

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ДИЛАТАНСКОЙ ЗОНЫ В ПАКЕТЕ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СЛОЕВ¹

Ратнер С. В.², Сыромятников П. В.³

SIMULATION OF FORMATION AND DEVELOPMENT OF DILATANCY ZONES IN A PACKAGE OF ANISOTROPIC ELASTIC LAYERS

Ratner S. V., Syromyatnikov P. V.

In this paper we consider the problem of stress distribution in the layered elastic anisotropic medium (a package of layers) induced by internal static axisymmetric loads applied in limited areas of planes between layers. To determine the boundary dilatancy zone, we use the Schleicher-Nadai criterion of materials failure under the action of stresses. A series of numerical experiments is carried out for two isotropic materials.

Keywords: a dilatancy zone, layered medium, anisotropy, an internal source, the inverse Fourier transform.

При математическом моделировании геофизических структур часто рассматривается класс фундаментальных задач, которые включают изучение динамических процессов в сложно построенных анизотропных упругих средах, содержащих локальные неоднородности. В случае, когда неоднородное образование подвергается воздействию сосредоточенных или объемных сил, возникают процессы, связанные с развитием зон нелинейного разуплотнения (зон дилатансии), как очаговых, так и поверхностных. Поскольку с поверхностными зонами дилатансии естественно связывать зоны аномальных значений различных геофизических полей, то для исследования источников этих аномалий требуется возможно более надежно учитывать положение дилатансных зон.

В работах академика Бабешко В. А. показано, что зарождение и развитие зон дилатансии можно связывать с активизацией так называемых «вирусов вибропрочности» — множественных трещин или включений, которые, в конечном итоге, и формируют динамическую дилатансную структуру. На сегодня можно считать установленным,

что зарождение и развитие локальных структур дилатансного типа всегда имеют место на этапе подготовки и развития катастрофических процессов в сложно построенных анизотропных упругих средах.

В этой связи следует отметить работы академика Алексеева А. С. и его учеников, которые первыми разработали эту проблему в сейсмологии. Им удалось показать, что развитие зон дилатансии в геологической среде всегда происходит накануне крупного сейсмического события и порождает ряд характерных волновых предвестников в сейсмической, акустической и электромагнитной областях.

Однако в исследованиях академика Алексеева А. С. и его учеников при расчетах дилатансных зон использовалась одна из простейших математических моделей земной коры — однородное изотропно-упругое полупространство. Модель слоистой среды с произвольной анизотропией слоев позволяет гораздо лучше учесть при исследовании свойства реальной сложнопостроенной геологической среды.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-08-00447, 09-08-96522-р-юг, 09-08-00294, 09-08-00170, 08-01-99013-р_офи), программ П9 Президиума РАН и П16 ОНЗ РАН.

²Ратнер Светлана Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела проблем математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: lanarat@mail.ru.

³Сыромятников Павел Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: syromyatnikov@math.kubsu.ru.

1. Постановка задачи

Пусть среда представляет собой однородные анизотропные слои $\{-\infty \leq x, y \leq \infty; z^{(n+1)} \leq z \leq z^{(n)}; n = 1, 2, \dots, N\}$ ($z^{(1)} = 0; z^{(N+1)} = h$) с упругими тензорами $C_{mk}^{ij(n)}$ и плотностью $\rho^{(n)}$. (Здесь и далее верхний индекс в скобках соответствует номеру слоя). В дальнейшем также будут использоваться обозначения $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

Гармонические колебания среды возбуждаются внутренними механическими источниками $\mathbf{q}^{(n)}$, действующими в ограниченных областях $\Omega^{(n)}$ плоскостей раздела $z = z^{(n)}$, и описываются следующими уравнениями (общий множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен):

$$\frac{\partial \sigma_{jk}^{(n)}}{\partial x_k} + \rho^{(n)} \omega^2 u_j^{(n)} = 0, \quad (1.1)$$

$$i, j, k, m = 1, 2, 3; \quad n = \overline{1, N},$$

$$\sigma_{ji}^{(n)} = C_{kmji}^n \frac{\partial u_m^{(n)}}{\partial x_k}. \quad (1.2)$$

Здесь $\sigma^{(n)}$ — тензор напряжений, $\mathbf{u}^{(n)}$ — вектор перемещений, $\rho^{(n)}$ — плотность материала, ω — круговая частота. В плоскостях $z = z^{(n)}$, вне областей $\Omega^{(n)}$, напряжения и перемещения непрерывны

$$\sigma_{j3}^{(n)}(z^{(n)}) = \sigma_{j3}^{(n+1)}(z^{(n)}),$$

$$u_j^{(n)}(z^{(n)}) = u_j^{(n+1)}(z^{(n)}).$$

$$j = 1, 2, 3, \quad n = 2, 3, \dots, N.$$

Граничные условия в плоскости $z = z^{(1)} = 0$ имеют вид

$$\sigma_{j3}^{(1)} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

Для слоя на жестком основании механические смещения в основании слоя равны нулю:

$$u_1^{(N)} = u_2^{(N)} = u_3^{(N)} \Big|_{z=h} = 0. \quad (1.4)$$

Векторы нагрузок $\mathbf{q}^{(n)}$ описывают разрывы напряжений

$$q_j^{(n)} = q_j^{(n)}(x, y, z^{(n)}) = \sigma_{3j}^{(n)}(x, y, z^{(n)}) - \sigma_{3j}^{(n+1)}(x, y, z^{(n)}), \quad (1.5)$$

$$(x, y) \in \Omega^{(n)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n = 2, 3, \dots, N.$$

Данный вид внутренней нагрузки (1.5) соответствует модели жестких включений, рассматриваемой в работе [1].

В работах [1, 2] выражение вектора перемещений в слое $\mathbf{u}^{(n)}$ через векторы $\mathbf{q}^{(m)}$ в постановке (1.1)–(1.5) получено в виде интегралов Фурье. Там же подробно описан алгоритм вычисления расширенной (блочной) матрицы Грина $\mathbf{K} = \{\mathbf{K}^{(nm)}\}$, $n, m = 1, 2, \dots, N$, используемой в дальнейшем.

Обозначим через $\mathbf{U}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, z) = F_{x_1 x_2} [\mathbf{u}^{(n)}(x, y, z)]$ двукратное преобразование Фурье вектора перемещений $\mathbf{u}^{(n)}$ в слое с номером n . Символ вектора перемещений $\mathbf{U}^{(n)}$ выражается через расширенный вектор нагрузок $\mathbf{Q}^{(m)} = F_{x_1 x_2} [\mathbf{q}^{(m)}]$ размерности $3N$ следующим образом [1, 2]:

$$U_j^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^N K_{ji}^{(nm)}(\alpha_1, \alpha_2, z) Q_i^{(m)}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$z^{(n+1)} \leq z \leq z^{(n)},$$

$$n = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, 3.$$

Вектор $\mathbf{Q}^{(1)}$ описывает поверхностные нагрузки, векторы $\mathbf{Q}^{(2)}, \dots, \mathbf{Q}^{(N)}$ — внутренние нагрузки.

К области дилатансии относят множество точек упругой среды, для которых при известном поле напряжений $\{\sigma_{ij}\}$ выполнено следующее условие [3]:

$$D_\tau = \tau - \beta(P + \rho g z) - Y > 0, \quad (1.6)$$

где

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right]^{1/2},$$

$P = -\frac{1}{3}[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}]$ — гидростатическое давление, ρ — плотность, g — ускорение свободного падения, $h \leq z \leq 0$ — глубина точки, Y — сцепление породы (около $3 \cdot 10^6$ Па), β — коэффициент внутреннего трения (около 0,5). Следует отметить, что условие (1.6) совпадает с критерием Шлейхера-Надаи разрушения материала под действием нагрузок, эффективность использования которого

при исследовании начальной стадии процесса разрушения горных пород, подтверждена экспериментально [3].

Тензор напряжений σ_{ij} можно выразить через перемещения u_j

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = C_{nm}^{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} = & C_{11}^{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{12}^{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \\ & + C_{13}^{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + C_{21}^{ij} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + C_{22}^{ij} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + C_{23}^{ij} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \\ & + C_{31}^{ij} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + C_{32}^{ij} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + C_{33}^{ij} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (1.7) \end{aligned}$$

Применяя двукратное преобразование Фурье $F_{x_1 x_2}$ к формулам (1.7), получаем представление тензора напряжений σ_{ij} в образах Фурье

$$\begin{aligned} \Sigma_{nm} = F_{x_1 x_2} [\sigma_{nm}] = \\ = -i(\alpha_1 C_{11}^{nm} + \alpha_2 C_{12}^{nm}) U_1 + C_{13}^{nm} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \\ - i(\alpha_1 C_{21}^{nm} + \alpha_2 C_{22}^{nm}) U_2 + C_{23}^{nm} \frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \\ - i(\alpha_1 C_{31}^{nm} + \alpha_2 C_{32}^{nm}) U_3 + C_{33}^{nm} \frac{\partial U_3}{\partial x_3}. \quad (1.8) \end{aligned}$$

С учетом представления $\mathbf{U}^{(n)}$ данное выражение для слоя с номером p можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_{nm}^{(p)} = \sum_{i=1}^3 \left(A_{nm,i}^{(p)} U_i^{(p)} + B_{nm,i}^{(p)} U_i'^{(p)} \right) = \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^N \left(A_{nm,i}^{(p)} K_{ij}^{(pl)} + \right. \\ \left. + B_{nm,i}^{(p)} K_{ij}'^{(pl)} \right) Q_j^{(l)}. \quad (1.9) \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{K}^{(pl)}$, $\mathbf{K}'^{(pl)}$ — соответствующие блоки расширенной матрицы Грина $\mathbf{K}$ и ее производной $\mathbf{K}'$ по z для многослойной среды, содержащей внутренние неоднородности [1, 2].

Векторы $\mathbf{A}_{nm}$, $\mathbf{B}_{nm}$ в (1.9) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{nm} = -i \begin{pmatrix} (\alpha_1 C_{11}^{nm} + \alpha_2 C_{12}^{nm}) \\ (\alpha_1 C_{21}^{nm} + \alpha_2 C_{22}^{nm}) \\ (\alpha_1 C_{31}^{nm} + \alpha_2 C_{32}^{nm}) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_{nm} = \begin{pmatrix} C_{13}^{nm} \\ C_{23}^{nm} \\ C_{33}^{nm} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Введем следующие величины

$$I_{np} = \alpha_p \sum_{m=1}^3 K_{nm} Q_m, \quad (1.10)$$

$$n = 1, 2, 3, \quad p = 1, 2,$$

$$J_n = \sum_{m=1}^3 K_{nm}' Q_m.$$

Тогда выражение для Σ_{nm} (1.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_{nm} = -i \{ C_{11}^{nm} I_{11} + C_{12}^{nm} I_{12} + C_{21}^{nm} I_{21} + \\ + C_{22}^{nm} I_{22} + C_{31}^{nm} I_{31} + C_{32}^{nm} I_{32} \} + \\ + C_{13}^{nm} J_1 + C_{23}^{nm} J_2 + C_{33}^{nm} J_3 = \\ = -i \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^2 C_{kp}^{nm} I_{kp} + \sum_{l=1}^3 C_{l3}^{nm} J_l. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Рассмотрим обратное преобразование Фурье от Σ_{nm}

$$\begin{aligned} \sigma_{nm}(x, y, z) = F_{\alpha_1 \alpha_2}^{-1} [\Sigma_{nm}(\alpha_1, \alpha_2, z)] = \\ = -i \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^2 C_{kp}^{nm} i_{kp} + \sum_{l=1}^3 C_{l3}^{nm} j_l, \quad (1.12) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} i_{np} = F_{\alpha_1 \alpha_2}^{-1} [I_{np}] = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_p \sum_{m=1}^3 K_{nm} Q_m \times \\ \times \exp(-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_n = F_{\alpha_1 \alpha_2}^{-1} [J_n] = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^3 K_{nm}' Q_m \times \\ \times \exp(-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)) d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned}$$

В изотропном случае, с учетом симметрии тензора C_{nm}^{ij} , получаем

$$C_{11}^{11} = C_{22}^{22} = C_{33}^{33} = \lambda + 2\mu,$$

$$C_{11}^{22} = C_{33}^{11} = C_{33}^{22} = \lambda, \quad C_{13}^{13} = C_{23}^{23} = C_{12}^{12} = \mu.$$

Здесь λ, μ — коэффициенты Ляме. Элементы Σ_{nm} (1.11) приобретают в изотропном случае более простой вид

$$\Sigma_{11} = -i(\lambda + 2\mu) I_{11},$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{12} &= \Sigma_{21} = -i\mu(I_{12} + I_{21}), \\ \Sigma_{13} &= \Sigma_{31} = -i\mu(I_{31} + J_1), \\ \Sigma_{22} &= -i(\lambda I_{11} + (\lambda + 2\mu)I_{22}), \\ \Sigma_{23} &= \Sigma_{32} = -i\mu(I_{32} + J_2), \\ \Sigma_{33} &= -i\lambda(I_{11} + I_{22}) + (\lambda + 2\mu)J_3.\end{aligned}$$

Однако, как и в общем анизотропном случае, в изотропном случае необходимо вычислять все девять величин (1.13).

В формулах (1.13) перейдем к полярным координатам

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha \cos \gamma, \quad \alpha_2 = \alpha \sin \gamma, \\ \alpha &= \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \gamma = \arctg \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \\ x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}\end{aligned}$$

и запишем интегралы (1.13) в виде

$$i_{n1} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^3 K_{nm}(\alpha, \gamma, z) Q_m(\alpha, \gamma) \times \\ \times \alpha^2 \cos \gamma \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) d\gamma d\alpha, \quad (1.14)$$

$$i_{n2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^3 K_{nm}(\alpha, \gamma, z) Q_m(\alpha, \gamma) \times \\ \times \alpha^2 \sin \gamma \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) d\gamma d\alpha,$$

$$j_n = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^3 K'_{nm}(\alpha, \gamma, z) Q_m(\alpha, \gamma) \times \\ \times \alpha \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) d\gamma d\alpha.$$

Выбор функции нагрузки $\mathbf{q}(x, y)$ достаточно произволен, однако для сходимости интегралов (1.14) требуется определенная скорость убывания символа Фурье нагрузки $\mathbf{Q}(\alpha, \gamma)$ на бесконечности при $\alpha \rightarrow +\infty$. В качестве внутренних нагрузок рассматривались следующие осесимметричные функции [4]

$$q(r) = \begin{cases} A \frac{m+1}{\pi} (1-r^2)^m, & r < 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases} \quad (1.15)$$

$$A = \text{const.}$$

Константа A определяет амплитуду величины $q(r)$. В образах Фурье функции $q(r)$ (1.15) соответствует функция $Q(\alpha) = F_{x_1 x_2} [q(r)]$

$$Q(\alpha) = A 2^{m+1} (m+1)! \frac{J_{m+1}(\alpha)}{\alpha^{m+1}}.$$

В данном случае принимаем, что $m \geq 2$, т.к. такой вид нагрузки обеспечивает быструю сходимость интегралов (1.14) для рассматриваемых внутренних источников. Для $m = 2$ получаем

$$Q(\alpha) = 48A \frac{J_3(\alpha)}{\alpha^3}. \quad (1.16)$$

2. Численные результаты

В статическом случае, для которого величина D_τ (1.6) имеет смысл, у блочных матриц $\mathbf{K}^{(nm)}$ отсутствуют вещественные особенности, поэтому осциллирующие интегралы (1.14) можно считать непосредственно по вещественным контурам Γ . Вид функции (1.16) обеспечивает быструю вычислительную сходимость интегралов (1.14). Интегралы (1.14) вычислялись с помощью программ вычисления осциллирующих интегралов пакета NAG [5].

Переход от интегралов в декартовых координатах (1.13) к интегралам в полярных координатах (1.14) связан только со спецификой программ вычисления интегралов. Симметрия источника $\mathbf{q}(r)$ упрощает расчеты и не является принципиальным при данном подходе требованием. В общем анизотропном случае вычисления интегралов (1.14) требуют огромных временных затрат, поэтому рассмотрение было ограничено изотропными средами.

Для статического случая ($\omega = 0$) тензор σ_{nm} (1.12) является вещественной величиной, и тогда достаточно вычислять мнимую часть $\text{Im } I_{nm}$ ($\text{Re } I_{nm} = 0$) и действительную часть $\text{Re } J_n$ ($\text{Im } J_n = 0$). Для вычисления всех элементов тензора напряжений σ_{nm} необходимо рассчитывать девять интегралов i_{nm}, j_n (1.14).

Величина D_τ (1.6) вычислялась в прямоугольнике $-a \leq x \leq a, -h \leq z \leq 0$.

В расчетах рассматривались два варианта изотропного слоя на жестком основании.

Вариант 1. Песчаник (характерный) с параметрами Ляме $\lambda = 1,917 \times 10^{10}$ Н/м²,

$\mu = 1,569 \times 10^{10}$ Н/м² (коэффициент Пуассона $\nu = 0,275$, модуль Юнга $E = 4 \cdot 10^{11}$ дин/см²) и плотностью $\rho = 2,2 \times 10^3$ кг/м³ [6].

Вариант 2. Известняк (характерный) с параметрами Ляме $\lambda = 2,516 \times 10^{10}$ Н/м², $\mu = 2,059 \times 10^{10}$ Н/м² (коэффициент Пуассона $\nu = 0,275$, модуль Юнга $E = 5,25 \cdot 10^{11}$ дин/см²) и плотностью $\rho = 2,5 \times 10^3$ кг/м³ [6].

В модельных расчетах толщина слоя полагалась $h = 10$ км, радиус круговой неоднородности, расположенной параллельно поверхности слоя на глубине $z = z^{(2)}$, полагался $r = 1$ км. Центр источника нагрузок $\mathbf{q}^{(n)}$ находится на оси OZ .

Рассматривались одиночные нагрузки, лежащие на глубинах $z^{(2)} = -0,5; -0,75; -1,0$ км, и парные нагрузки, расположенные одна под другой на глубинах $z^{(2)} = -0,5; z^{(3)} = -1,0$ км соответственно.

Кроме того, рассматривались два варианта скачков напряжений на берегах неоднородностей — распорные, соответствующие скачку $\sigma_{33} \leftrightarrow q = q_3^{(n)}$, и сдвиговые, соответствующие скачку $\sigma_{31} \leftrightarrow q = q_1^{(n)}$. Вариант сдвиговых нагрузок, соответствующих $\sigma_{32} \leftrightarrow q = q_2^{(n)}$ не рассматривался, поскольку он получается из предыдущего поворотом на $\pi/2$.

Заметим, что для случая, когда нагрузка $q = q_3^{(n)}$ симметрична, как в случае (1.15), картина D_τ (1.6) не зависит от ориентации плоскости сечения, проходящей через ось OZ . Для случая же с $q = q_1^{(n)}$ (1.15) вид D_τ будет зависеть от того, как плоскость сечения ориентирована относительно прямой OX .

В формулах интегралов (1.14) для различных конфигураций нагрузок используются соответствующие блоки $\mathbf{K}^{(nm)}$ [1, 2].

В случае одиночной нагрузки в слое, находящейся на глубине $h \leq z^{(2)} \leq 0$, матрица $\mathbf{K}$ имеет следующий вид

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{(11)} & \mathbf{K}^{(12)} \\ \mathbf{K}^{(21)} & \mathbf{K}^{(22)} \end{pmatrix}.$$

Напряжения $\Sigma^{(n)}$ (1.9) в слое, вызываемые вектором нагрузок $\mathbf{Q}^{(2)}$, действующим на глубине $z^{(2)}$, описываются блоками $\mathbf{K}^{(12)}$, $\mathbf{K}^{(22)}$

$$\Sigma^{(1)} \leftrightarrow \mathbf{K}^{(12)} \mathbf{Q}^{(2)}, \mathbf{K}^{(22)} \mathbf{Q}^{(2)}, \quad z^{(2)} \leq z \leq 0,$$

$$\Sigma^{(2)} \leftrightarrow \mathbf{K}^{(22)} \mathbf{Q}^{(2)}, \mathbf{K}'^{(22)} \mathbf{Q}^{(2)}, \quad h \leq z \leq z^{(2)}.$$

Для случая двух нагрузок, расположенных на высотах $h \leq z^{(3)} \leq z^{(2)} \leq 0$, соответственно имеем

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{(11)} & \mathbf{K}^{(12)} & \mathbf{K}^{(13)} \\ \mathbf{K}^{(21)} & \mathbf{K}^{(22)} & \mathbf{K}^{(23)} \\ \mathbf{K}^{(31)} & \mathbf{K}^{(32)} & \mathbf{K}^{(33)} \end{pmatrix}.$$

Когда нагрузки, расположенные на глубинах $z^{(2)}, z^{(3)}$, описываются одинаковыми функциями $\mathbf{Q}^{(2)} = \mathbf{Q}^{(3)} = \mathbf{Q}$, в формуле (1.9) получается сумма блочных матриц

$$\Sigma^{(1)} \leftrightarrow (\mathbf{K}^{(12)} + \mathbf{K}^{(13)}) \mathbf{Q}, (\mathbf{K}'^{(12)} + \mathbf{K}'^{(13)}) \mathbf{Q}, \\ z^{(2)} \leq z \leq 0,$$

$$\Sigma^{(2)} \leftrightarrow (\mathbf{K}^{(22)} + \mathbf{K}^{(23)}) \mathbf{Q}, (\mathbf{K}'^{(22)} + \mathbf{K}'^{(23)}) \mathbf{Q}, \\ z^{(3)} \leq z \leq z^{(2)},$$

$$\Sigma^{(3)} \leftrightarrow (\mathbf{K}^{(32)} + \mathbf{K}^{(33)}) \mathbf{Q}, (\mathbf{K}'^{(32)} + \mathbf{K}'^{(33)}) \mathbf{Q}, \\ h \leq z \leq z^{(3)}.$$

На рис. 1 представлены результаты расчетов величины D_τ (1.6) для случая одиночных нагрузок в слое известняка (левая колонка) и песчаника (правая колонка) при $Q = Q_3^{(2)}$. Нагрузки расположены на различных глубинах $z^{(2)} = -0,5; -0,75; -1,0$. Функция $Q_3^{(2)}$ имеет вид (1.16). Величина $A = 4 \times 10^7$ Н/м² в (1.15) определяет амплитуду скачка напряжений $q(r)$. Как видно из этих рисунков, картины распределения $D_\tau(x, z)$ для песчаника и известняка различаются очень незначительно. Характерным является выход D_τ на поверхность слоя (при $z^{(2)} = -0,5$, первая строка рис. 1), нахождение основного максимума D_τ в диапазоне $-r/2 \leq x \leq r/2$, наличие вторых по величине максимумов в диапазонах $r/2 \leq |x| \leq r$, растянутость и прерывистость областей D_τ по координате X в плоскости расположения нагрузки $z = z^{(2)}$. При увеличении глубины расположения нагрузки (вторая и третья строки рис. 1, при $h \leq z^{(2)} \leq -0,7$) картина D_τ изменяется мало, происходит некоторое несимметричное удлинение областей D_τ в сторону основания слоя.

На рис. 2 изображены области $D_\tau(x, z)$ (1.6) для одинаковых парных нагрузок, расположенных одна под другой на глубинах $z^{(2)} = -0,5, z^{(3)} = -1,0$ км в слое известняка (левая колонка) и песчаника (правая колонка). Первая строка рис. 2 соответствует

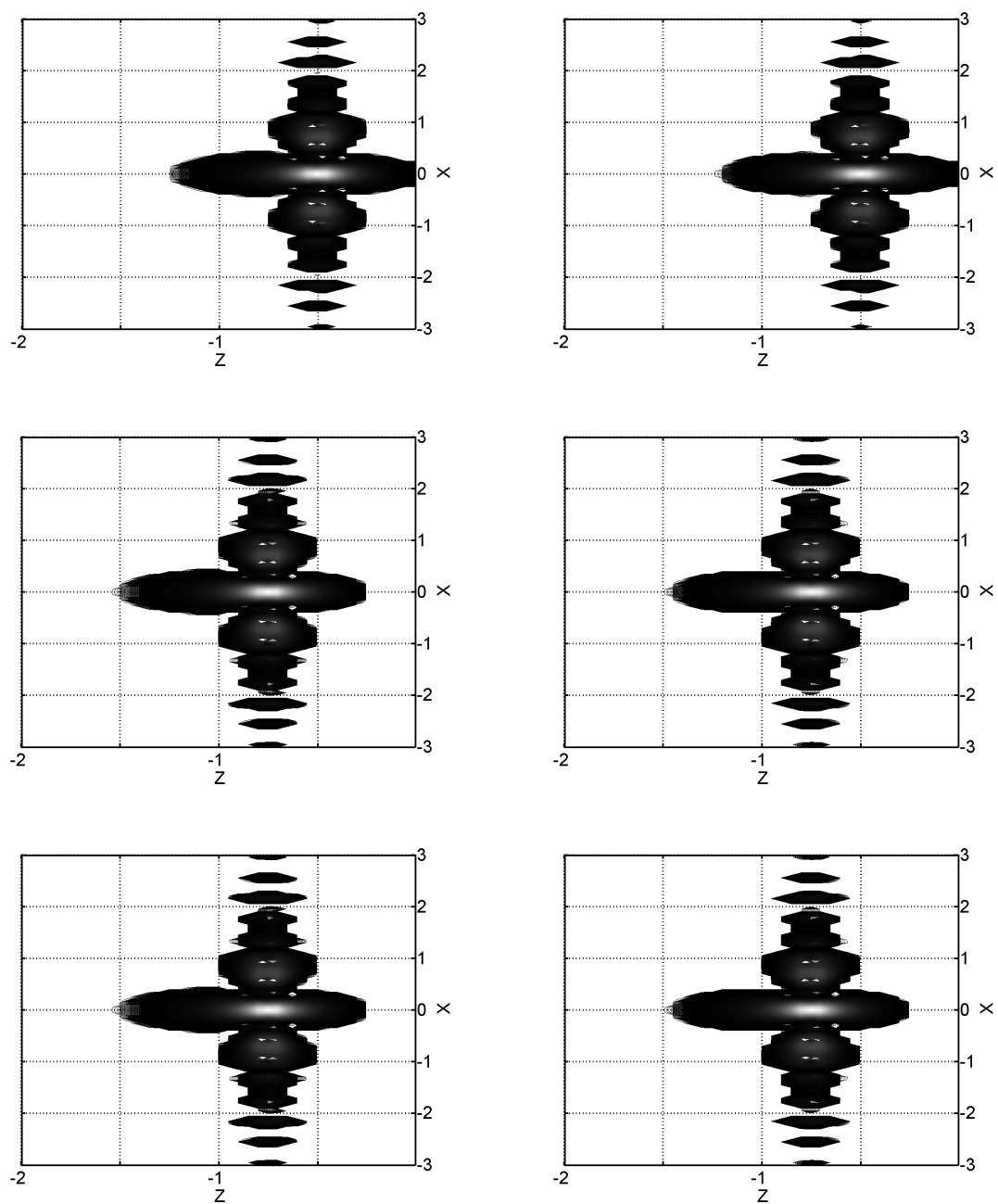


Рис. 1

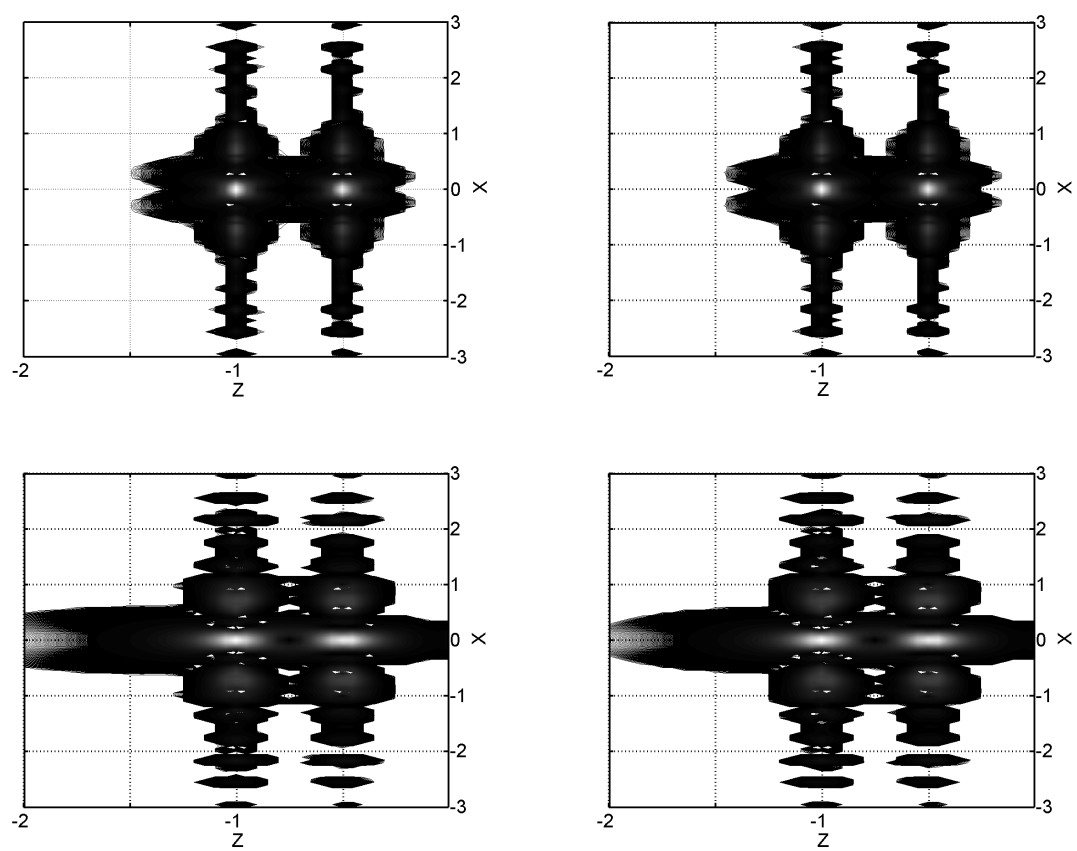


Рис. 2

нагрузке сдвига $Q = Q_1^{(2)} = Q_1^{(3)}$, вторая — распорной нагрузке $Q = Q_3^{(2)} = Q_3^{(3)}$. В первом случае наблюдаются более вытянутые по оси OX зоны $D_\tau(x, z)$ без выхода на поверхность, во втором случае зоны D_τ выходят и на поверхность слоя и проникают значительно глубже, чем в случае соответствующих одиночных нагрузок.

Различия между рассматриваемыми вариантами песчаника и известняка и в случае парных нагрузок также очень незначительны, что можно объяснить близостью их упругих свойств.

Литература

1. Бабешко В. А., Ратнер С. В., Сыромятников П. В. О смешанных задачах для термозлек-

- тродупругих сред с разрывными граничными условиями // ДАН. 2007. Т. 412. № 6. С. 1–6.
2. Бабешко В. А., Ратнер С. В., Сыромятников П. В. Анизотропные тела с неоднородностями; случай совокупности трещин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 5. С. 49–59.
3. Активная сейсмология с мощными вибрационными источниками / Отв. ред. Г. М. Цыбульчик. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, филиал «Гео» издательства СО РАН, 2004. 387 с.
4. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
5. The Numerical Algorithms Group Ltd, Oxford UK. 2001. The NAG Fortran Library, Mark 20.
6. Кобранова В. Н. Физические свойства горных пород. М.: Гостоптехиздат, 1962. 490 с.

Ключевые слова: Дилатансная зона, слоистая среда, анизотропия, внутренний источник, обратное преобразование Фурье.

Статья поступила 21 сентября 2009 г.
Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Ратнер С. В., Сыромятников П. В., 2009