

УДК 539.3

О ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ¹

*Евдокимова О. В.², Зарецкая М. В.³, Павлова А. В.⁴, Бабешко О. М.⁵,
Лозовой В. В.⁶, Бабешко В. А.⁷, Федоренко А. Г.⁸*

ABOUT SEMI-BOUNDED BLOCK ELEMENTS

Evdokimova O. V., Zaretskaya M. V., Pavlova A. V., Babeshko O. M., Lozovoi V. V., Babeshko V. A.,
Fedorenko A. G.

The method of building of the semi-bounded block elements is discussed. Using the factorization methods the representation of the semi-bounded block element pseudodifferential equations and general presentation of the solution of the anisotropic boundary problem is adduced.

Keywords: block element, boundary problem, anisotropic equation, semi-bounded element.

Развитый в работах [1–3] метод блочно-го элемента позволяет исследовать широкий круг задач, при изучении которых метод конечного элемента неэффективен. К числу таких относятся граничные задачи в полуограниченных областях или в областях с границами, уходящими на бесконечность. В указанных выше работах строятся и изучаются блочные элементы для ограниченных носителей. В задачах сейсмологии, экологии, когда исследование ведется в неограниченных областях, необходим блочный элемент с аналогичным неограниченным носителем.

Ниже приводится пример построения трехмерного полуограниченного блочного элемента.

1. Блочный элемент строится по определенному алгоритму, изложенному в [4–6]. Ниже построен полуограниченный блочный элемент, занимающий в исходной системе координат область Ω : $-\infty \leq x_1 \leq 0$, $-c \leq x_2 \leq c$, $-b \leq x_3 \leq b$.

Блочный элемент построен для следующей трехмерной краевой задачи в области Ω с границей $\partial\Omega$ для дифференциального урав-

¹Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (09-08-00170, 08-08-00468, 09-08-00171, 08-08-00669), программы Юг России (08-01-99012, 08-01-99013, 08-01-99016, 08-08-99090, 08-08-99091, 09-01-96500, 09-01-96503, 09-08-96522, 09-08-96527, 09-08-00294), грантов Президента (МД-1554.2009.1, НШ-2298.2008.1, 02.515.11.0005), программ отделения ЭМПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

²Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

³Зарецкая Марина Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: zarmv@mail.ru.

⁴Павлова Алла Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

⁵Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

⁶Лозовой Виктор Викторович, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

⁷Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

⁸Федоренко Алексей Григорьевич, научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

нения с постоянными коэффициентами вида

$$[A_{11}\partial^2x_1 + A_{22}\partial^2x_2 + A_{33}\partial^2x_3 + A] \times \\ \times \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

с некоторыми граничными условиями, например, Дирихле или Неймана. Его построение осуществляется с помощью алгоритма, детали которого изложены в работах [4–6], путем построения векторов внешних форм и выполнения факторизации. Ниже приводятся определяющие уравнения полуограниченного блочного элемента в характерных локальных системах координат x^1, x^3, x^4, x^5 .

Функциональные уравнения краевой задачи для такого блочного элемента приобретают вид

$$\begin{aligned} K_1\Phi_1 = & \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} - i\alpha_3^1\varphi_1) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\ & + \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} + i\alpha_3^1\varphi_3) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^1x_1^3 + \alpha_2^1x_2^3 - \alpha_3^1 2b] dx_1^3 dx_2^3 - \\ & - \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_1^1\varphi_4) \times \\ & \times \exp i [\alpha_2^1x_2^4 - \alpha_3^1(x_1^4 + b)] dx_1^4 dx_2^4 + \\ & + \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^1\varphi_5) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^1x_1^5 - \alpha_2^1c + \alpha_3^1(x_2^5 - b)] dx_1^5 dx_2^5 + \\ & + \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^1\varphi_6) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^1x_1^6 + \alpha_2^1c + \alpha_3^1(x_2^6 - b)] dx_1^6 dx_2^6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3\Phi_3 = & \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} - i\alpha_3^3\varphi_3) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^3\eta_1^3 + \alpha_2^3\eta_2^3] d\eta_1^3 d\eta_2^3 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-b}^b \int_{-c}^c A_{11} (\varphi'_{43} + i\alpha_1^3\varphi_4) \times \\ & \times \exp i [\alpha_2^3x_2^4 + \alpha_3^3(x_1^4 - b)] dx_1^4 dx_2^4 + \\ & + \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} + i\alpha_3^3\varphi_1) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^3x_1^1 + \alpha_2^3x_2^1 - \alpha_3^3 2b] dx_1^1 dx_2^1 - \\ & - \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^3\varphi_5) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^3x_1^5 - \alpha_2^3c - \alpha_3^3(x_2^5 + b)] dx_1^5 dx_2^5 - \\ & - \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^3\varphi_6) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^3x_1^6 + \alpha_2^3c - \alpha_3^3(x_2^6 + b)] dx_1^6 dx_2^6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_4\Phi_4 = & \int_{-b}^b \int_{-c}^c A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_3^4\varphi_4) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^4\eta_1^4 + \alpha_2^4\eta_2^4] d\eta_1^4 d\eta_2^4 - \\ & - \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} + i\alpha_1^4\varphi_1) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^4b + \alpha_2^4x_2^1 + \alpha_3^4x_1^1] dx_1^1 dx_2^1 - \\ & - \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} - i\alpha_1^4\varphi_3) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^4b + \alpha_2^4x_2^3 - \alpha_3^4x_1^3] dx_1^3 dx_2^3 + \\ & + \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^4\varphi_5) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^4x_2^5 - \alpha_2^4c + \alpha_3^4x_1^5] dx_1^5 dx_2^5 + \\ & + \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^4\varphi_6) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^4x_2^6 + \alpha_2^4c - \alpha_3^4x_1^6] dx_1^6 dx_2^6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_5\Phi_5 = & \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} - i\alpha_3^5\varphi_5) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^5\eta_1^5 + \alpha_2^5\eta_2^5] d\eta_1^5 d\eta_2^5 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} - i\alpha_2^5 \varphi_1) \times \\
 & \times \exp i [\alpha_1^5 x_1^1 + \alpha_2^5 b - \alpha_3^5 (x_2^1 + c)] dx_1^1 dx_2^1 + \\
 & + \int_{-b}^b \int_{-c}^c A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_1^5 \varphi_4) \times \\
 & \times \exp i [-\alpha_2^5 x_1^4 - \alpha_3^5 (x_2^4 + c)] dx_1^4 dx_2^4 - \\
 & - \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} + i\alpha_2^5 \varphi_3) \times \\
 & \times \exp i [-\alpha_1^5 x_1^3 - \alpha_2^5 b - \alpha_3^5 (x_2^3 + c)] dx_1^3 dx_2^3 + \\
 & + \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} + i\alpha_3^5 \varphi_6) \times \\
 & \times \exp i [-\alpha_1^5 x_1^6 + \alpha_2^5 x_2^6 - \alpha_3^5 2c] dx_1^6 dx_2^6.
 \end{aligned}$$

Здесь во всех двойных интегралах принимается тот порядок интегрирования, в котором следуют дифференциалы.

Как и в [2], введем операторы преобразования Фурье

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k) \varphi &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi(x_1^k, x_2^k) \times \\
 & \times \exp i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k) dx_1^k dx_2^k,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k) \Phi &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(\alpha_1^k, \alpha_2^k) \times \\
 & \times \exp \left[-i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k) \right] d\alpha_1^k d\alpha_2^k;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k) \varphi &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi(x_1^k, x_2^k, x_3^k) \times \\
 & \times \exp i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k + \alpha_3^k x_3^k) dx_1^k dx_2^k dx_3^k,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k, x_3^k) \Phi &= \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k) \times \\
 & \times \exp \left[-i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k + \alpha_3^k x_3^k) \right] \times \\
 & \times d\alpha_1^k d\alpha_2^k d\alpha_3^k,
 \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots, 6.$$

Псевдодифференциальные уравнения представляются

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1) \left\{ \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} - i\alpha_{3-}^1 \varphi_1) \times \right. \\
 \times \exp i [\alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\
 + \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} + i\alpha_{3-}^1 \varphi_3) \times \\
 \times \exp i [-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_{3-}^1 2b] dx_1^3 dx_2^3 - \\
 - \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_1^1 \varphi_4) \times \\
 \times \exp i [\alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_{3-}^1 (x_1^4 + b)] dx_1^4 dx_2^4 + \\
 + \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^1 \varphi_5) \times \\
 \times \exp i [\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_{3-}^1 (x_2^5 - b)] dx_1^5 dx_2^5 + \\
 + \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^1 \varphi_6) \times \\
 \left. \times \exp i [-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_{3-}^1 (x_2^6 - b)] dx_1^6 dx_2^6 \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

$$-\infty \leq x_1^1 \leq 0, \quad |x_2^1| \leq c,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{-1}(x_1^3, x_2^3) \left\{ \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} - i\alpha_{3-}^3 \varphi_3) \times \right. \\
 \times \exp i [\alpha_1^3 \eta_1^3 + \alpha_2^3 \eta_2^3] d\eta_1^3 d\eta_2^3 - \\
 - \int_{-b}^b \int_{-c}^c A_{11} (\varphi'_{43} + i\alpha_1^3 \varphi_4) \times \\
 \times \exp i [\alpha_2^3 x_2^4 + \alpha_{3-}^3 (x_1^4 - b)] dx_1^4 dx_2^4 + \\
 + \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} + i\alpha_{3-}^3 \varphi_1) \times \\
 \times \exp i [-\alpha_1^3 x_1^1 + \alpha_2^3 x_2^1 - \alpha_{3-}^3 2b] dx_1^1 dx_2^1 - \\
 - \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^3 \varphi_5) \times \\
 \left. \times \exp i [-\alpha_1^3 x_1^5 - \alpha_2^3 c - \alpha_{3-}^3 (x_2^5 + b)] dx_1^5 dx_2^5 - \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. - \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^3 \varphi_6) \times \right. \\ \left. \times \exp i [\alpha_1^3 x_1^6 + \alpha_2^3 c - \alpha_{3-}^3 (x_2^6 + b)] dx_1^6 dx_2^6 \right\} = 0,$$

$$0 \leq x_1^3 \leq \infty, \quad |x_2^3| \leq c;$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^4, x_2^4) \left\{ \int_{-b}^b \int_{-c}^c A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_{3-}^4 \varphi_4) \times \right. \\ \times \exp i [\alpha_1^4 \eta_1^4 + \alpha_2^4 \eta_2^4] d\eta_1^4 d\eta_2^4 - \\ - \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} + i\alpha_1^4 \varphi_1) \times \\ \times \exp i [-\alpha_1^4 b + \alpha_2^4 x_2^1 + \alpha_{3-}^4 x_1^1] dx_1^1 dx_2^1 - \\ - \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} - i\alpha_1^4 \varphi_3) \times \\ \times \exp i [\alpha_1^4 b + \alpha_2^4 x_2^3 - \alpha_{3-}^4 x_1^3] dx_1^3 dx_2^3 + \\ + \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^4 \varphi_5) \times \\ \times \exp i [-\alpha_1^4 x_2^5 - \alpha_2^4 c + \alpha_{3-}^4 x_1^5] dx_1^5 dx_2^5 + \\ + \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^4 \varphi_6) \times \\ \times \exp i [-\alpha_1^4 x_2^6 + \alpha_2^4 c - \alpha_{3-}^4 x_1^6] \times \\ \left. \times dx_1^6 dx_2^6 \right\} = 0,$$

$$|x_1^4| \leq b, \quad |x_2^4| \leq c;$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^5, x_2^5) \left\{ \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} - i\alpha_{3-}^5 \varphi_5) \times \right. \\ \times \exp i [\alpha_1^5 \eta_1^5 + \alpha_2^5 \eta_2^5] d\eta_1^5 d\eta_2^5 - \\ - \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} - i\alpha_2^5 \varphi_1) \times \\ \times \exp i [\alpha_1^5 x_1^1 + \alpha_2^5 b - \alpha_{3-}^5 (x_2^1 + c)] dx_1^1 dx_2^1 +$$

$$\left. + \int_{-b}^b \int_{-c}^c A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_1^5 \varphi_4) \times \right. \\ \times \exp i [-\alpha_2^5 x_1^4 - \alpha_{3-}^5 (x_2^4 + c)] dx_1^4 dx_2^4 - \\ - \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} + i\alpha_2^5 \varphi_3) \times \\ \times \exp i [-\alpha_1^5 x_1^3 - \alpha_2^5 b - \alpha_{3-}^5 (x_2^3 + c)] dx_1^3 dx_2^3 + \\ + \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} + i\alpha_{3-}^5 \varphi_6) \times \\ \left. \times \exp i [-\alpha_1^5 x_1^6 + \alpha_2^5 x_2^6 - \alpha_{3-}^5 2c] dx_1^6 dx_2^6 \right\} = 0,$$

$$-\infty \leq x_1^5 \leq 0, \quad |x_2^5| \leq b.$$

Характеристические уравнения в локальных системах координат имеют вид

$$K_1(\alpha_1^m, \alpha_2^m, \alpha_3^m) = \\ = A_{11}(\alpha_1^m)^2 + A_{22}(\alpha_2^m)^2 + A_{33}(\alpha_3^m)^2 - A, \\ m = 1, 3;$$

$$K_2(\alpha_1^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n) = \\ = A_{33}(\alpha_1^n)^2 + A_{22}(\alpha_2^n)^2 + A_{11}(\alpha_3^n)^2 - A, \\ n = 4;$$

$$K_3(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \alpha_3^p) = \\ = A_{11}(\alpha_1^p)^2 + A_{33}(\alpha_2^p)^2 + A_{22}(\alpha_3^p)^2 - A, \\ p = 5, 6.$$

Корневые множества описываются соотношениями

$$\alpha_{3-}^m(\alpha_1^m, \alpha_2^m) = \\ = -i\sqrt{A_{33}^{-1} [A_{11}(\alpha_1^m)^2 + A_{22}(\alpha_2^m)^2 - A]}, \\ m = 1, 3,$$

$$\alpha_{3-}^n(\alpha_1^n, \alpha_2^n) = \\ = -i\sqrt{A_{11}^{-1} [A_{33}(\alpha_1^n)^2 + A_{22}(\alpha_2^n)^2 - A]}, \\ n = 4,$$

$$\alpha_{3-}^p(\alpha_1^p, \alpha_2^p) = \\ = -i\sqrt{A_{22}^{-1} [A_{11}(\alpha_1^p)^2 + A_{33}(\alpha_2^p)^2 - A]}, \\ p = 5, 6.$$

Здесь выбираются ветви аналитических функций, обеспечивающие принадлежность корней нижней полуплоскости при достаточно больших по модулю вещественных параметрах преобразований Фурье.

Найдем представления решения в каждой из введенных локальных координат, т. е. представление блочного элемента. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) &= \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \mathbf{K}_1^{-1} \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} - i\alpha_3^1 \varphi_1) \times \right. \\ &\times \exp i [\alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\ &+ \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} + i\alpha_3^1 \varphi_3) \times \\ &\times \exp i [-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b] dx_1^3 dx_2^3 - \\ &- \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_1^1 \varphi_4) \times \\ &\times \exp i [\alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1 (x_1^4 + b)] dx_1^4 dx_2^4 + \\ &+ \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^1 \varphi_5) \times \\ &\times \exp i [\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^5 - b)] dx_1^5 dx_2^5 + \\ &+ \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^1 \varphi_6) \times \\ &\times \exp i [-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^6 - b)] dx_1^6 dx_2^6 \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x_1^3, x_2^3, x_3^3) &= \\ &= \mathbf{F}^{-1}(x_1^3, x_2^3, x_3^3) \mathbf{K}_1^{-1} \left\{ \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} - i\alpha_3^3 \varphi_3) \times \right. \\ &\times \exp i [\alpha_1^3 \eta_1^3 + \alpha_2^3 \eta_2^3] d\eta_1^3 d\eta_2^3 - \\ &- \int_{-b}^b \int_{-c}^c A_{11} (\varphi'_{43} + i\alpha_1^3 \varphi_4) \times \\ &\times \exp i [\alpha_2^3 x_2^4 + \alpha_3^3 (x_1^4 - b)] dx_1^4 dx_2^4 + \\ &+ \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} + i\alpha_3^3 \varphi_1) \times \\ &\times \exp i [-\alpha_1^3 x_1^1 + \alpha_2^3 x_2^1 - \alpha_3^3 2b] dx_1^1 dx_2^1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^3 \varphi_5) \times \\ &\times \exp i [-\alpha_1^3 x_1^5 - \alpha_2^3 c - \alpha_3^3 (x_2^5 + b)] dx_1^5 dx_2^5 - \\ &- \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^3 \varphi_6) \times \\ &\times \exp i [\alpha_1^3 x_1^6 + \alpha_2^3 c - \alpha_3^3 (x_2^6 + b)] \times \\ &\times dx_1^6 dx_2^6 \Big\}, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4(x_1^4, x_2^4, x_3^4) &= \mathbf{F}^{-1}(x_1^4, x_2^4, x_3^4) \mathbf{K}_2^{-1} \times \\ &\times \left\{ \int_{-b}^b \int_{-c}^c A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_3^4 \varphi_4) \times \right. \\ &\times \exp i [\alpha_1^4 \eta_1^4 + \alpha_2^4 \eta_2^4] d\eta_1^4 d\eta_2^4 - \\ &- \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} + i\alpha_1^4 \varphi_1) \times \\ &\times \exp i [-\alpha_1^4 b + \alpha_2^4 x_2^1 + \alpha_3^4 x_1^1] dx_1^1 dx_2^1 - \\ &- \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} - i\alpha_1^4 \varphi_3) \times \\ &\times \exp i [\alpha_1^4 b + \alpha_2^4 x_2^3 - \alpha_3^4 x_1^3] dx_1^3 dx_2^3 + \\ &+ \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^4 \varphi_5) \times \\ &\times \exp i [-\alpha_1^4 x_2^5 - \alpha_2^4 c + \alpha_3^4 x_1^5] dx_1^5 dx_2^5 + \\ &+ \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^4 \varphi_6) \times \\ &\times \exp i [-\alpha_1^4 x_2^6 + \alpha_2^4 c - \alpha_3^4 x_1^6] dx_1^6 dx_2^6 \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_5(x_1^5, x_2^5, x_3^5) &= \mathbf{F}^{-1}(x_1^5, x_2^5, x_3^5) \mathbf{K}_3^{-1} \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^0 \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} - i\alpha_3^5 \varphi_5) \times \right. \\ &\times \exp i [\alpha_1^5 \eta_1^5 + \alpha_2^5 \eta_2^5] d\eta_1^5 d\eta_2^5 - \\ &- \int_{-\infty}^0 \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} - i\alpha_2^5 \varphi_1) \times \\ &\times \exp i [\alpha_1^5 x_1^1 + \alpha_2^5 b - \alpha_3^5 (x_2^1 + c)] dx_1^1 dx_2^1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-b}^b \int_{-c}^c A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_1^5 \varphi_4) \times \\
& \times \exp i [-\alpha_2^5 x_1^4 - \alpha_3^5 (x_2^4 + c)] dx_1^4 dx_2^4 - \\
& - \int_0^\infty \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} + i\alpha_2^5 \varphi_3) \times \\
& \times \exp i [-\alpha_1^5 x_1^3 - \alpha_2^5 b - \alpha_3^5 (x_2^3 + c)] dx_1^3 dx_2^3 + \\
& + \int_0^\infty \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} + i\alpha_3^5 \varphi_6) \times \\
& \times \exp i [-\alpha_1^5 x_1^6 + \alpha_2^5 x_2^6 - \alpha_3^5 2c] dx_1^6 dx_2^6 \Big\}.
\end{aligned}$$

В отличие от случая ограниченных носителей, в данном случае при вычислении интегралов (1) необходимо выполнение условия излучения на бесконечности [7], что достигается выбором соответствующего обхода возможных вещественных полюсов подынтегральных выражений для тех локальных координат, которые уходят на бесконечность.

Литература

1. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т. 427. № 2. С. 183–187.
2. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. О проблеме блочных структур академика М. А. Садовского // ДАН. 2009. Т. 427. № 4. С. 480–485.
3. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. О пирамидальном блочном элементе // ДАН. 2009. Т. 428. № 1. С. 30–34.
4. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Павлова А. В. Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. 2009. Т. 424. № 1. С. 36–39.
5. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и нано структурах // ДАН. 2007. Т. 415. № 5. С. 596–599.
6. Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А. О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. 2008. Т. 418. № 3. С. 321–323.
7. Бабешко В. А., Ворович И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

Ключевые слова: блочный элемент, граничная задача, анизотропные уравнения, полуограниченный элемент.

Статья поступила 30 ноября 2009 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Павлова А. В., Бабешко О. М., Лозовой В. В., Бабешко В. А., Федоренко А. Г., 2009