от направления распространения φ, а точками — часть потока, про-

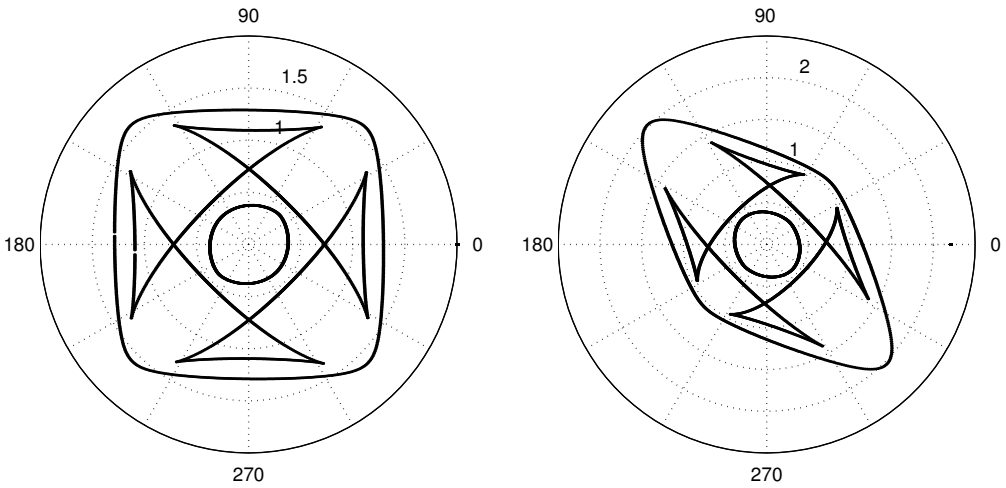

Рис. 1. Пространственная зависимость фазовых скоростей поверхностных волн от направления φ для материалов A (слева) и B (справа)

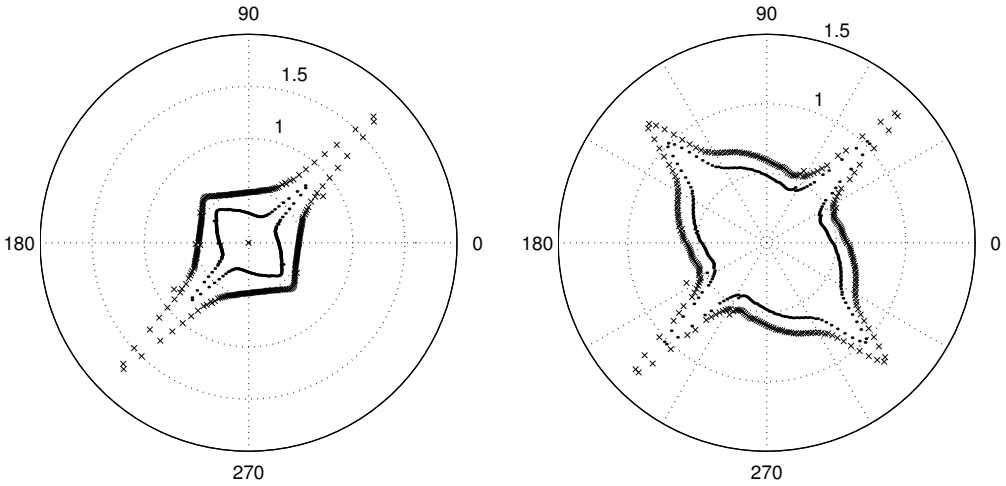

Рис. 2. Диаграмма направленности потока энергии в материалах A (слева) и B (справа) для вертикального сосредоточенного источника

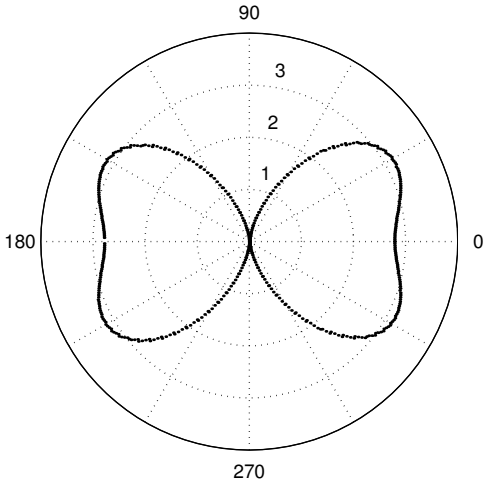

Рис. 3. Диаграмма направленности потока энергии в изотропном слое из стали

водимая только внутренним слоем с ориентацией волокон $-45°$. Несмотря на то, что в материале A суммарная толщина слоев с различной ориентацией волокон одинакова, большая часть поступающей от источника энергии распространяется в направлении ориентации волокон верхнего слоя. В материале B примерно одинаковое количество энергии распространяется во взаимно перпендикулярных направлениях $45°$ и $-45°$ при четырехкратной разнице в толщине разнонаправлено ориентированных слоев.

При использовании в качестве источника пьезонакладки картина меняется. Воздействие приклеенной к поверхности $z = 0$ гибкой прямоугольной пьезонакладки размера $2a \times 2b$, деформирующейся под действием электрического поля в направлении x, на низких частотах с большой степенью точности обычно моделируется парой сосредоточенных касательных напряжений

$$q(x, y) = \delta(x - a) - \delta(x + a), \quad |y| < b,$$

$$Q(\alpha_1, \alpha_2) = 4i \sin(a\alpha_1) \sin(b\alpha_2/\alpha_2).$$

Численные результаты на рис. 3, 4 даны для квадратной пьезонакладки с размерами $a = 1$, $b = 1$. На рис. 3 приведен расчет для изотропной стальной пластины. Поток энергии практически равномерен в пределах 120-градусного сектора с осью симметрии проходящей по оси x, и отсутствует за его пределами. В случае материала A (рис. 4 слева) этот поток неравномерен в пределах сектора, но при этом отсутствует выраженная направленность потока энергии вдоль армирующих волокон какого-либо слоя. В материале B (рис. 4 справа) такая направленность имеет место вдоль волокон среднего слоя, имеющего большую толщину.

Асимптотическое представление (1.3) позволяет без больших затрат вычислять компоненты вектора $\mathbf{e}_n$ (вектора Умова-Пойнтинга) (1.5). Тем самым, как и ранее для изотропных волноводов [4], появляется возможность строить линии тока энергии, показывающие пространственную структуру энергетических потоков. Для материала B при $z = 0$ они изображены на рис. 5. Для изотропного случая линии тока представляли бы собой прямые лучи, исходящие от места приложения нагрузки. Кроме того, полученное представление (1.3) позволяет анализировать распределение плотности энергии по толщине материала $E(z, r) = \int_0^{2\pi} (\mathbf{e}_n, \mathbf{n}) d\varphi$ (рис. 6 при $r = 20$), частотную зависимость общего количества энергии, поступающей от источника, ее распределение между возбуждаемыми волнами и т. п. Еще раз следует отметить, что наряду с влиянием структуры материала через $\mathbf{Q}(\alpha, \gamma)$ в решении (1.2)–(1.4) автоматически учитываются и характеристики источника, в то время как в рамках модального или лучевого анализа источник отсутствует (строятся собственные решения либо исходное падающее поле предполагается заданным).

Заключение

Разработан метод расчета динамического поведения анизотропных многослойных ком-

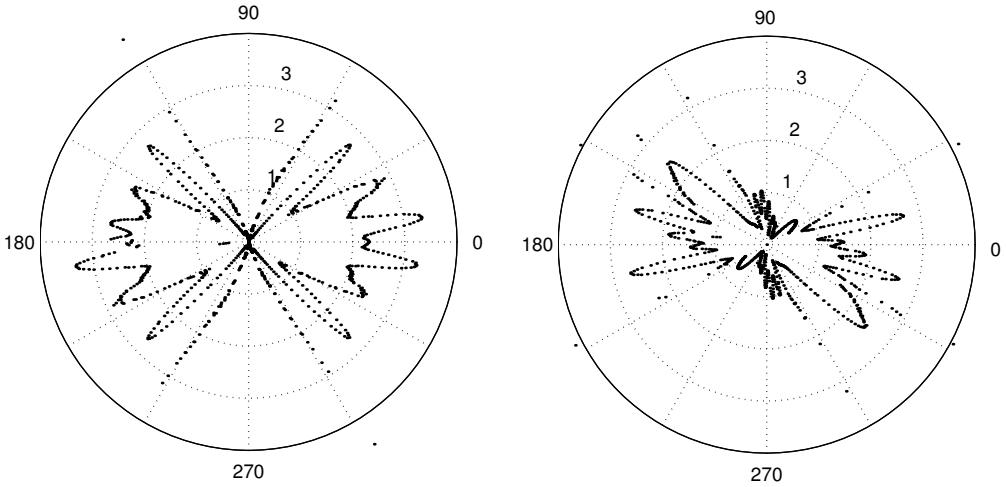

Рис. 4. Диаграмма направленности потока энергии для пьезонакладки в материалах A и B

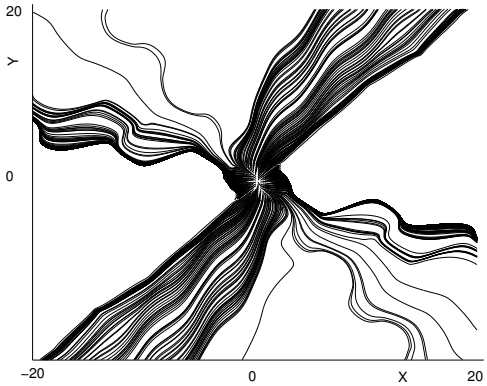

Рис. 5. Линии тока энергии при $z = 0$, материал B, пьезонакладка

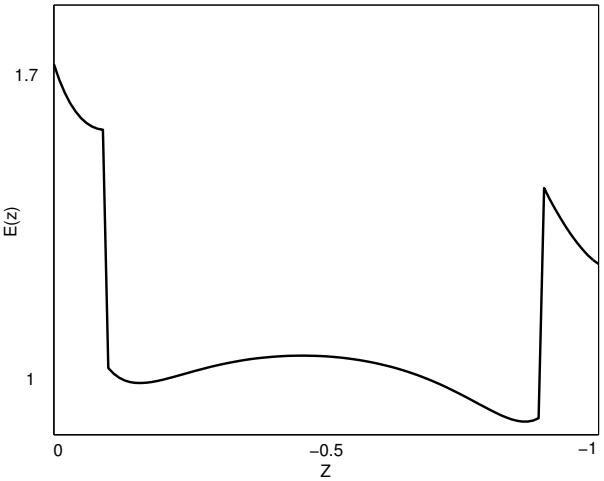

Рис. 6. Плотность потока энергии в зависимости от z, материал B, пьезонакладка

позитных материалов под действием заданных силовых нагрузок и проведен численный анализ влияния анизотропии на направление распространения энергии и характеристики волновых полей, возбуждаемых в многослойном композите двумя типами поверхностных нагрузок.

Автор выражает признательность Глушкову Е.В. и Глушковой Н.В. за помощь в написании статьи

Литература

1. *Raghavan A., Cesnik C. E. S.* Review of Guided-wave Structural Health Monitoring // The Shock and Vibration Digest. 2007. Vol. 39. No. 2. P. 91–114.
2. *Su Zh., Ye Lin, Lu Ye* Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review Journal of Sound and Vibration. 2006. 295 P. 753–780.
3. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
4. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
5. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.
6. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А., Михаськив В. В.* Метод слоистых элементов в динамической теории упругости // ПММ. 2009.
7. *Глушков Е. В., Сыромятников П. В.* Анализ волновых полей, возбуждаемых поверхностным гармоническим источником в анизотропном полупространстве // Краснодар, 1985, 11 с. Рукопись представлена Кубанским госуниверситетом, деп. в ВИНИТИ 07.08.85, № 5861-85.
8. *Сыромятников П. В.* Энергия электроупругих волн, возбуждаемых поверхностным гармоническим источником в пьезоэлектрической полуограниченной среде. Дис. канд. физ.-мат. наук, 01.02.04, Кубанский госуниверситет, 1996. 228 с.
9. *Кармазин А. В., Кириллова Е. В., Сыромятников П. В.* Фазовые скорости волн Лэмба в многослойных анизотропных композитах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 2. С. 22–31.
10. *Wang L., Yuan F. G.* Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // Composites Science and Technology. 2007. Vol. 67. P. 1370–1384.
11. *Balasubramaniam K., Krishnamurthy C. V.* Ultrasonic guided wave energy behavior in laminated anisotropic plates // Journal of Sound and Vibration. 2006. Vol. 296. P. 968–978.
12. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
13. *Умов Н. А.* Избранные сочинения. М.: Гостехиздат, 1950. 554 с.

Ключевые слова: многослойные композиты, анизотропия, матрица Грина, поток энергии.

Статья поступила 3 июля 2009 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар